Генеза

НОВА УКРАЇНСЬКА ШКОЛА

ОЛЕКСАНДР ІСТЕР

МАТЕМАТИКА

ІНТЕГРОВАНИЙ КУРС

ЧАСТИНА 2

УДК 51(075.3)
І-89

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 05.02.2024 № 124)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Відповідає модельній навчальній програмі
«Математика (інтегрований курс). 7–9 класи»
для закладів загальної середньої освіти (автор Істер О. С.)

Істер О.С.
І-89 Математика (інтегрований курс) : підруч. для 7-го кл. закл. заг. серед. освіти. У 2 ч. Ч. 2 / Олександр Істер. — Київ : Генеза, 2024. — 256 с. : іл.

ISBN 978-617-8353-39-1
ISBN 978-617-8353-42-1 (Ч.2).

УДК 51(075.3)

SBN 978-617-8353-39-1
ISBN 978-617-8353-42-1 (Ч.2)

Шановні семикласниці та семикласники!

Продовжуємо вивчати курс математики, який міститиме дві складові частини – *алгебру* та *геометрію*. Допоможе вам у цьому підручник, який ви тримаєте в руках.

У підручнику використано такі умовні позначення:

– пригадай (раніше вивчене);

– зверни особливу увагу;

– запитання і завдання до теоретичного матеріалу;

1.13 – завдання для класної та 1.15 – домашньої роботи;

– «ключова» задача (задача, висновки якої використовують для розв'язування інших задач);

– рубрика «Україна – це ми»;

– рубрика «Цікаві задачі – поміркуй одначе»;

– рубрика «Життєва математика»;

– вправи для підготовки до вивчення нової теми;

– вправи для повторення;

– рубрика «Головне в темі».

Текст, надрукований **жирним** шрифтом, звертає вашу увагу на нове поняття або таке, яке треба пригадати.

Усі вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так:

з позначки 1 починаються вправи початкового рівня;

з позначки 2 починаються вправи середнього рівня;

з позначки 3 починаються вправи достатнього рівня;

з позначки 4 починаються вправи високого рівня;

з позначки * починаються вправи підвищеної складності.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання можна, виконуючи завдання *«Домашньої самостійної роботи»*, які подано в тестовій формі, та *«Завдання для перевірки знань»*. Після кожної теми наведено вправи для її повторення та основний теоретичний матеріал (рубрика *«Головне в темі»*), а в кінці підручника – *«Завдання для перевірки знань за курс математики 7 класу»*. *«Задачі підвищеної складності»* допоможуть підготуватися до математичної олімпіади та поглибити знання з математики.

Теоретичний матеріал подано простою, доступною мовою та проілюстровано значною кількістю прикладів. Радимо після вивчення теоретичного матеріалу в школі обов'язково його опрацювати вдома.

Підручник містить велику кількість вправ. Більшість з них ви розглянете на уроках і під час домашньої роботи, інші вправи рекомендується розв'язати самостійно.

У рубриці *«Життєва математика»* зібрано задачі, які часто доводиться розв'язувати в повсякденному житті.

Цікаві факти з історії виникнення математичних понять і символів та розвитку математики як науки ви знайдете в рубриці *«А ще раніше...»*.

Бажаємо успіхів в опануванні математики!

Шановні вчительки та вчителі!

Пропонований підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирайте їх для використання на уроках, факультативних, індивідуальних, додаткових заняттях та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів/учениць, диференціації навчання тощо.

Додаткові вправи у *«Завданнях для перевірки знань»* призначено для учнів/учениць, які впоралися з основними завданнями раніше за інших. Чи правильно їх розв'язано, учитель/учителька може оцінити окремо.

Вправи для повторення тем можна запропонувати учням/ученицям, наприклад, під час узагальнювальних уроків або під час повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року.

У рубриці *«Життєва математика»* зібрано задачі, пов'язані з економічною грамотністю і підприємливістю, економічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, а в рубриці *«Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу»* – задачі, що допоможуть актуалізувати відповідні знання.

«Задачі підвищеної складності», які розміщено в кінці підручника, допоможуть підготувати учнів/учениць до різноманіт-

них математичних змагань і підвищити їхню цікавість до математики.

«Завдання для перевірки знань за курс математики 7 класу», які також розміщено в кінці підручника, можна запропонувати учням/ученицям для підготовки до річної контрольної роботи.

Шановні дорослі!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків у школі, потрібно запропонувати їй самостійно опрацювати матеріал цих уроків за підручником удома. Спочатку дитина має прочитати теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою, проілюстровано значною кількістю прикладів. Після цього потрібно розв'язати вправи, що посильні, з розглянутого параграфа.

Упродовж курсу математики 7 класу, який опрацьовує дитина, ви можете пропонувати їй додатково розв'язувати вдома вправи, що не розглядалися під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині розв'язати завдання *«Домашньої самостійної роботи»*, які подано в тестовій формі, та *«Завдання для перевірки знань»*. Це допоможе пригадати основні типи вправ і якісно підготуватися до тематичного оцінювання.

Якщо ваша дитина виявляє підвищену цікавість до математики та бажає поглибити свої знання, зверніть увагу на *«Задачі підвищеної складності»*, які розміщено в кінці підручника.

ТЕМА 7

ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- **пригадаєте**, що таке числові та буквені вирази, їх значення; степінь, основа та показник степеня;
- **ознайомитеся** з поняттями одночлена і многочлена, тотожності, тотожно рівних виразів;
- **навчитеся** виконувати арифметичні дії з одночленами і многочленами, тотожні перетворення виразів; застосовувати формули скороченого множення і властивості степенів, розкладати многочлени на множники.

§ 32. Квадрат суми і квадрат різниці

Формула квадрата суми

Піднесемо до квадрата двочлен $a + b$:

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

Отже,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Цю тотожність називають ***формулою квадрата суми***. Вона дає змогу підносити до квадрата суму двох довільних виразів не за правилом множення многочленів, а *скорочено*: одразу записувати квадрат $(a + b)^2$ у вигляді $a^2 + 2ab + b^2$. Тому формулу квадрата суми називають ще *формулою скороченого множення*. Читають її так:

квадрат суми двох виразів дорівнює квадрату першого виразу, плюс подвоєний добуток першого на другий, плюс квадрат другого виразу.

Приклад 1. Подати вираз $(3x + 5y)^2$ у вигляді многочлена.

Розв'язання.

$(3x + 5y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5y + (5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2.$

Якщо проміжні дії легко виконати усно, то можна одразу записати відповідь:

$(3x + 5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$.

Відповідь: $(3x + 5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$.

Формула квадрата різниці

Піднесемо тепер до квадрата двочлен $a - b$:
$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
Отже,

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Отримали ***формулу квадрата різниці***, яка також є формулою скороченого множення. Читають її так:

квадрат різниці двох виразів дорівнює квадрату першого виразу, мінус подвоєний добуток першого на другий, плюс квадрат другого виразу.

Зауважимо, що формулу квадрата різниці можна отримати, якщо переписати різницю $a - b$ у вигляді суми $a + (-b)$:

$(a - b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a \cdot (-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Приклад 2. Піднести двочлен $4a - 7b$ до квадрата.

Розв'язання. За формулою квадрата різниці маємо:

$(4a - 7b)^2 = (4a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot 7b + (7b)^2 = 16a^2 - 56ab + 49b^2$.

Відповідь: $(4a - 7b)^2 = 16a^2 - 56ab + 49b^2$.

Перетворення виразів за допомогою формул квадрата суми і квадрата різниці

Нам уже відомо, що $x^2 = (-x)^2$, тому, підносячи до квадрата вирази вигляду $-a - b$ і $-a + b$, доцільно попередньо замінити їх на протилежні їм вирази:

$$(-a - b)^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(-a + b)^2 = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Приклад 3. Перетворити на многочлен:

1) $(-x - 6m)^2$; 2) $(-2p^2 + 9q)^2$.

Розв'язання. 1) $(-x - 6m)^2 = (x + 6m)^2 = x^2 + 12xm + 36m^2$;

2) $(-2p^2 + 9q)^2 = (2p^2 - 9q)^2 = 4p^4 - 36p^2q + 81q^2$.

Відповідь: 1) $x^2 + 12xm + 36m^2$; 2) $4p^4 - 36p^2q + 81q^2$.

Приклад 4. Спростити вираз $(-5m^3 - 2n^2)^2 + (2m^3 - 5n^2)^2$.

Розв'язання. $(-5m^3 - 2n^2)^2 + (2m^3 - 5n^2)^2 = (5m^3 + 2n^2)^2 + (2m^3 - 5n^2)^2 = 25m^6 + \underline{\underline{20m^3n^2}} + \underline{\underline{4n^4}} + 4m^6 - \underline{\underline{20m^3n^2}} + \underline{\underline{25n^4}} = 29m^6 + 29n^4$.

Відповідь: $29m^6 + 29n^4$.

Обчислення квадратів чисел за допомогою формул квадрата суми і квадрата різниці

Розглянемо, як застосовують формули квадрата суми і квадрата різниці для обчислення квадратів чисел.

Приклад 5. Обчислити: 1) $(50 + 1)^2$; 2) $5{,}8^2$.

Розв'язання. 1) $(50 + 1)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 1 + 1^2 = 2500 + 100 + 1 = 2601$;

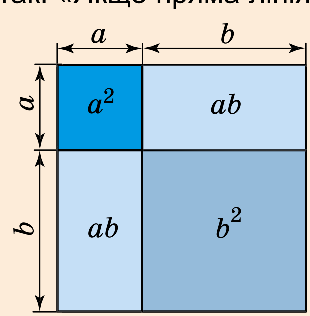
2) $5{,}8^2 = (6 - 0{,}2)^2 = 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 0{,}2 + 0{,}2^2 = 36 - 2{,}4 + 0{,}04 = 33{,}64$.

Відповідь: 1) 2601; 2) 33,64.

А ще раніше...

Деякі правила скороченого множення були відомі давнім китайським і грецьким математикам понад 4 тисячі років тому. Тоді вони формулювали ці правила не за допомогою букв і символів, а словами, і доводили геометрично, тобто тільки для додатних чисел.

Наприклад, тотожність $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ у другій книзі «Начал» Евкліда (III ст. до н. е.) формулювалася так: «Якщо пряма лінія (мається на увазі відрізок) як-небудь розсічена, то квадрат на всій прямій дорівнює квадратам на відрізках разом із двічі взятим прямокутником, що міститься між відрізками». Тут «квадрат на всій прямій» слід розуміти як $(a + b)^2$, «квадрати на відрізках» – як a^2 і b^2, «прямокутник, що міститься між відрізками», – як ab.



Геометричний зміст цієї тотожності зображено на малюнку.

- Запишіть і прочитайте формулу квадрата суми.
- Запишіть і прочитайте формулу квадрата різниці.
- Як піднести до квадрата вирази $-a - b$ і $-a + b$?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

32.1. (*Усно.*) Які з виразів є квадратами суми двох виразів, а які – квадратами різниці:
1) $x^2 + y^2$; 2) $(a - b)^2$; 3) $p^2 - c^2$; 4) $(m + 2)$;
5) $(x + 3)^2$; 6) $(b - 7)^3$; 7) $(4 - p)^2$; 8) $(x + y)^2$?

32.2. (*Усно.*) Які з рівностей є правильними:
1) $(b - 2)^2 = b^2 - 2^2$; 2) $(a + 3)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2$;
3) $(x + 5)^2 = x^2 + x \cdot 5 + 5^2$; 4) $(7 - y)^2 = 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot y + y^2$?

32.3. Які з рівностей є правильними:
1) $(a + 7)^2 = a^2 + 7^2$; 2) $(x - 3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2$;
3) $(2 - y)^2 = 2^2 - 2 \cdot y + y^2$; 4) $(b + 3)^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot 3 + 3^2$?

32.4. Подайте у вигляді многочлена:
1) $(a + m)^2$; 2) $(b - x)^2$; 3) $(x + p)^2$; 4) $(m - y)^2$.

32.5. Піднесіть до квадрата:
1) $(b - p)^2$; 2) $(x + t)^2$; 3) $(c - a)^2$; 4) $(y + d)^2$.

2

32.6. (*Усно.*) Подайте вираз у вигляді многочлена:
1) $(a + 4)^2$; 2) $(x - 3)^2$; 3) $(b + 2)^2$; 4) $(m - 5)^2$.

32.7. Піднесіть до квадрата:
1) $(x - 9)^2$; 2) $(a + 3)^2$; 3) $(10 - m)^2$;
4) $(7 + y)^2$; 5) $(c - 0{,}2)^2$; 6) $(0{,}8 + x)^2$.

32.8. Перетворіть на многочлен:
1) $(2x + 5)^2$; 2) $(7b - 4)^2$; 3) $(10x + 3y)^2$;
4) $(9a - 4b)^2$; 5) $\left(\frac{1}{3}x + 3y\right)^2$; 6) $(5m - 0{,}2t)^2$.

32.9. Перетворіть на многочлен:
1) $(a - 3)^2$; 2) $(x + 9)^2$; 3) $(c + 0{,}3)^2$;
4) $(2a - 5)^2$; 5) $(4y + 3)^2$; 6) $(9a - 8b)^2$;
7) $(4b + 7a)^2$; 8) $\left(\frac{1}{2}m - 2n\right)^2$; 9) $(0{,}5p + 2q)^2$.

32.10. Виконайте дії:
1) $(3a + 1)^2 - 1$; 2) $12ab + (2a - 3b)^2$;
3) $(4a + 8)^2 - 16(a^2 + 4)$; 4) $-4y^2 + (5x - 2y)^2 - 25x^2$.

32.11. Спростіть:
1) $20a + (a - 10)^2$; 2) $(3m + 5)^2 - 9m^2$;
3) $(x + 4)^2 - 8(x + 2)$; 4) $(2a - 7b)^2 - (4a^2 + 49b^2)$.

32.12. Перетворіть вираз на многочлен стандартного вигляду:
1) $(a - 2)^2 + a(a + 4)$; 2) $(b + 1)(b + 2) + (b - 3)^2$.

32.13. Спростіть вираз:
1) $(m - 5)^2 - m(m - 10)$; 2) $(x + 4)^2 + (x + 1)(x - 9)$.

32.14. Розв'яжіть рівняння:
1) $(x + 3)^2 - x^2 = 12$; 2) $(y - 2)^2 = y^2 - 2y$.

32.15. Розв'яжіть рівняння:
1) $(x - 4)^2 - x^2 = 24$; 2) $(y + 5)^2 = 5y + y^2$.

32.16. Заповніть у зошиті таблицю за зразком:

Вираз I	Вираз II	Квадрат різниці виразів I і II
$2x$	b	$4x^2 - 4xb + b^2$
	$7b$	$4x^2 - 28xb + 49b^2$
$3x$		$9x^2 - 2xb + \frac{1}{9}b^2$
$0{,}5x$	$4b$	

32.17. Заповніть у зошиті таблицю за зразком:

Вираз I	Вираз II	Квадрат суми виразів I і II
$3m$	a	$9m^2 + 6ma + a^2$
$5m$		$25m^2 + 20ma + 4a^2$
	$4a$	$\frac{1}{16}m^2 + 2ma + 16a^2$
$0{,}6m$	$5a$	
		$\frac{1}{9}m^2 + 6ma + 81a^2$

3

32.18. За формулою квадрата суми або квадрата різниці обчисліть:
1) $(100 + 2)^2$; 2) 41^2; 3) 99^2; 4) $3{,}8^2$.

32.19. Обчисліть, використовуючи формули квадрата суми або квадрата різниці:
1) $(40 - 1)^2$; 2) 89^2; 3) 501^2; 4) $4{,}02^2$.

32.20. Серед виразів $(x - y)^2$, $(x + y)^2$, $(-y + x)^2$, $(-x - y)^2$ знайдіть ті, що є тотожно рівними виразу:
1) $(y + x)^2$; 2) $(y - x)^2$.

32.21. Подайте у вигляді многочлена:
1) $(-p + 5)^2$; 2) $(-a - 7)^2$;
3) $(-p - 2m)^2$; 4) $(-3b + c)^2$.

32.22. Перетворіть на многочлен:
1) $(-a + 3)^2$; 2) $(-b - 5)^2$;
3) $(-4m + p)^2$; 4) $(-a - 3b)^2$.

32.23. Перетворіть на многочлен:
1) $(-9b + 4m)^2$; 2) $(-7a - 10b)^2$; 3) $(-0,5m - 0,4p)^2$;
4) $\left(-1\frac{1}{2}x + 6y\right)^2$; 5) $(0,04p - 50q)^2$; 6) $(-0,25c - 0,2d)^2$.

32.24. Подайте у вигляді многочлена:
1) $(-3a + 5x)^2$; 2) $(-8x - 5y)^2$; 3) $(-4b - 0,5y)^2$;
4) $\left(8x + \frac{1}{16}y\right)^2$; 5) $(-0,02a - 10b)^2$; 6) $(-0,15m + 0,1n)^2$.

32.25. Виконайте дію:
1) $(a^2 - 9)^2$; 2) $(7 - y^3)^2$; 3) $(2a + c^4)^2$;
4) $(-5a + b^3)^2$; 5) $(4a^2 - 5m^3)^2$; 6) $\left(\frac{1}{3}p^4 + 9q^3\right)^2$.

32.26. Піднесіть до квадрата:
1) $(a^2 + 2a)^2$; 2) $\left(\frac{1}{4}m^3 - 12m\right)^2$;
3) $\left(1\frac{1}{3}p^7 + 3p^2\right)^2$; 4) $(7ab - 2b^3)^2$;
5) $\left(10p^6 + \frac{1}{2}p^4a^3\right)^2$; 6) $(0,2m^2n + 15m^3n^4)^2$.

32.27. Подайте вираз у вигляді многочлена:
1) $(b^7 - 5)^2$; 2) $(a^3 + 2b^4)^2$;
3) $\left(8x^6 - \frac{1}{4}x^2\right)^2$; 4) $\left(6m^3 + 1\frac{1}{6}m^5\right)^2$;
5) $(7a^2 + 8ap^3)^2$; 6) $\left(\frac{1}{2}b^2m^3 - \frac{1}{3}b^3m^2\right)^2$.

32.28. Спростіть вираз:
1) $(3a - 4b)^2 - (3a + 4b)^2$; 2) $(2a + 3b)^2 + (a - 6b)^2$;
3) $a(2a - 1)^2 - 4a(a + 5)^2$; 4) $12m^2 - 3(2m - n)^2 - 12mn$.

32.29. Виконайте дії:
1) $(7a + 9b)^2 - (7a - 9b)^2$; 2) $(10a - 3b)^2 + (6a + 5b)^2$;
3) $18x^2 - 12xy - 2(3x - y)^2$; 4) $a(9a - 1)^2 - 81a(a - 2)^2$.

32.30. Які одночлени потрібно записати замість «зірочки», щоб утворилася тотожність:

1) $(* + 2a)^2 = b^2 + 4ab + 4a^2$;
2) $(2b - *)^2 = 4b^2 + 9 - 12b$;
3) $(3a^4 + *)^2 = * + 30a^4 + 25$;
4) $(5x^2 - *)^2 = 25x^4 - * + 9m^2$?

32.31. Замініть «зірочку» одночленом так, щоб одержати тотожність:

1) $(* - 7)^2 = x^2 - 14x + 49$;
2) $(4p^3 + *)^2 = * + 9 + 24p^3$.

32.32. Подайте вираз у вигляді многочлена стандартного вигляду:

1) $(x - 2)(x + 1)^2$;
2) $(x + 1)(x - 5)^2$.

32.33. Доведіть тотожність:

1) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$;
2) $m^2 + n^2 = (m + n)^2 - 2mn$.

32.34. Доведіть тотожність:

1) $-4ab = (a - b)^2 - (a + b)^2$; 2) $(x - y)^2 + 2xy = x^2 + y^2$.

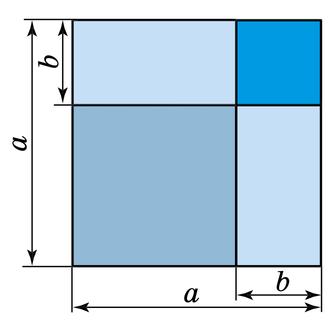
32.35. Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x - 4)^2 - (3x + 2)^2 = -24$;
2) $(2x - 3)^2 + (1 - x)(9 + 4x) = 18$.

32.36. Розв'яжіть рівняння:

1) $x(x - 2) - (x + 5)^2 = -1$;
2) $(2y - 7)^2 + (5 - 4y)(y - 7) = 3(y - 6)$.

4 **32.37.** Використовуючи малюнок, поясніть геометричний зміст формули $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ для $a > 0$, $b > 0$, $a > b$.



32.38. Спростіть вираз $((((a + b)^2 - 2ab)^2 - 2a^2b^2)^2 - 2a^4b^4)^2 - 2a^8b^8$.

32.39. Доведіть формулу скороченого множення для:

1) куба суми: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
2) куба різниці: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Доведення.

1) $(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) =$
$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

32.40. Піднесіть до куба за формулами скороченого множення:

1) $(2 + a)^3$; 2) $(2b - 1)^3$.

32.41. Піднесіть до куба:

1) $(x - 2)^3$; 2) $(1 + 2m)^3$.

Вправи для повторення

32.42. Обчисліть вираз $993\frac{2}{7}+\left(5,4:\frac{9}{35}-11\frac{2}{9}\right)\cdot 2,25-4\frac{2}{7}$ і дізнайтеся рік початку будівництва Софійського собору в Києві.

32.43. Знайдіть три послідовних натуральних парних числа, якщо добуток двох менших з них на 104 менший від добутку двох більших.

32.44. Доведіть, що значення виразу:
1) $8^{10} - 8^9 + 8^8$ кратне числу 152;
2) $15^4 - 10^4 - 5^4$ ділиться на 80.

Життєва математика

32.45. На заправці один літр бензину коштує 45 грн. Водій залив у бак 30 л бензину і ще придбав пляшку води за 20 грн. Яку решту отримає водій з 1500 грн?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

32.46. Подайте у вигляді квадрата число:

1) 1; 2) 9; 3) 25; 4) 64;
5) 100; 6) 121; 7) 196; 8) 900.

32.47. Подайте у вигляді квадрата одночлен:

1) x^4; 2) y^8; 3) m^6; 4) p^{10};
5) $16a^2$; 6) $49b^{10}$; 7) m^2n^4; 8) $36c^2a^2$.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

32.48. Доведіть, що для будь-якого натурального значення n значення виразу $(n^2 + n)(n + 2)$ ділиться на 6.

§ 33. Розкладання многочленів на множники за допомогою формул квадрата суми і квадрата різниці

Перетворення тричлена у квадрат двочлена

Формули квадрата суми і квадрата різниці можна використовувати також для розкладання на множники виразів вигляду

$a^2 + 2ab + b^2$ і $a^2 - 2ab + b^2$. Для цього перепишемо ці формули, помінявши місцями їхні ліву і праву частини.

$$\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2;} \qquad \boldsymbol{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.}$$

Такий вигляд формул зручно використовувати для перетворення тричлена у квадрат двочлена.

Тричлен вигляду $a^2 + 2ab + b^2$ або $a^2 - 2ab + b^2$ називають *повним квадратом*. Саме його можна подати у вигляді квадрата двочлена.

Наприклад, $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ і $a^2 - 6a + 9 = (a - 3)^2$, тому тричлени $x^2 + 4x + 4$ і $a^2 - 6a + 9$ є повними квадратами. Перетворення тричлена, що є повним квадратом, у квадрат двочлена називають *згортанням у повний квадрат*.

Оскільки $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ і $(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$, то згортання в повний квадрат є розкладанням тричлена на множники.

Приклад 1. Розкласти тричлен $4x^2 + 12x + 9$ на множники.

Розв'язання. Оскільки $4x^2 = (2x)^2$, $12x = 2 \cdot 2x \cdot 3$ і $9 = 3^2$, то тричлен $4x^2 + 12x + 9$ є квадратом суми $2x + 3$, отже, його можна розкласти на множники:

$4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = (2x + 3)^2$.

Відповідь: $(2x + 3)^2$.

Приклад 2. Знайти значення виразу $x^2 + 25y^4 - 10xy^2$, якщо $x = 44$, $y = -3$.

Розв'язання. Спочатку згорнемо вираз у повний квадрат:

$x^2 + 25y^4 - 10xy^2 = x^2 - 10xy^2 + 25y^4 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5y^2 + (5y^2)^2 =$
$= (x - 5y^2)^2$.

Тепер виконати обчислення буде зовсім не складно. Якщо $x = 44$, $y = -3$, то $(x - 5y^2)^2 = (44 - 5 \cdot (-3)^2)^2 = (44 - 45)^2 = (-1)^2 = 1$.

Відповідь: 1.

Перетворення тричлена у вираз, протилежний квадрату двочлена

Приклад 3. Перетворити тричлен $-16a^2 + 8ab - b^2$ у вираз, протилежний квадрату двочлена.

Розв'язання. Винесемо за дужки -1, а одержаний у дужках вираз згорнемо в повний квадрат:

$-16a^2 + 8ab - b^2 = -(16a^2 - 8ab + b^2) = -((4a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot b + b^2) =$
$= -(4a - b)^2$.

Відповідь: $-(4a - b)^2$.

Зауважимо, що не кожен тричлен можна подати у вигляді квадрата двочлена або у вигляді виразу, протилежного квадрату двочлена.

Розв'язування рівнянь

Приклад 4. Розв'язати рівняння $16x^2 - 40x + 25 = 0$.

Розв'язання. Маємо $(4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 5 + 5^2 = 0$; $(4x - 5)^2 = 0$. Оскільки значення квадрата виразу дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли значення самого виразу дорівнює нулю, то маємо $4x - 5 = 0$, $x = 1{,}25$.

Відповідь: 1,25.

? Наведіть приклад тричлена, що є квадратом суми; квадратом різниці.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

33.1. (*Усно.*) Розкладіть на множники:
1) $c^2 + 2cd + d^2$; 2) $x^2 - 2xy + y^2$; 3) $m^2 + 2 \cdot m \cdot 5 + 5^2$.

33.2. Згорніть многочлен у повний квадрат:
1) $m^2 - 2mn + n^2$; 2) $p^2 + 2pq + q^2$; 3) $a^2 + 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2$.

33.3. Розкладіть тричлен на множники:
1) $t^2 + 2tp + p^2$; 2) $a^2 - 2ax + x^2$; 3) $b^2 + 2 \cdot b \cdot 7 + 7^2$.

2

33.4. Розкладіть на множники:
1) $a^2 - 6a + 9$; 2) $64 + 16b + b^2$;
3) $0{,}01m^2 + 0{,}2m + 1$; 4) $\frac{1}{25} - \frac{2}{5}p + p^2$;
5) $4m^2 - 12m + 9$; 6) $9c^2 + 24cd + 16d^2$.

33.5. Подайте вираз у вигляді квадрата двочлена:
1) $a^2 + 4a + 4$; 2) $9m^2 - 6m + 1$;
3) $b^2 - 1{,}2b + 0{,}36$; 4) $\frac{1}{49}m^2 - \frac{2}{7}m + 1$;
5) $81a^2 + 18ab + b^2$; 6) $25m^2 - 60mn + 36n^2$.

33.6. Обчисліть зручним способом:
1) $36^2 + 2 \cdot 36 \cdot 14 + 14^2$;
2) $117^2 - 2 \cdot 117 \cdot 17 + 17^2$.

33.7. Обчисліть зручним способом:
1) $87^2 + 2 \cdot 87 \cdot 13 + 13^2$; 2) $137^2 - 2 \cdot 137 \cdot 47 + 47^2$.

33.8. Знайдіть значення виразу, попередньо згорнувши його у повний квадрат:
1) $a^2 - 2a + 1$, якщо $a = 91$; -19;
2) $4m^2 + 28m + 49$, якщо $m = -3{,}5$; 0;
3) $16x^2 - 40xy + 25y^2$, якщо $x = 5$, $y = 4$.

33.9. Знайдіть значення виразу:
1) $a^2 + 10a + 25$, якщо $a = -15$; 95;
2) $0{,}01x^2 + 0{,}8x + 16$, якщо $x = 10$; -40;
3) $4m^2 + 28mn + 49n^2$, якщо $m = -3$, $n = -\frac{1}{7}$.

3

33.10. Перетворіть тричлен у квадрат двочлена:
1) $\frac{1}{4}m^2 + 4n^2 + 2mn$; 2) $-10mn + 0{,}25m^2 + 100n^2$;
3) $9p^2 + pq + \frac{1}{36}q^2$; 4) $m^6 + 4n^2 - 4m^3n$;
5) $25m^{12} + p^6 - 10m^6p^3$; 6) $\frac{9}{64}c^6 - 3dc^5 + 16d^2c^4$.

33.11. Розкладіть на множники:
1) $\frac{1}{9}a^4 + 9b^2 + 2a^2b$; 2) $-6{,}4a^2y^4 + 0{,}16a^4 + 64y^8$;
3) $16m^{20} + n^{12} - 8m^{10}n^6$; 4) $6a^4b^2 + a^6 + 9a^2b^4$.

33.12. Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена або виразу, протилежного до квадрата двочлена:
1) $-1 + 4x - 4x^2$; 2) $-40a + 25a^2 + 16$;
3) $24xy - 9x^2 - 16y^2$; 4) $-140x^3y + 100x^6 + 49y^2$;
5) $4pq - 25p^2 - 0{,}16q^2$; 6) $-0{,}64m^6 - 1{,}6m^3n^2 - n^4$.

33.13. Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена або виразу, що є протилежним до квадрата двочлена:
1) $-9 - 30x - 25x^2$; 2) $-36b + 81b^2 + 4$;
3) $42xy - 49x^2 - 9y^2$; 4) $-0{,}36a^4 - 25b^6 + 6a^2b^3$.

33.14. Розв'яжіть рівняння:
1) $x^2 - 10x + 25 = 0$; 2) $64y^2 + 16y + 1 = 0$;
3) $9x^2 + 1 = -6x$; 4) $16y^2 = 56y - 49$.

33.15. Розв'яжіть рівняння:
1) $x^2 + 16x + 64 = 0$; 2) $36x^2 - 12x + 1 = 0$;
3) $4x^2 + 9 = -12x$; 4) $x^2 = 0{,}4x - 0{,}04$.

33.16. Запишіть замість «зірочки» такий одночлен, щоб одержаний тричлен можна було перетворити на квадрат двочлена:
1) $* - 2mn + n^2$;
2) $25a^2 + 20a + *$;
3) $64m^2 + * + 49b^2$;
4) $* - 12bm^3 + 9b^2$;
5) $p^2 - 0{,}8p^7 + *$;
6) $* + a^2b^3 + \frac{1}{4}a^4$.

33.17. Запишіть замість «зірочки» такий одночлен, щоб одержаний тричлен можна було подати у вигляді квадрата двочлена:
1) $* - 28x + 49$;
2) $64a^2 - 16a + *$;
3) $25a^2 + * + \frac{1}{25}b^6$;
4) $0{,}01a^8 + 100b^6 + *$.

33.18. Розкладіть вираз на множники:
1) $(x - 2)^2 + 2(x - 2) + 1$;
2) $(a^2 + 6a + 9) + 2(a + 3) + 1$.

33.19. Доведіть, що нерівність є правильною для будь-якого значення x:
1) $x^2 + 2 > 0$;
2) $x^2 - 6x + 9 \geqslant 0$.

4

33.20. Порівняйте з нулем значення виразу:
1) $x^2 - 4x + 4$;
2) $-x^2 + 2x - 1$.

33.21. Уставте пропущені знаки $\leqslant$ або $\geqslant$ так, щоб для будь-яких значень x нерівність була правильною:
1) $x^2 + 4x + 4 \ldots 0$;
2) $-x^2 + 30x - 225 \ldots 0$;
3) $-x^2 - 8x - 16 \ldots 0$;
4) $36 - 12x + x^2 \ldots 0$.

33.22. Доведіть, що для будь-яких значень змінної вираз $x^2 + 4x + 5$ набуває лише додатних значень. Якого найменшого значення набуває цей вираз і для якого значення x?

33.23. Доведіть, що для будь-якого значення змінної вираз $x^2 + 6x + 11$ набуває лише додатних значень. Якого найменшого значення набуває цей вираз і для якого значення x?

33.24. Замініть «зірочки» одночленами так, щоб одержаний тричлен був повним квадратом (знайдіть три різних розв'язки задачі):
1) $* - 48xy + *$;
2) $* + 20ab + *$.

33.25. Подайте вираз у вигляді квадрата двочлена, якщо це можливо:

1) $x^2 - 3x + 9$;
2) $49a^2 - 140ab + 100b^2$;
3) $4a^2 - 9b^2 - 12ab$;
4) $16y^2 + 8y - 1$;
5) $\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{40}xy + \frac{1}{25}y^2$;
6) $-xy + \frac{1}{16}y^2 + 4x^2$.

Вправи для повторення

33.26. Для яких значень x:

1) квадрат двочлена $x + 2$ на 225 більший за квадрат двочлена $x - 3$;
2) квадрат двочлена $2x - 6$ у 4 рази більший за квадрат двочлена $x + 3$?

33.27. Спростіть вираз:

1) $(m - 2)(m + 3)(m - 5)$;
2) $(p^2 + 1)(p^8 - p^6 + p^4 - p^2 + 1)$.

Життєва математика

33.28. Щосереди в аптеці «Будьте здорові» діє 15-відсоткова знижка для пенсіонерів. Скільки грошей заощадить пенсіонер, придбавши ліки в середу, якщо роздрібна ціна цих ліків складає 580 грн?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

33.29. Подайте вираз у вигляді многочлена:

1) $(x - 3)(x + 3)$;
2) $(y + 2)(y - 2)$;
3) $(1 + m)(1 - m)$;
4) $(4 - a)(4 + a)$.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

33.30. Є піскові годинники двох видів: одним відміряють 7 хв, а іншим – 11 хв. Як за допомогою цих годинників відміряти точно 15 хв?

§ 34. Множення різниці двох виразів на їх суму

Формула множення різниці двох виразів на їх суму

Помножимо різницю $a - b$ на суму $a + b$:

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

Отже,

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Отримали ще одну формулу скороченого множення, яку читають так:

добуток різниці двох виразів на їх суму дорівнює різниці квадратів цих виразів.

Розглянемо приклади застосування цієї формули.

Приклад 1. Виконати множення:

1) $(2m - 3p)(2m + 3p)$; 2) $(4a^2 + b^3)(b^3 - 4a^2)$.

Розв'язання.

1) $(2m - 3p)(2m + 3p) = (2m)^2 - (3p)^2 = 4m^2 - 9p^2$

або скорочено: $(2m - 3p)(2m + 3p) = 4m^2 - 9p^2$.

2) $(4a^2 + b^3)(b^3 - 4a^2) = (b^3 + 4a^2)(b^3 - 4a^2) = (b^3)^2 - (4a^2)^2 = b^6 - 16a^4$.

Відповідь: 1) $4m^2 - 9p^2$; 2) $b^6 - 16a^4$.

Приклад 2. Подати добуток $(-5m - 7a)(5m - 7a)$ у вигляді многочлена.

Розв'язання.

1-й спосіб. Винесемо у виразі $-5m - 7a$ за дужки число -1. Матимемо:

$(-5m - 7a)(5m - 7a) = -1 \cdot (5m + 7a)(5m - 7a) = -((5m)^2 - (7a)^2) =$
$= -(25m^2 - 49a^2) = -25m^2 + 49a^2 = 49a^2 - 25m^2$.

2-й спосіб. У кожному з множників спочатку поміняємо місцями доданки:

$(-5m - 7a)(5m - 7a) = (-7a - 5m)(-7a + 5m) = (-7a)^2 - (5m)^2 =$
$= 49a^2 - 25m^2$.

Відповідь: $49a^2 - 25m^2$.

Застосування формул множення різниці двох виразів на їх суму під час спрощення виразів

Приклад 3. Спростити вираз:

1) $-2m(m - 5)(m + 5)$;

2) $4x(x - 2) - (2x + 3)(2x - 3)$;

3) $(b^2 - 2)(b^2 + 2)(b^4 + 4)$.

Розв'язання. 1) $-2m(m - 5)(m + 5) = -2m(m^2 - 5^2) = -2m(m^2 - 25) =$
$= -2m^3 + 50m = 50m - 2m^3$.

2) $4x(x-2)-(2x+3)(2x-3)=4x^2-8x-((2x)^2-3^2)=4x^2-8x-4x^2+9=9-8x$.

3) Застосуємо двічі поспіль формулу множення різниці двох виразів на їх суму. Маємо: $(b^2-2)(b^2+2)(b^4+4)=((b^2)^2-2^2)\times(b^4+4)=(b^4-4)(b^4+4)=(b^4)^2-4^2=b^8-16$.

Відповідь: 1) $50m-2m^3$; 2) $9-8x$; 3) b^8-16.

Застосування формули множення двох виразів на їх суму під час обчислення виразів

Приклад 4. Обчислити зручним способом $4{,}3\cdot 3{,}7$.

Розв'язання.

$4{,}3\cdot 3{,}7=(4+0{,}3)(4-0{,}3)=4^2-0{,}3^2=16-0{,}09=15{,}91$.

Відповідь: 15,91.

? Якому виразу дорівнює добуток різниці двох виразів на їх суму? Запишіть і прочитайте відповідну формулу.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

34.1. (*Усно.*) Які з рівностей є тотожностями:
1) $(a-c)(a+c)=a^2-c^2$; 2) $(m+p)(m-p)=m^2+p^2$;
3) $(y-x)(y+x)=(y-x)^2$; 4) $(d+n)(d-n)=n^2-d^2$?

34.2. Закінчіть запис:
1) $(c-5)(c+5)=c^2-5^2=\ldots$;
2) $(b+7)(b-7)=b^2-7^2=\ldots$.

34.3. Знайдіть добуток:
1) $(c-d)(c+d)$; 2) $(p+a)(p-a)$.

34.4. Виконайте множення двочленів:
1) $(b+t)(b-t)$; 2) $(a-t)(a+t)$.

2

34.5. Виконайте множення:
1) $(p-9)(p+9)$; 2) $(5+x)(5-x)$;
3) $(3-c)(3+c)$; 4) $(7+y)(y-7)$.

34.6. Перетворіть на многочлен:
1) $(m-2)(m+2)$; 2) $(7+a)(7-a)$;
3) $(4-x)(4+x)$; 4) $(11+b)(b-11)$.

34.7. Подайте добуток у вигляді многочлена:
1) $(2x-3)(2x+3)$; 2) $(3p+8)(3p-8)$;
3) $(4+5a)(5a-4)$; 4) $(3m-4p)(4p+3m)$;
5) $(7a+10b)(10b-7a)$; 6) $\left(\frac{1}{4}p-\frac{1}{7}q\right)\left(\frac{1}{7}q+\frac{1}{4}p\right)$.

34.8. Виконайте множення:

1) $(p - 2m)(p + 2m)$;
2) $(2p + 7)(2p - 7)$;
3) $(2c + 5)(5 - 2c)$;
4) $(8a - 0,3x)(0,3x + 8a)$;
5) $(0,1p + q)(q - 0,1p)$;
6) $\left(\frac{2}{7}a - \frac{3}{5}b\right)\left(\frac{2}{7}a + \frac{3}{5}b\right)$.

34.9. Заповніть у зошиті таблицю за зразком:

Вираз I	Вираз II	Добуток різниці виразів I і II на їх суму	Різниця квадратів виразів I і II
$3a$	b	$(3a - b)(3a + b)$	$9a^2 - b^2$
$5m$	$2n$		
$\frac{1}{2}x$	$3y$		
$0,1p$	$0,7q$		
$\frac{1}{7}c$	$\frac{1}{3}d$		

34.10. Виконайте дії:

1) $16 + (3a + 4)(3a - 4)$;
2) $(5m - 3)(5m + 3) - 25m^2$.

34.11. Спростіть вираз:

1) $(8x - 5)(8x + 5) + 25$;
2) $9m^2 + (5 - 3m)(5 + 3m)$;
3) $(2b - 3)(3 + 2b) - 4b^2$;
4) $(4a + 7)(7 - 4a) - 49$.

34.12. Розв'яжіть рівняння:

1) $3x = (2x - 3)(2x + 3) - 4x^2$;
2) $9x^2 + (8 - 3x)(8 + 3x) = 4x$.

34.13. Знайдіть корені рівняння:

1) $8x = (5x - 4)(5x + 4) - 25x^2$;
2) $(9 - 4x)(9 + 4x) + 16x^2 = 3x$.

34.14. Обчисліть зручним способом:

1) $(40 - 1)(40 + 1)$;
2) $81 \cdot 79$;
3) $1002 \cdot 998$;
4) $1,03 \cdot 0,97$.

34.15. Знайдіть значення виразу зручним способом:

1) $(80 + 2)(80 - 2)$;
2) $59 \cdot 61$;
3) $108 \cdot 92$;
4) $12,3 \cdot 11,7$.

34.16. Подайте добуток у вигляді многочлена:

1) $(p^2 + 3q)(3q - p^2)$;
2) $(2a - m^3)(m^3 + 2a)$;
3) $(5a - b^2)(b^2 + 5a)$;
4) $(0,7m + n^2)(0,7m - n^2)$;
5) $(4t^2 - p^4)(4t^2 + p^4)$;
6) $(3a^3 - 4b^4)(4b^4 + 3a^3)$.

34.17. Виконайте множення:

1) $(1{,}7a - 1{,}4p^3)(1{,}4p^3 + 1{,}7a)$;

2) $\left(3a^2 - \frac{1}{4}b^3\right)\left(\frac{1}{4}b^3 + 3a^2\right)$;

3) $\left(5m^2n + \frac{1}{7}p^3\right)\left(\frac{1}{7}p^3 - 5m^2n\right)$;

4) $\left(\frac{2}{3}a^7 + 1,2y^8\right)\left(1,2y^8 - \frac{2}{3}a^7\right)$.

34.18. Виконайте множення:

1) $(5a + b^2)(b^2 - 5a)$;

2) $(4a^3 - d^2)(d^2 + 4a^3)$;

3) $(0{,}7p - m^7)(m^7 + 0{,}7p)$;

4) $\left(\frac{1}{5}m^2 + 3b^7\right)\left(3b^7 - \frac{1}{5}m^2\right)$;

5) $(0{,}2a^2b - 0{,}3ab^2)(0{,}2a^2b + 0{,}3ab^2)$;

6) $\left(1,2p^7 - \frac{2}{3}a^8\right)\left(\frac{2}{3}a^8 + 1,2p^7\right)$.

34.19. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(-a^2 + 7)(7 + a^2)$;
2) $(-p^2 - q^7)(p^2 - q^7)$;
3) $(-8m - 5p)(-8m + 5p)$;
4) $(-2a^3 - 3b)(-3b + 2a^3)$.

34.20. Спростіть вираз:

1) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$;
2) $(2a + x)(4a^2 + x^2)(2a - x)$;
3) $(c^3 + d^2)(c^3 - d^2)(d^4 + c^6)$;
4) $(-x - y)(x - y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$.

34.21. Перетворіть на многочлен:

1) $(-a^7 + b^5)(a^7 + b^5)$;
2) $(-0{,}1m^3 - p^4)(0{,}1m^3 - p^4)$;
3) $(3x - 2p)(3x + 2p)(9x^2 + 4p^2)$;
4) $(-a^2 - 5b^3)(a^2 - 5b^3)(a^4 + 25b^6)$.

34.22. Замість «зірочки» запишіть такі одночлени, щоб утворилася тотожність:

1) $(2a + *)(2a - *) = 4a^2 - 49b^2$;
2) $(* - 9p)(* + 9p) = 0{,}25m^4 - 81p^2$;
3) $100a^8 - 9b^6 = (* + 10a^4)(10a^4 - *)$;
4) $(4x - 3y)(* + *) = 16x^2 - 9y^2$.

34.23. Знайдіть корені рівняння:

1) $8x(1 + 2x) - (4x + 1)(4x - 1) = 17$;
2) $x - 12x(1 - 3x) = 14 - (5 - 6x)(6x + 5)$;
3) $(4x + 1)(4x - 1) + (2x - 3)^2 = 5x(4x - 11)$.

34.24. Розв'яжіть рівняння:

1) $5x(4x - 1) - (6x - 1)(6x + 1) = (4x + 3)(3 - 4x)$;
2) $(3x - 4)(3x + 4) - (5x - 2)(5x + 2) = 2x(1 - 8x)$;
3) $(5x - 4)^2 - 2x(8x - 5) = (3x - 2)(3x + 2)$.

34.25. Спростіть вираз:

1) $(a + 3)^2 - (a + 3)(a - 3)$;
2) $(8x - 3y)(8x + 3y) - (3x - 8y)^2$;
3) $(b - 3)^2(b + 3)^2$;
4) $(a + 5)^2(5 - a)^2$.

34.26. Спростіть вираз:

1) $(c - 2)^2 - (c - 3)(c + 3)$;
2) $(9x - 2y)(9x + 2y) - (5x - 2y)^2$;
3) $(a + 6)^2(a - 6)^2$;
4) $(2 - m)^2(m + 2)^2$.

4

34.27. Доведіть, що квадрат будь-якого цілого числа завжди на одиницю більший за добуток попереднього йому і наступного за ним чисел.

34.28. Виконайте множення, використавши формули скороченого множення:

1) $((x + y) + 1)((x + y) - 1)$;
2) $(a + b + c)(a - (b + c))$;
3) $(m + n + 2p)(m + n - 2p)$;
4) $(x - y - 2)(x + y + 2)$.

Вправи для повторення

34.29. Обчисліть значення виразу

$$2,7 \cdot \left(8\frac{7}{12} - 2\frac{17}{36}\right) - 4\frac{1}{3} : 0,65.$$

34.30. Щоб заасфальтувати деяку ділянку дороги за певний час, бригада шляховиків мала асфальтувати по 15 м^2 щогодини. Натомість щогодини вони асфальтували на 3 м^2 більше, тому за 2 год до закінчення терміну їм залишилося заасфальтувати 12 м^2. Якою була площа ділянки та скільки годин її мали асфальтувати?

Життєва математика

34.31. Коли українці обчислюють «індекс борщу», тобто ціну набору продуктів для приготування 5 л класичної української страви, то роблять це за одним з численних рецептів (див. мал.). Так, у 2019 році такий набір коштував у середньому 74,4 грн, при цьому мінімальна зарплата в Україні становила 4173 грн. У 2023 році згаданий набір коштував у середньому 99,2 грн, при цьому мінімальна зарплата в Україні становила 6700 грн. Скільки каструль борщу можна було зварити на мінімальну зарплату в 2023 році? Зробіть висновки.

На 5 літрів борщу:

300 г свинини
500 г картоплі
500 г буряка
200 г моркви
300 г капусти
200 г цибулі
90 г томатної пасти
30 г олії
200 г сметани

Цікаві задачі – поміркуй одначе

34.32. Нехай a_1, a_2, a_3 – натуральні числа, b_1, b_2, b_3 – ці самі числа, записані в іншому порядку. Доведіть, що добуток $|a_1 - b_1| \cdot |a_2 - b_2| \cdot |a_3 - b_3|$ є парним числом.

§ 35. Розкладання на множники різниці квадратів двох виразів

Формула різниці квадратів

У тотожності $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ поміняємо місцями ліву і праву частини. Матимемо:

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).}$$

Цю тотожність називають ***формулою різниці квадратів*** двох виразів та читають так:

різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів на їх суму.

Формулу різниці квадратів двох виразів застосовують для розкладання на множники двочлена $a^2 - b^2$. Цю формулу можна використовувати і для розкладання на множники різниці квадратів будь-яких двох виразів.

Приклад 1. Розкласти на множники:
1) $16 - x^2$; 2) $49m^4 - 64p^6$.
Розв'язання. 1) Оскільки $16 = 4^2$, то за формулою різниці квадратів: $16 - x^2 = 4^2 - x^2 = (4 - x)(4 + x)$.
2) Оскільки $49m^4 = (7m^2)^2$, а $64p^6 = (8p^3)^2$, маємо:
$49m^4 - 64p^6 = (7m^2)^2 - (8p^3)^2 = (7m^2 - 8p^3)(7m^2 + 8p^3)$.
Відповідь: 1) $(4 - x)(4 + x)$; 2) $(7m^2 - 8p^3)(7m^2 + 8p^3)$.

Приклад 2. Розкласти на множники $25x^2 - (1 - 2x)^2$.
Розв'язання. $25x^2 - (1 - 2x)^2 = (5x)^2 - (1 - 2x)^2 = (5x - (1 - 2x)) \times$ $\times (5x + (1 - 2x)) = (5x - 1 + 2x)(5x + 1 - 2x) = (7x - 1)(3x + 1)$.
Відповідь: $(7x - 1)(3x + 1)$.

Обчислення значень виразів за допомогою формули різниці квадратів

Приклад 3. Обчислити вираз $105^2 - 95^2$ зручним способом.
Розв'язання.
$$105^2 - 95^2 = (105 - 95)(105 + 95) = 10 \cdot 200 = 2000.$$
Відповідь: 2000.

Розв'язування рівнянь з використанням формули різниці квадратів

Приклад 4. Розв'язати рівняння $x^2 - 25 = 0$.
Розв'язання. Оскільки $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$, маємо:
$$x^2 - 25 = 0;$$
$$(x - 5)(x + 5) = 0;$$
$$x - 5 = 0 \text{ або } x + 5 = 0;$$
$$\text{отже, } x = 5 \text{ або } x = -5.$$
Відповідь: -5; 5.

? Прочитайте і запам'ятайте формулу різниці квадратів двох виразів.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

35.1. (*Усно.*) Які з рівностей є тотожностями:
1) $c^2 - d^2 = (c - d)(c - d)$; 2) $p^2 - t^2 = (p + t)(p - t)$;
3) $a^2 + b^2 = (a + b)(a + b)$; 4) $3^2 - b^2 = (3 - b)(3 + b)$?

35.2. Доберіть замість пропусків такий двочлен, щоб рівність перетворилася на тотожність:

1) $a^2 - 1 = (a - 1)(...)$; 2) $4 - m^2 = (...)(2 + m)$.

35.3. Доберіть замість пропусків такий вираз, щоб рівність перетворилася на тотожність:

1) $p^2 - 1 = (...)(p + 1)$; 2) $9 - c^2 = (3 - c)(...)$.

2

35.4. (*Усно.*) Розкладіть на множники:

1) $a^2 - 4$; 2) $36 - b^2$;
3) $4x^2 - 25m^2$; 4) $x^2y^2 - 1$.

35.5. Подайте многочлен у вигляді добутку різниці та суми:

1) $a^2 - 25$; 2) $16 - p^2$; 3) $d^2 - 1{,}44$;
4) $0{,}09 - m^2$; 5) $b^2 - \frac{4}{9}$; 6) $\frac{25}{36} - c^2$.

35.6. Розкладіть на множники:

1) $36a^2 - b^2$; 2) $-a^2 + b^2$; 3) $49x^2 - 64$;
4) $9m^2 - 16n^2$; 5) $-100m^2 + 121k^2$; 6) $0{,}25 - a^2b^2$;
7) $16m^2a^2 - 0{,}01$; 8) $p^2 - c^2d^2$; 9) $81p^2m^2 - n^2$.

35.7. Подайте многочлен у вигляді добутку різниці та суми:

1) $a^2 - 64$; 2) $0{,}25 - b^2$; 3) $-81 + 36x^2$;
4) $169p^2 - q^2$; 5) $400a^2 - 25m^2$; 6) $49a^2b^2 - 16$;
7) $900 - a^2b^2$; 8) $c^2d^2 - 4m^2$; 9) $100a^2b^2 - 0{,}16m^2$.

35.8. Обчисліть, застосовуючи формулу різниці квадратів:

1) $67^2 - 57^2$; 2) $43^2 - 53^2$; 3) $112^2 - 88^2$;
4) $21{,}5^2 - 21{,}4^2$; 5) $0{,}725^2 - 0{,}275^2$; 6) $\left(5\frac{2}{3}\right)^2 - \left(4\frac{1}{3}\right)^2$.

35.9. Обчисліть зручним способом:

1) $43^2 - 33^2$; 2) $27^2 - 37^2$; 3) $0{,}97^2 - 0{,}03^2$.

35.10. Знайдіть значення виразу $x^2 - y^2$, якщо

1) $x = 55$, $y = 45$; 2) $x = 2{,}01$, $y = 1{,}99$.

35.11. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 16 = 0$; 2) $\frac{1}{9} - x^2 = 0$;
3) $y^2 - 0{,}25 = 0$; 4) $4x^2 - 9 = 0$.

35.12. Знайдіть корені рівняння:

1) $x^2 - 36 = 0$; 2) $y^2 - \frac{1}{16} = 0$;
3) $0{,}49 - x^2 = 0$; 4) $64y^2 - 49 = 0$.

3

35.13. Розкладіть на множники:

1) $c^4 - m^6$; 2) $p^8 - a^{10}$; 3) $a^6 - 9m^4$;
4) $100a^6 - 25x^8$; 5) $0{,}49 - m^4p^{12}$; 6) $36x^2c^{14} - 0{,}16d^4$;
7) $\frac{25}{49}a^8 - \frac{36}{49}b^6c^2$; 8) $-0{,}01m^2 + 0{,}81x^6y^8$;
9) $1\frac{7}{9}t^{20}a^{24} - 1\frac{11}{25}p^{16}q^{18}$.

35.14. Розкладіть на множники:

1) $a^8 - 16m^6$; 2) $36c^6 - 49a^{10}$;
3) $0{,}25 - m^{12}a^2$; 4) $-121p^8c^4 + 4a^2$;
5) $-\frac{25}{36}a^2b^4 + \frac{36}{49}c^6$; 6) $2\frac{1}{4}a^2b^8 - 1\frac{9}{16}p^6c^{18}$.

35.15. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{100}{15^2 - 10^2}$; 2) $\frac{29^2 - 21^2}{80}$; 3) $\frac{47^2 - 23^2}{48^2 - 22^2}$.

35.16. Подайте вираз у вигляді добутку:

1) $(x + 2)^2 - 1$; 2) $4 - (y + 3)^2$;
3) $(4m - 5)^2 - 16$; 4) $6{,}25 - (a - 3{,}5)^2$;
5) $(2x - 5)^2 - 49$; 6) $1 - (2x + 1)^2$.

35.17. Розкладіть на множники:

1) $16x^2 - (1 + 3x)^2$; 2) $(3y - 5)^2 - 16y^2$;
3) $49m^2 - (a + 3m)^2$; 4) $(5a - 2b)^2 - 25a^2$.

35.18. Розкладіть на множники:

1) $(p + 2)^2 - 9$; 2) $16 - (m - 3)^2$;
3) $(3x - 2)^2 - 36$; 4) $x^2 - (2x - 1)^2$;
5) $(5a - 3b)^2 - 9b^2$; 6) $(3x + 4y)^2 - 100y^2$.

35.19. Знайдіть корені рівняння:

1) $(x - 1)^2 - 25 = 0$; 2) $49 - (2x + 5)^2 = 0$;
3) $(5x + 3)^2 = 64$; 4) $(0{,}1x - 0{,}5)^2 = 0{,}36$.

35.20. Розв’яжіть рівняння:

1) $(x + 2)^2 - 36 = 0$; 2) $(5x - 4)^2 - 81 = 0$;
3) $(2x + 7)^2 = 49$; 4) $(0{,}2x - 0{,}5)^2 = 0{,}09$.

35.21. Доведіть, що для будь-якого натурального значення n значення виразу $(n + 7)^2 - n^2$ ділиться на 7.

4

35.22. Подайте вираз у вигляді добутку:

1) $a^6 - (b - 5a^3)^2$; 2) $(-3m^2 + 4p)^2 - 9m^4$;
3) $(7x + 2y)^2 - (2x - 7y)^2$; 4) $(a + b + c)^2 - (a + b - c)^2$;
5) $a^2(a + 1)^2 - c^8$; 6) $(5a - b - 1)^2 - (5a + b - 1)^2$.

35.23. Розкладіть на множники:

1) $(5a^2 - 3b)^2 - 16a^4$; 2) $m^8 - (3c - 2m^4)^2$;

3) $(2a + 3b)^2 - (4a - 5b)^2$; 4) $(x - y + t)^2 - (x - y - t)^2$.

35.24. Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x - 4)^2 - (5x - 8)^2 = 0$; 2) $x^4 - 81 = 0$;

3) $16x^4 - 1 = 0$; 4) $81x^2 + 4 = 0$.

35.25. Доведіть, що різниця квадратів двох послідовних цілих чисел, де зменшуваним є більше число, дорівнює сумі цих чисел.

Вправи для повторення

35.26. Спростіть вираз:

1) $(t + 1)(t - 7) - (t - 1)(t + 7)$;

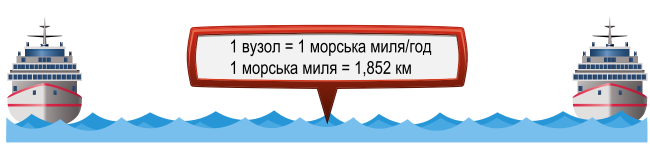
2) $(a^3 - 2b)(a^2 + 2b) - (a^2 - 2b)(a^3 + 2b)$.

35.27. Обчисліть, використовуючи формулу куба двочлена:

1) $(100 - 1)^3$; 2) 41^3; 3) 29^3; 4) $0{,}99^3$.

Життєва математика

35.28. Корабель пливе зі швидкістю 11 вузлів. Велосипедист долає 100 м за 18 с. Порівняйте швидкості корабля і велосипедиста. Зверніть увагу на малюнок.



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

35.29. Подайте у вигляді куба число:

1) 1; 2) 27; 3) 64; 4) 216.

35.30. Подайте у вигляді куба одночлен:

1) x^6; 2) $8y^3$; 3) $1000m^{12}$; 4) $125p^3c^9$.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

35.31. Господиня має важільні терези й гирку масою 100 г. Як їй за допомогою чотирьох зважувань відміряти 1,5 кг крупи?

§ 36. Сума і різниця кубів

Формула суми кубів

Помножимо $a + b$ на $a^2 - ab + b^2$:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - \underline{a^2b} + \underline{\underline{ab^2}} + \underline{ba^2} - \underline{\underline{ab^2}} + b^3 = a^3 + b^3.$$

Маємо тотожність, яку називають ***формулою суми кубів***:

$$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).}$$

У правій частині формули множник $a^2 - ab + b^2$ нагадує повний квадрат $a^2 - 2ab + b^2$, але замість подвоєного добутку $2ab$ містить ab. Тричлен $a^2 - ab + b^2$ називають ***неповним квадратом різниці*** виразів a і b. Тому формулу суми кубів читають так:

сума кубів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів на неповний квадрат їх різниці.

Приклад 1. Розкласти многочлен $x^3 + 64$ на множники.

Розв'язання. Оскільки $64 = 4^3$, то цей многочлен можна подати у вигляді суми кубів двох виразів:

$$x^3 + 64 = x^3 + 4^3.$$

За формулою суми кубів маємо:

$$x^3 + 4^3 = (x + 4)(x^2 - 4x + 4^2) = (x + 4)(x^2 - 4x + 16).$$

Відповідь: $(x + 4)(x^2 - 4x + 16)$.

Формула різниці кубів

Тепер помножимо $a - b$ на $a^2 + ab + b^2$:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + \underline{a^2b} + \underline{\underline{ab^2}} - \underline{ba^2} - \underline{\underline{ab^2}} - b^3 = a^3 - b^3.$$

Маємо тотожність, яку називають ***формулою різниці кубів***:

$$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).}$$

Тричлен $a^2 + ab + b^2$ називають ***неповним квадратом суми*** виразів a і b, а формулу різниці кубів читають так:

різниця кубів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів на неповний квадрат їх суми.

Приклад 2. Розкласти многочлен $27a^3 - m^6$ на множники.

Розв'язання. Оскільки $27a^3 = (3a)^3$ і $m^6 = (m^2)^3$, то цей многочлен можна перетворити на різницю кубів:

$$27a^3 - m^6 = (3a)^3 - (m^2)^3.$$

Далі застосуємо формулу різниці кубів:

$(3a)^3 - (m^2)^3 = (3a - m^2)((3a)^2 + 3am^2 + (m^2)^2) =$

$= (3a - m^2)(9a^2 + 3am^2 + m^4).$

Відповідь: $(3a - m^2)(9a^2 + 3am^2 + m^4)$.

Приклад 3. Подати вираз $(p - 2)^3 - 1$ у вигляді добутку.

Розв'язання. $(p - 2)^3 - 1 = (p - 2)^3 - 1^3 =$

$= (p - 2 - 1)((p - 2)^2 + (p - 2) \cdot 1 + 1^2) =$

$= (p - 3)(p^2 - 4p + 4 + p - 2 + 1) = (p - 3)(p^2 - 3p + 3).$

Відповідь: $(p - 3)(p^2 - 3p + 3)$.

Множення суми двох виразів на неповний квадрат їх різниці та різниці двох виразів на неповний квадрат їх суми

Помінявши місцями ліві та праві частини формул суми і різниці кубів, матимемо:

$$\mathbf{(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3,}$$
$$\mathbf{(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.}$$

Ці тотожності є формулами скороченого множення і дають змогу скорочено виконувати множення суми двох виразів на неповний квадрат їх різниці та різниці двох виразів на неповний квадрат їх суми.

Добуток суми двох виразів на неповний квадрат їх різниці дорівнює сумі кубів цих виразів.

Добуток різниці двох виразів на неповний квадрат їх суми дорівнює різниці кубів цих виразів.

Приклад 4. Перетворити вираз $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$ на многочлен.

Розв'язання. Оскільки вираз $x^2 - 2xy + 4y^2$ є неповним квадратом різниці виразів x і $2y$, то можемо застосувати формулу суми кубів:

$$(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = x^3 + (2y)^3 = x^3 + 8y^3.$$

Відповідь: $x^3 + 8y^3$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$(5x - 1)(25x^2 + 5x + 1) = 125x^3 - 8x.$$

Розв'язання. Застосуємо до лівої частини рівняння формулу різниці кубів, одержимо: $(5x)^3 - 1^3 = 125x^3 - 8x;$

$$125x^3 - 1 = 125x^3 - 8x;$$
$$125x^3 - 125x^3 + 8x = 1;$$
$$8x = 1;$$
$$x = 0{,}125.$$

Відповідь: 0,125.

Запам'ятайте формулу суми кубів. ○ Запам'ятайте формулу різниці кубів. ○ Якому виразу тотожно дорівнює добуток суми двох виразів на неповний квадрат їх різниці? А добуток різниці двох виразів на неповний квадрат їх суми?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

36.1. (*Усно.*) Який з виразів є неповним квадратом різниці виразів x і y, а який – неповним квадратом їх суми:

1) $x^2 + xy + y^2$; 2) $x^2 - 2xy + y^2$; 3) $x^2 - xy - y^2$;
4) $x^2 + 2xy + y^2$; 5) $x^2 - xy + y^2$; 6) $x^2 + 4xy + y^2$?

36.2. (*Усно.*) Які з рівностей є тотожностями:

1) $c^3 + d^3 = (c^2 + d^2)(c + d)$;
2) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$;
3) $m^3 + n^3 = (m + n)(m^2 - mn + n^2)$;
4) $p^3 - t^3 = (p - t)(p^2 + 2pt + t^2)$?

36.3. Серед рівностей виберіть ті, що є тотожностями:

1) $m^3 - p^3 = (m^2 - p^2)(m - p)$;
2) $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - xa + a^2)$;
3) $c^3 - d^3 = (c - d)(c^2 + cd + d^2)$;
4) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - 2xy + y^2)$.

2

36.4. Розкладіть на множники:

1) $m^3 - p^3$; 2) $a^3 + d^3$; 3) $8 - a^3$;
4) $q^3 + 27$; 5) $n^3 - 64$; 6) $0{,}001 + t^3$.

36.5. Подайте вираз у вигляді суми або різниці кубів і розкладіть його на множники:

1) $8a^3 + 1$; 2) $27 - \frac{1}{27}c^3$; 3) $y^3 + 64x^3$;
4) $0{,}125b^3 - 64y^3$; 5) $1 + 1000m^3$; 6) $\frac{1}{125}a^3 - \frac{1}{216}b^3$.

36.6. Розкладіть на множники:

1) $\frac{1}{27}+b^3$; 2) $\frac{1}{8}x^3-8$; 3) $1+125p^3$;

4) $0{,}064m^3-\frac{1}{1000}n^3$; 5) $\frac{27}{8}a^3+\frac{8}{27}b^3$; 6) $216p^3-\frac{1}{216}q^3$.

36.7. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$; 2) $(a+3)(a^2-3a+9)$;
3) $(1-d+d^2)(1+d)$; 4) $(m-2)(m^2+2m+4)$.

36.8. Перетворіть вираз на многочлен:

1) $(m+n)(m^2-mn+n^2)$; 2) $(m-1)(m^2+m+1)$;
3) $(b+4)(b^2-4b+16)$; 4) $(25+5q+q^2)(5-q)$.

36.9. Знайдіть значення виразу:

1) $(4p-1)(16p^2+4p+1)$, якщо $p=-0{,}25$;

2) $(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$, якщо $a=-\frac{1}{2}$, $b=2$.

36.10. Знайдіть значення виразу:

1) $(3x+1)(9x^2-3x+1)$, якщо $x=\frac{2}{3}$;

2) $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$, якщо $x=-2$, $y=0{,}5$.

3

36.11. Розкладіть многочлен на множники:

1) a^3-b^6; 2) $t^{12}+c^9$; 3) $p^{18}+m^{24}$;

4) $-c^3+m^{15}$; 5) $-\frac{1}{8}-a^{24}$; 6) $-c^{99}-d^{60}$;

7) x^3y^3+1; 8) $27-a^3b^9$; 9) $x^6y^{12}+m^{27}$;

10) $64m^6p^{21}-125x^3$; 11) $\frac{1}{27}c^{24}m^{18}+27t^9$;

12) $343a^{18}b^{33}-0{,}001c^{36}$.

36.12. Запишіть вираз у вигляді добутку:

1) x^9-y^6; 2) $-p^{12}-27$;
3) $-a^9b^6+1$; 4) $216p^{15}+0{,}008t^{18}$;
5) $64m^{21}c^3-p^{30}$; 6) $512t^{24}p^{27}-729a^{33}$.

36.13. Виконайте множення:

1) $(b^3-d^2)(b^6+b^3d^2+d^4)$;
2) $(c^3+2p)(c^6-2pc^3+4p^2)$;
3) $(9x^2+3xy+y^2)(3x-y)$;
4) $(4c+3d)(16c^2-12cd+9d^2)$;
5) $(a^8-4a^4+16)(a^4+4)$;
6) $(5m^2-6p^3)(25m^4+30m^2p^3+36p^6)$.

36.14. Подайте у вигляді многочлена:
1) $(a^5 - m^2)(a^{10} + a^5m^2 + m^4)$;
2) $(25a^2 - 5ab + b^2)(5a + b)$;
3) $(2x - 7y^2)(4x^2 + 14xy^2 + 49y^4)$;
4) $(3p^2 + 4c^3)(9p^4 - 12p^2c^3 + 16c^6)$.

36.15. Виконайте дії:
1) $(a + 2)(a^2 - 2a + 4) - a(a^2 - 5)$;
2) $(b - 3)(b^2 + 3b + 9) - b(b - 3)(b + 3)$;
3) $(x + 4)(x^2 - 4x + 16) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$;
4) $(2b^2 - 1)(4b^4 + 2b^2 + 1) - (2b^3 + 1)^2$.

36.16. Спростіть вираз:
1) $(a - 4)(a^2 + 4a + 16) - a(a - 2)(a + 2)$;
2) $(x^2 + 3)(x^4 - 3x^2 + 9) - (x^2 - 2)(x^4 + 2x^2 + 4)$;
3) $b(b - 1)^2 - (b - 5)(b^2 + 5b + 25)$;
4) $(a - 1)(a^2 + a + 1)(a + 1)(a^2 - a + 1)$.

36.17. Знайдіть значення виразу:
1) $(2a + 1)(4a^2 - 2a + 1) - 7a^3$, якщо $a = -2$;
2) $(x^2 + 5xy + 25y^2)(x - 5y) + 25y^3 - x^3$, якщо $x = -2024$, $y = 0{,}1$.

36.18. Розв'яжіть рівняння:
1) $(x - 4)(x^2 + 4x + 16) = x^3 - 8x$;
2) $(x^3 + 1)(x^6 - x^3 + 1) = x^9 - 5x$;
3) $(9x^2 - 6x + 4)(3x + 2) = 3x(3x + 4)(3x - 4) + 32$;
4) $8\left(\frac{1}{2}x - 2\right)\left(\frac{1}{4}x^2 + x + 4\right) - x(x - 3)^2 = 6x^2 - 46$.

36.19. Розв'яжіть рівняння:
1) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 24x + x^3$;
2) $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) = 2x(2x - 3)(2x + 3) + 37$.

4

36.20. Розкладіть на множники:
1) $(a + 3)^3 - a^3$;
2) $(x - 4)^3 + 8$;
3) $27p^3 - (p + 1)^3$;
4) $64x^3 + (x - 1)^3$.

36.21. Розкладіть на множники:
1) $(a + 1)^3 + a^3$;
2) $(b - 2)^3 - 8$;
3) $125b^3 - (b - 1)^3$;
4) $64a^3 + (a + 2)^3$.

36.22. Доведіть, що дві останні цифри значення виразу $415^3 + 85^3$ є нулями.

36.23. Чи ділиться число $115^3 - 15^3$ на 100?

36.24. Обчисліть значення виразу $\dfrac{57^3 - 43^3}{14} + 57 \cdot 43$ зручним способом.

Вправи для повторення

36.25. Доведіть, що різниця натурального трицифрового числа і числа, записаного тими самими цифрами у зворотному порядку, ділиться на 11.

36.26. У першій упаковці було 90 зошитів, а у другій – 30. Коли з першої взяли вдвічі більше зошитів, ніж з другої, то в першій упаковці залишилося в 5 разів більше зошитів, ніж у другій. По скільки зошитів залишилося в кожній упаковці?

Життєва математика

36.27. У Марини Олегівни є дисконтна картка книгарні «Олімп», за умовами якої покупцю надається знижка в розмірі 12 % від вартості покупки. Скільки Марина Олегівна заплатить за книжку вартістю 150 грн, якщо використає дисконтну картку?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

36.28. Розкладіть на множники многочлен:

1) $a^3 + a^2$; 2) $3c^5 - 15c^2$; 3) $x^2 + 6x + 9$;

4) $9x^2 - 6x + 1$; 5) $0,81 - y^2$; 6) $0,25a^2 - \dfrac{9}{16}b^2$.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

36.29. *З українського фольклору.* Жінка на базарі курей продавала. Першому покупцю вона продала половину всіх курей і ще пів курки. Другому – половину з того, що залишилося, та ще пів курки. Третьому – половину того, що залишилося, та ще пів курки. Після цього з'ясувалося, що всіх курей продано, і задоволена жінка повернулася додому. Скільки курей вона винесла на продаж?

§ 37. Застосування кількох способів розкладання многочленів на множники

Приклади розкладання многочленів на множники із застосуванням двох послідовних способів

У попередніх параграфах ми вже розглядали кілька способів розкладання многочленів на множники: винесення спільного множника за дужки, групування, застосування формул скороченого множення.

Іноді для розкладання на множники доводиться застосовувати кілька способів. Тоді розкладання доцільно починати з винесення спільного множника за дужки, якщо такий множник існує.

Розглянемо кілька прикладів.

Приклад 1. Розкласти на множники многочлен

$$5m^4 - 20m^2n^2.$$

Розв'язання. Спочатку винесемо за дужки спільний множник $5m^2$. Маємо $5m^4 - 20m^2n^2 = 5m^2(m^2 - 4n^2)$.

Тепер до виразу в дужках застосуємо формулу різниці квадратів: $5m^2(m^2 - 4n^2) = 5m^2(m - 2n)(m + 2n)$.

Відповідь: $5m^2(m - 2n)(m + 2n)$.

Приклад 2. Розкласти на множники многочлен

$$2x^4 + 12x^3 + 18x^2.$$

Розв'язання. Винесемо за дужки спільний множник $2x^2$, а вираз у дужках згорнемо в повний квадрат:

$$2x^4 + 12x^3 + 18x^2 = 2x^2(x^2 + 6x + 9) = 2x^2(x + 3)^2.$$

Відповідь: $2x^2(x + 3)^2$.

Приклад 3. Розкласти на множники многочлен

$$a^3b^2 - 3a^3b + 5a^2b^2 - 15a^2b.$$

Розв'язання. Винесемо за дужки спільний множник a^2b, матимемо:

$$a^3b^2 - 3a^3b + 5a^2b^2 - 15a^2b = a^2b(ab - 3a + 5b - 15).$$

Многочлен $ab - 3a + 5b - 15$, що утворився в дужках, можна розкласти на множники способом групування:

$ab - 3a + 5b - 15 = (ab - 3a) + (5b - 15) = a\underline{(b - 3)} + 5\underline{(b - 3)} =$
$= (b - 3)(a + 5)$.

Остаточно маємо:

$a^3b^2 - 3a^3b + 5a^2b^2 - 15a^2b = a^2b(b - 3)(a + 5)$.

Відповідь: $a^2b(b - 3)(a + 5)$.

Універсального правила для розкладання многочленів на множники немає. Приклади, які ми розглянули вище, дають змогу лише сформулювати *правило-орієнтир*, якого бажано дотримуватися для розкладання многочленів на множники.

1) Якщо можливо, винести спільний множник за дужки.
2) Перевірити, чи не є вираз, отриманий у дужках, квадратом двочлена або різницею квадратів, різницею чи сумою кубів.
3) Якщо многочлен, отриманий у дужках, містить чотири або шість доданків, перевірити, чи не розкладається він на множники способом групування.

Штучні прийоми розкладання многочленів на множники

Окрім запропонованого правила, інколи допомагають штучні прийоми. Розглянемо їх на прикладах.

Приклад 4. Розкласти на множники многочлен

$$a^2 - 4a + 4 - b^2.$$

Розв'язання. Оскільки перші три доданки є квадратом двочлена, застосуємо штучне групування, розбивши многочлен на дві групи, перша з яких є квадратом двочлена, а до другої віднесемо четвертий доданок. Тоді цей многочлен перетвориться на різницю квадратів двох виразів:

$$a^2 - 4a + 4 - b^2 = (a - 2)^2 - b^2 = (a - 2 - b)(a - 2 + b).$$

Відповідь: $(a - 2 - b)(a - 2 + b)$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $x^2 + 8x - 20 = 0$.

Розв'язання. Знайдемо таке число, яке разом з виразом $x^2 + 8x$ утворює квадрат двочлена. Це число 16. Тому в лівій частині рівняння додамо і віднімемо число 16. Одержимо:

$x^2 + 8x + 16 - 16 - 20 = 0;$

$(x^2 + 8x + 16) - 36 = 0;$

$(x + 4)^2 - 6^2 = 0.$

Далі розкладемо ліву частину рівняння на множники за формулою різниці квадратів і розв'яжемо одержане рівняння:

$(x + 4 - 6)(x + 4 + 6) = 0;$

$(x - 2)(x + 10) = 0;$

$x - 2 = 0$ або $x + 10 = 0;$

$x = 2$ або $x = -10.$

Відповідь: -10; 2.

Перетворення $x^2 + 8x - 20 = x^2 + 8x + 16 - 16 - 20 = (x + 4)^2 - 36$ називають *виділенням квадрата двочлена*.

Про розкладання многочленів на множники

Не кожний многочлен другого степеня, а тим паче — вищих за другий степінь, можна розкласти на множники. Наприклад, не можна розкласти на множники многочлени $x^2 + 4$, $x^2 + y^2 + 1$, $x^2 + x + 2$ тощо. Зокрема, не розкладаються на множники многочлени другого степеня, які є неповними квадратами суми або різниці та не містять спільного множника. Наприклад, $m^2 + m + 1$, $p^2 - 3p + 9$, $4x^2 + 2x + 1$ тощо.

Які способи розкладання многочленів на множники ви знаєте? ○ У чому полягає правило-орієнтир для розкладання многочленів на множники? ○ Чи кожний многочлен можна розкласти на множники? ○ Наведіть приклади многочленів, які не можна розкласти на множники.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

37.1. (*Усно.*) З формул виберіть ті, що є тотожностями:
1) $(a + b)^2 = a^2 + ab + b^2$;
2) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
3) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
4) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
5) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + 2ab + b^2)$;
6) $a^2 - b^2 = (a - b)^2$.

37.2. Які з формул є тотожностями:
1) $(m - n)^2 = m^2 - mn + n^2$;
2) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - 2xy + y^2)$;
3) $p^2 - q^2 = (p - q)(p + q)$;
4) $(c + d)^2 = c^2 + 2cd + d^2$;
5) $m^3 - n^3 = (m - n)(m^2 + mn + n^2)$;
6) $a^2 - b^2 = (a + b)(a + b)$?

37.3. Закінчіть розкладання на множники:
1) $xa^2 - 9x = x(a^2 - 9) = x(a^2 - 3^2) = \ldots$;
2) $bm^2 - 2mb + b = b(m^2 - 2m + 1) = \ldots$.

2

37.4. (*Усно.*) Розкладіть на множники:
1) $ax^2 - ay^2$; 2) $mp^2 - m$; 3) $b^3 - b$.

37.5. Розкладіть на множники:
1) $5a^2 - 5b^2$; 2) $ap^2 - aq^2$; 3) $2xm^2 - 2xn^2$;
4) $7b^2 - 7$; 5) $16x^2 - 4$; 6) $75 - 27c^2$;
7) $5mk^2 - 20m$; 8) $63ad^2 - 7a$; 9) $125px^2 - 5py^2$.

37.6. Подайте у вигляді добутку:
1) $m^3 - m$; 2) $p^2 - p^4$; 3) $7a - 7a^3$;
4) $9b^5 - 9b^3$; 5) $81c^3 - c^5$; 6) $3a^5 - 300a^7$.

37.7. Розкладіть на множники:
1) $ax^2 - ay^2$; 2) $ma^2 - 4mb^2$; 3) $28 - 7m^2$;
4) $p^5 - p^3$; 5) $b - 4b^3$; 6) $a^5 - a^3c^2$;
7) $15d - 15d^3$; 8) $625b^3 - b^5$; 9) $500a^5 - 45a^3$.

37.8. Розв'яжіть рівняння:
1) $3x^2 - 27 = 0$; 2) $5 - 20x^2 = 0$.

37.9. Знайдіть корені рівняння:
1) $8 - 2x^2 = 0$; 2) $75x^2 - 3 = 0$.

37.10. Розкладіть на множники:
1) $3a^2 + 6ab + 3b^2$; 2) $-2m^2 + 4mn - 2n^2$;
3) $-a^2 - 4a - 4$; 4) $6a^2 + 24ab + 24b^2$;
5) $2am^2 + 4am + 2a$; 6) $8a^4 - 8a^3 + 2a^2$.

37.11. Подайте многочлен у вигляді добутку:
1) $-4a^2 + 8ab - 4b^2$; 2) $-25by^2 - 10by - b$;
3) $a^5 + 6a^4m + 9a^3m^2$; 4) $6by^2 + 36by^3 + 54by^4$.

37.12. Знайдіть значення виразу:
1) $3m^2 - 3n^2$, якщо $m = 41$, $n = 59$;
2) $2x^2 + 4xy + 2y^2$, якщо $x = 29$, $y = -28$.

37.13. Знайдіть значення виразу:
1) $5x^2 - 5y^2$, якщо $x = 49$, $y = 51$;
2) $3a^2 - 6ab + 3b^2$, якщо $a = 102$, $b = 101$.

3

37.14. Подайте у вигляді добутку:
1) $3a^3 - 3b^3$; 2) $7x^3 + 7y^3$; 3) $-pm^3 - pn^3$;
4) $16a^3 - 2$; 5) $125m + m^4$; 6) $a^7 - a^4$.

37.15. Розкладіть на множники:
1) $bx^3 - by^3$; 2) $-2a^3 - 2b^3$; 3) $8a - a^4$.

37.16. Розкладіть на множники:
1) $a^4 - 81$; 2) $16 - c^4$; 3) $x^8 - 1$; 4) $a^4 - b^8$.

37.17. Доведіть тотожність

$$a^8 - b^8 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4).$$

37.18. Розв'яжіть рівняння:
1) $x^3 - x = 0$; 2) $112y - 7y^3 = 0$;
3) $64x^3 + x = 0$; 4) $y^3 + 4y^2 + 4y = 0$.

37.19. Розв'яжіть рівняння:
1) $y - y^3 = 0$; 2) $5x^3 - 180x = 0$;
3) $16y^3 + y = 0$; 4) $x^3 - 2x^2 + x = 0$.

37.20. Розкладіть на множники:
1) $7ab + 21a - 7b - 21$; 2) $6mn + 60 - 30m - 12n$;
3) $-abc - 3ac - 4ab - 12a$; 4) $a^3 - ab - a^2b + a^2$.

37.21. Подайте вираз у вигляді добутку:
1) $90 + 3ab - 45a - 6b$; 2) $-3mn - 9m - 18n - 54$;
3) $a^4x + a^4 + a^3x + a^3$; 4) $p^3a^2 + pa^2 - 3ap^3 - 3ap$.

37.22. Розкладіть на множники:
1) $a^2 + 2ab + b^2 - 16$; 2) $a^2 - x^2 - 2xy - y^2$;
3) $p^2 - x^2 + 10p + 25$; 4) $p^2 - x^2 + 20x - 100$.

37.23. Розкладіть на множники:
1) $x^2 + 2xy + y^2 - 25$; 2) $m^2 - a^2 + 2ab - b^2$;
3) $m^2 - a^2 - 8m + 16$; 4) $m^2 - b^2 - 8b - 16$.

37.24. Подайте вираз у вигляді добутку:
1) $a^2 - 81 + a - 9$; 2) $m^2 - a^2 - (a + m)$;
3) $x^2 - y^2 - x + y$; 4) $x + x^2 - y - y^2$;
5) $a - 3b + a^2 - 9b^2$; 6) $16m^2 - 25n^2 - 4m - 5n$.

37.25. Розкладіть на множники:
1) $a^2 - b^2 - (a - b)$; 2) $p^2 - b - p - b^2$;
3) $16x^2 - 25y^2 + 4x - 5y$; 4) $100m^2 - 10m + 9n - 81n^2$.

37.26. Перетворіть вираз на добуток:
1) $p^2(m - 3) - 2p(m - 3) + (m - 3)$;
2) $1 - a^2 - 4b(1 - a^2) + 4b^2(1 - a^2)$.

37.27. Доведіть тотожність
$$c^2(c - 2) - 10c(c - 2) + 25(c - 2) = (c - 2)(c - 5)^2.$$

37.28. Подайте у вигляді добутку:
1) $ab^2 - b^3 - a + b$; 2) $ax^2 - a^3 + 7x^2 - 7a^2$;
3) $p^3 + p^2q - 4p - 4q$; 4) $a^3 - 5m^2 + 5a^2 - am^2$.

37.29. Розкладіть на множники:
1) $m^3 + n^3 + m + n$; 2) $a - b - (a^3 - b^3)$;
3) $a^3 + 8 - a^2 - 2a$; 4) $8p^3 - 1 - 12p^2 + 6p$.

37.30. Подайте у вигляді добутку:
1) $m^3 + m^2n - m - n$; 2) $ba^2 - 3a^2 - 4b + 12$;
3) $a^3 - b^3 + a - b$; 4) $x^3 + 1 - 5x - 5$.

4

37.31. Розв’яжіть рівняння:
1) $y^3 - 5y^2 - y + 5 = 0$; 2) $x^3 = 2x^2 + 4x - 8$.

37.32. Для якого значення x:
1) значення виразу $x^3 - x^2 - x + 1$ дорівнює нулю;
2) значення виразів $x^3 - 9x$ і $x^2 - 9$ між собою рівні?

37.33. Запишіть у вигляді добутку:

1) $9(a + b)^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$;

2) $25(3y - 2m)^2 - 36(9y^2 + 12my + 4m^2)$.

37.34. Розкладіть на множники:

1) $a^3 + 8b^3 + a^2 - 2ab + 4b^2$;

2) $m^3 - 8n^3 + m^2 - 4mn + 4n^2$.

37.35. Перетворіть многочлен на добуток многочленів:

1) $a^3 - b^3 + a^2 - 2ab + b^2$;

2) $c^2 + 2cd + d^2 - x^2 - 2xy - y^2$.

37.36. Розкладіть тричлен на множники, виділивши попередньо квадрат двочлена:

1) $x^2 - 2x - 3$;

2) $x^2 + 8x - 9$;

3) $x^2 - 3x - 4$;

4) $x^2 + x - 2$.

Розв'язання.

4) $x^2 + x - 2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} =$

$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = (x - 1)(x + 2).$

37.37. Доведіть, що для будь-якого цілого значення n значення виразу $\frac{n^3 - n}{6}$ є числом цілим.

Вправи для повторення

37.38. Спростіть вираз:

1) $x(x + 1)(x + 2) - 3(x - 2)(x + 2) + 2(x - 6)$;

2) $(2x + 3y)(3y - x) - (2x - y)(5x - y) + (2x - 3y)(5x + 2y)$.

37.39. Розв'яжіть рівняння

$$x((x - 2)^2 + 4x) = 64\left(\frac{1}{4}x - 1\right)\left(\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}x + 1\right).$$

37.40. Супермаркет електроніки до річниці свого відкриття вирішив продати 141 планшет і 95 смартфонів зі знижками. Щогодини продавали по 12 акційних планшетів і по 10 акційних смартфонів. Через скільки годин від початку дії знижок акційних планшетів у супермаркеті залишалося втричі більше, ніж акційних смартфонів?

Життєва математика

37.41. Світлана вклала 60 000 грн у цінні папери, придбавши акції фірми «Альфа» на 15 000 грн, акції компанії «Бета» – на 20 000 грн, а на решту – акції фірми «Гама». Через рік акції фірми «Альфа» подорожчали на 20 %, акції компанії «Бета» – на 8 %, а акції фірми «Гама» подешевшали на 10 %. Яким є загальний прибуток чи збиток Світлани за рік?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

37.42. Накресліть трикутники ABC та KLM. Знайдіть суму кутів кожного трикутника.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

37.43. Тарас і Яна живуть в одному під'їзді на одному поверсі і навчаються в одній школі. Тарас пішки витрачає на дорогу до школи 12 хвилин, а Яна – 18 хвилин. Через 3 хвилини після того, як вийшла Яна, до школи вирушив і Тарас. Через який час після свого виходу він наздожене Яну?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 7 (§§ 32–37)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Якому многочлену тотожно дорівнює вираз $(m - n)^2$?

А. $m^2 + 2mn + n^2$ **Б.** $m^2 - n^2$ **В.** $m^2 + n^2$ **Г.** $m^2 - 2mn + n^2$

2. Знайдіть добуток $(a - x)(a + x)$.

А. $a^2 + x^2$ **Б.** $a^2 - x^2$ **В.** $x^2 - a^2$ **Г.** $a^2 + 2xa + x^2$

3. Подайте вираз $x^2 + 2xy + y^2$ у вигляді квадрата двочлена.

А. $(x - y)^2$ **Б.** $(y - x)^2$ **В.** $(2x + y)^2$ **Г.** $(x + y)^2$

2

4. Перетворіть вираз $(5x - 1)^2$ на многочлен.

А. $5x^2 - 10x + 1$ **Б.** $25x^2 + 10x + 1$
В. $25x^2 - 10x + 1$ **Г.** $25x^2 - 1$

5. Розкладіть двочлен $-16 + 9a^2$ на множники.

А. $(3a - 4)(3a - 4)$ **Б.** $(3a + 4)(4 - 3a)$
В. $(3a + 4)(3a - 4)$ **Г.** $(3a - 4)^2$

6. Подайте вираз $m^3 + 64$ у вигляді добутку.

А. $(m + 4)(m^2 - 4m + 16)$ **Б.** $(m + 4)(m^2 - 8m + 16)$
В. $(m - 4)(m^2 + 4m + 16)$ **Г.** $(m + 4)(m^2 - 4m - 16)$

3 **7.** Розв'яжіть рівняння $x(x + 2) - (x - 3)^2 = 7$.

А. -2 **Б.** -1 **В.** 1 **Г.** 2

8. Спростіть вираз $(m^2 + 2p)(m^4 - 2m^2p + 4p^2)$.

А. $m^4 + 8p^3$ **Б.** $m^6 + 8p^3$ **В.** $m^6 - 8p^3$ **Г.** $m^6 + 4p^3$

9. Розкладіть многочлен $3ab - 3b + 6a - 6$ на множники.

А. $(a - 1)(b + 2)$ **Б.** $3(a + 1)(b - 2)$
В. $3(a + 1)(b + 2)$ **Г.** $3(a - 1)(b + 2)$

4 **10.** Якого найменшого значення набуває вираз $x^2 + 4x + 3$?

А. 1 **Б.** 0 **В.** -1 **Г.** -2

11. Розв'яжіть рівняння $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.

А. $-2; -1; 1$ **Б.** $-2; 1$ **В.** $-2; -1$ **Г.** $-1; 1$

12. Розкладіть вираз $(b - 2)^3 - b^3$ на множники.

А. $2(b^2 - 6b + 4)$ **Б.** $-2(b^2 - 6b + 4)$
В. $-2(3b^2 - 6b + 4)$ **Г.** $2(3b^2 - 6b + 4)$

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами.

3 **13.** Установіть відповідність між виразом (1–3) та його значенням (А–Г), якщо $x = 1,4$.

Вираз	*Значення виразу*
1. $25x^2 - 70x + 49$	**А.** -1
2. $(5x - 1)(25x^2 + 5x + 1) - 125x^3$	**Б.** 0
3. $72 - 120x + 50x^2$	**В.** 1
	Г. 2

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 32–37

1 **1.** Перетворіть вираз на многочлен:

1) $(p + a)^2$; 2) $(c - m)(c + m)$.

2. Розкладіть на множники:

1) $t^2 - 2tb + b^2$; 2) $d^2 - n^2$.

3. Які з рівностей є тотожностями:

1) $(p - a)^2 = p^2 - pa + a^2$;
2) $p^3 + q^3 = (p + q)(p^2 - pq + q^2)$;
3) $m^2 - c^2 = (m - c)(m + c)$;
4) $d^3 - t^3 = (d - t)(d^2 + 2dt + t^2)$?

4. Перетворіть вираз на многочлен:
1) $(3a - 5)^2$; 2) $(7 + 2b)(2b - 7)$.

5. Розкладіть многочлен на множники:
1) $a^2 + 6a + 9$; 2) $-25 + 36x^2$;
3) $b^3 + 64$; 4) $7c^2 - 7d^2$.

6. Спростіть вираз $(2x + 3)^2 + (7 - 2x)(7 + 2x)$ і знайдіть його значення, якщо $x = -\frac{1}{12}$.

7. Розв'яжіть рівняння:
1) $2x^3 - 50x = 0$; 2) $x^3 - 10x^2 + 25x = 0$.

8. Спростіть вираз:
1) $(-4a + 3b)^2 + (-4a + 5b)(5b + 4a) + 24ab$;
2) $(a - 2)(a^2 + 2a + 4) - a(a - 3)(a + 3)$.

9. Доведіть, що для будь-якого значення змінної x вираз $x^2 + 8x + 17$ набуває лише додатних значень. Якого найменшого значення набуває цей вираз і для якого значення x?

Додаткові вправи

10. Перетворіть вираз на многочлен:
1) $(a + 3)^3$; 2) $(2m - 5)^3$.

11. Знайдіть дві останні цифри числа $293^3 - 93^3$.

12. Розкладіть тричлен $x^2 + 6x - 7$ на множники.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 7

До § 32

1. Піднесіть двочлен до степеня:
1) $(x - p)^2$; 2) $(m + a)^2$; 3) $(b - k)^2$; 4) $(y + c)^2$.

2. Перетворіть вираз на многочлен:
1) $(3a - 7)^2$; 2) $(2b + 5)^2$; 3) $(10m - 5k)^2$;
4) $(4p + 9q)^2$; 5) $(0{,}1m - 5p)^2$; 6) $\left(\frac{1}{6}a + 6b\right)^2$.

3. Спростіть вираз і знайдіть його значення:
1) $(a - 1)^2 - (a - 2)^2$, якщо $a = 1{,}5$;
2) $(3b + 2)^2 + (3b - 2)^2$, якщо $b = -\frac{1}{3}$.

4. Знайдіть число, квадрат якого після збільшення цього числа на 3 збільшується на 159.

4 **5.** Чи є рівність $(a - b)^2 = |a - b|^2$ тотожністю?

6. Подайте у вигляді многочлена:

1) $((x + y) + a)^2$; 2) $((b - c) - d)^2$;
3) $(m + n + 2)^2$; 4) $(a + 3 - c)(a + 3 - c)$.

До § 33

1 **7.** Подайте у вигляді квадрата двочлена:

1) $m^2 - 2mp + p^2$; 2) $b^2 + 2by + y^2$; 3) $a^2 - 2 \cdot a \cdot 4 + 4^2$.

2 **8.** Розкладіть на множники:

1) $m^2 + 20m + 100$; 2) $49 - 14b + b^2$;
3) $0{,}09x^2 + 0{,}6x + 1$; 4) $\frac{1}{36} - \frac{1}{3}p + p^2$;
5) $4x^2 + 20x + 25$; 6) $4m^2 - 12mp + 9p^2$.

3 **9.** Знайдіть значення виразу:

1) $-100m^2 + 20m - 1$, якщо $m = 0{,}1$; $-0{,}9$;
2) $-4x^2 - 12xy - 9y^2$, якщо $x = 0{,}03$, $y = -0{,}02$.

4 **10.** Розв'яжіть рівняння:

1) $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$; 2) $5y^2 + 2y + \frac{1}{5} = 0$.

11. Змініть один з коефіцієнтів многочлена так, щоб одержаний тричлен можна було подати у вигляді квадрата двочлена (знайдіть три різних розв'язки):

1) $100m^2 + 40mn + n^2$; 2) $25a^2 - ab + 9b^2$.

* **12.** Доведіть, що для будь-яких значень змінних вираз набуває лише невід'ємних значень:

1) $4x(4x - 10) + 25$; 2) $(a - 2)((a - 2) + 2m) + m^2$;
3) $(a + b)(a + b + 8) + 16$.

До § 34

1 **13.** Які з рівностей є тотожностями:

1) $(b - x)(b + x) = b^2 + x^2$; 2) $(c - d)(c + d) = c^2 - d^2$;
3) $(m + n)(m - n) = (m + n)^2$; 4) $(p + q)(p - q) = p^2 - q^2$?

2 **14.** Виконайте множення:

1) $(c + 7)(7 - c)$; 2) $(0{,}5m - 3)(0{,}5m + 3)$;
3) $(3k + 7)(3k - 7)$; 4) $(2p - 9q)(9q + 2p)$;

5) $(10m + 9n)(9n - 10m)$; 6) $\left(\frac{2}{3}c - \frac{4}{5}d\right)\left(\frac{2}{3}c + \frac{4}{5}d\right)$.

15. Подайте у вигляді многочлена:
1) $4(a - 1)(a + 1)$; 2) $b(b - 2)(b + 2)$;
3) $7p(p + 3)(p - 3)$; 4) $-3x(x + 4)(x - 4)$.

3 **16.** Спростіть вираз і знайдіть його значення:
1) $(1{,}9x - 3)(3 + 1{,}9x) + 0{,}39x^2$, якщо $x = 2$;
2) $9{,}99 - (5y - 0{,}1)(5y + 0{,}1)$, якщо $y = \frac{1}{5}$;
3) $(2x - 3y)(2x + 3y) + (3x + 2y)(3x - 2y)$, якщо $x = 1{,}8$, $y = -1{,}8$;
4) $(ab + 1)(ab - 1)(a^2b^2 + 1)$, якщо $a = 5$, $b = \frac{1}{5}$.

4 **17.** Обчисліть вираз $7^{40} \cdot 3^{40} - (21^{20} - 1)(21^{20} + 1)$.

До § 35

1 **18.** Які з рівностей є тотожностями:
1) $m^2 - p^2 = (m + p)(m - p)$; 2) $a^2 - 7^2 = (a - 7)(a + 7)$;
3) $c^2 - d^2 = (c - d)(c + d)$; 4) $9^2 - a^2 = (9 - a)^2$?

2 **19.** Розкладіть на множники двочлен:
1) $x^2 - 49$; 2) $100 - p^2$; 3) $0{,}04m^2 - n^2$;
4) $25x^2 - 36y^2$; 5) $16a^2 - b^2c^2$; 6) $121m^2a^2 - \frac{1}{9}b^2$.

3 **20.** Розв'яжіть рівняння, де x – змінна:
1) $a^2x^2 - b^2 = 0$, $a \neq 0$; 2) $x^2 - 0{,}09a^2 = 0$.

4 **21.** Чи ділиться:
1) $138^2 - 136^2$ на 4; 2) $349^2 - 347^2$ на 6?

22. Розкладіть на множники вираз:
1) $9 - (2x - 8)(3x + 2) - 2x(5x + 10)$;
2) $(3x + 5)(4x - 5) - 2x(2{,}5 + 1{,}5x)$.

До § 36

1 **23.** Який з даних виразів є неповним квадратом суми виразів m і n, а який – неповним квадратом їх різниці:
1) $m^2 - 2mn + n^2$; 2) $m^2 + mn + n^2$;
3) $m^2 + 2mn + n^2$; 4) $m^2 - mn + n^2$?

2 **24.** Розкладіть на множники:

1) $x^3 - y^3$; 2) $p^3 + k^3$; 3) $a^3 - 64$;

4) $\frac{1}{125} + b^3$; 5) $0{,}001m^3 - 1$; 6) $8x^3 + 27p^3$.

3 **25.** Доведіть, що значення виразу $37^3 + 13^3$ ділиться на 50.

4 **26.** Доведіть тотожність

$$x^6 - y^6 = (x - y)(x + y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2).$$

До § 37

1 **27.** Закінчіть розкладання на множники:

1) $ym^2 - 4y = y(m^2 - 4) = y(m^2 - 2^2) = \ldots$;

2) $ca^2 + 2ac + c = c(a^2 + 2a + 1) = \ldots$.

2 **28.** Розкладіть на множники многочлен:

1) $mp^2 - mq^2$; 2) $20a^2 - 5$;

3) $c - c^3$; 4) $64a^2 - a^4$;

5) $5x^2 - 10xy + 5y^2$; 6) $2b + 4bn + 2bn^2$.

3 **29.** Подайте у вигляді добутку:

1) $9a^3 - 9b^3$; 2) $2mn - 2bn + 6m - 6b$;

3) $\frac{1}{81}p^4 - 1$; 4) $m^2 - 4mn + 4n^2 - 25$;

5) $b^2 - 36 + b - 6$; 6) $m^3 - 4m - m^2n + 4n$.

4 **30.** Розкладіть на множники многочлен:

1) $am^4 - m^4 - am^2 + m^2$; 2) $a^3b - a^3 - ab + a$;

3) $b^3 + 1 - b^2 - b$; 4) $x^3 - 27 + x^4 - 9x^2$.

31. Доведіть тотожність:

1) $(a + 1)^3 - 4(a + 1) = (a + 1)(a - 1)(a + 3)$;

2) $(m^2 + 9)^2 - 36m^2 = (m - 3)^2(m + 3)^2$.

Головне в темі 7

ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$
$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$
$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ

КВАДРАТ СУМИ І КВАДРАТ РІЗНИЦІ

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

РІЗНИЦЯ КВАДРАТІВ

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

СУМА І РІЗНИЦЯ КУБІВ

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

А ще раніше...

Про фундаторів математичних олімпіад в Україні

Трохи раніше ви вже ознайомилися з історією математичного олімпіадного руху України, тепер детальніше розкажемо про його фундаторів, які більшу частину свого життя присвятили виявленню, вихованню та навчанню математично обдарованої молоді.

«Він жив і горів безмірною любов'ю до України і до Математики і увесь свій короткий вік працював невпинно й творчо на благо Науки, Освіти рідного народу. Його лекції – це і сила, і безмірна глибочінь, і краса математичної думки». Ці слова про Михайла Пилиповича Кравчука до його 115-річчя написала Ніна Опанасівна Вірченко, український математик, доктор фізико-математичних наук, заслужений працівник освіти України, професор Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут».

М. П. Кравчук (1892–1942)

Народився майбутній учений 27 вересня 1892 р. у с. Човниця на Волині. Навчався в Луцькій гімназії, яку в 1910 році закінчив із золотою медаллю, і вступив на математичне відділення фізико-математичного факультету Університету Св. Володимира (нині Київський національний університет імені Тараса Шевченка). У 1914 році М. Кравчук закінчує навчальний заклад і його залишають при університеті як професорського стипендіата для підготовки до наукової та викладацької роботи. Успішно склавши магістерські іспити в 1917 році, Михайло Кравчук одержує звання приват-доцента. І відтоді вся наукова, педагогічна та громадська діяльність Кравчука пов'язана з Києвом. Він викладає математичні предмети в уперше створених у столиці українських гімназіях, Українському народному університеті. Був учителем Архипа Люльки, винахідника турбоактивного двигуна, та Сергія Корольова, авіаконструктора зі світовим ім'ям. На лекціях Михайла Пилиповича ніколи не було вільного місця, слухати його приходили і біологи, і хіміки, і філософи, і філологи, і робітники…

У 1919 році Кравчук опублікував перший переклад українською мовою підручника «Елементарна геометрія» А. П. Кисельова, який на початку XX ст. отримав схвальну оцінку вчителів/вчительок математики та проіснував понад пів століття аж до перебудови шкільного курсу математики в СРСР. На початку 1920 року Михайла Пилиповича обрано членом комісії математичної термінології при Інституті наукової мови Української академії наук. На кінець того самого року цією комісією під головуванням М. Кравчука було створено тритомний математичний словник. Пильне вивчення праць Михайла Кравчука під мовно-термінологічним кутом зору й нині може прислужитися такій актуальній справі, як подальша розробка та вдосконалення української математичної термінології.

Вільно володіючи кількома мовами (французькою, німецькою, італійською, польською, російською), він писав ними свої наукові праці, але найчастіше – рідною мовою, і ця його мова – гідний зразок українського науково-математичного стилю.

У 1924 році Михайло Пилипович Кравчук блискуче захистив докторську дисертацію. Це був перший в Україні захист докторської дисертації. У 1925 році Михайлові Кравчукові присвоїли звання професора, а в 1929-му його обрали дійсним членом Всеукраїнської академії наук. У віці 37 років він став наймолодшим академіком в Україні. Математичні інтереси Михайла Пилиповича – розмаїті, його наукові праці відзначались оригінальністю ідей, нестандартністю підходів до відомих і нових математичних проблем. Своєрідність і гнучкість мислення, висока продуктивність і працездатність, ерудованість, вимогливість і наукова щедрість, відданість науці М. Кравчука викликали захоплення його учнів і послідовників, коло яких значно розширювалося з року в рік.

Вісім років, з 1929-го по 1937-й, були найпліднішими у творчості та наукових здобутках М. Кравчука. Він одержує низку вагомих результатів у різних розділах математики, зокрема і в теорії многочленів, видає підручники для вищої школи, ініціює проведення першої в Україні шкільної математичної олімпіади, неперервно працює над удосконаленням математичної термінології. Результати своїх досліджень друкує не тільки в наукових виданнях України, а й за кордоном: в Італії, Франції, Німеччині.

Але подальша доля Михайла Пилиповича склалася трагічно. У СРСР почалися сталінські репресії. У 1938 році тяжка година випробовувань настала і для нього. Його заарештовують, інкримінуючи стандартний на той час набір злочинів: український націоналізм, шпигунство, контрреволюційну діяльність. Через це у вересні 1938 р. Михайла Кравчука засудили до 20 років тюремного ув'язнення і 5 років заслання та відправили в тюремні табори на Колиму. Три каторжні зими й літа відбув він там, хворий і пригнічений несправедливістю. А 9 березня 1942 року його не стало. Залишився Михайло Кравчук на віки вічні в колимській мерзлоті поряд з поетом-неокласиком Михайлом Драй-Хмарою, що за кілька літ до нього спочив у тій далекій землі, поряд з тисячами інших закатованих представників інтелігенції. І лише в 1956 році Михайла Пилиповича було реабілітовано.

У 1992 році, після здобуття незалежності, Україна відзначила 100-річчя від дня народження М. П. Кравчука. Його ім’я було занесено в Міжнародний календар ЮНЕСКО визначних наукових діячів. У Національному технічному університеті України «КПІ» (НТУУ «КПІ») періодично проходять міжнародні наукові конференції, присвячені пам’яті академіка Михайла Кравчука, у яких беруть участь учені з усіх областей України, з Литви, Австралії, США, Німеччини, Польщі, Китаю, Японії та інших країн.

Пам'ять про Михайла Пилиповича Кравчука увічнено в назві однієї з київських вулиць, на батьківщині вченого відкрито його музей. У НТУУ «КПІ» засновано стипендію його імені, а на території цього вишу відкрито пам'ятник ученому, на постаменті якого викарбувано його життєве кредо: «Моя любов – Україна і математика».

Історія знає приголомшливі приклади, коли таємниці науки підкорялися юним дослідникам.

М. М. Боголюбов (1909–1993)

Видатного математика і фізика-теоретика Миколу Миколайовича Боголюбова було зараховано до аспірантури, коли йому ще не виповнилося і 15 років. У 17 років за досягнення в математиці йому присвоїли ступінь кандидата наук. Ще через два роки його наукові праці було відзначено нагородою Болонської академії наук (Італія), а в 20 років за визначні досягнення в галузі математики за рішенням Всеукраїнської академії наук йому було присвоєно науковий ступінь доктора фізико-математичних наук без захисту дисертації.

Народився Микола Боголюбов у Нижньому Новгороді, але більшу частину свого життя і наукової діяльності він провів в Україні. Коли Миколі виповнився рік, його родина переїхала до Києва. З юних років Микола самостійно опрацьовує курси вищої математики та фізики, і тринадцятирічному хлопцю з надзвичайними здібностями дозволяють відвідувати лекції в Київському університеті. З великим захопленням юнак вивчає тут математику, фізику, астрономію, бере участь у роботі наукових семінарів. З 1923 року його заняттями з математики керує відомий учений, математик і механік М. М. Крилов (1879–1955). Понад два десятиліття Микола Миколайович Боголюбов керував проведенням учнівських математичних олімпіад у Києві та Україні загалом, був професором Київського і Московського університетів, працював в Академії наук УРСР, у Математичному інституті ім. В. А. Стєклова, Академії наук СРСР, Міжнародному науковому центрі ядерно-фізичних досліджень.

З українськими математичними олімпіадами нерозривно пов'язане ім'я ще однієї неперевершеної особистості – Михайла Йосиповича Ядренка, який щороку до останніх своїх днів очолював журі Всеукраїнської учнівської олімпіади.

М. Й. Ядренко (1932–2004)

Надзвичайно плідним є його життєвий шлях. Народився у с. Дрімайлівка Чернігівської області. За словами самого Михайла Йосиповича, його першими підручниками були буквар і «Кобзар» Шевченка. Навчаючись у школі, він твердо вирішив стати математиком. У березні 1950 р. Михайло почув по радіо оголошення, що в Київському університеті має відбутися математична олімпіада, і, маючи бажання взяти в ній участь, написав до університету листа із запитанням про таку можливість для школярів не з Києва. Через деякий час отримав відповідь із запрошенням узяти в ній участь. Тоді Михайло посів у цих змаганнях 2-ге місце з-поміж учнів 10 класу. Того самого року він закінчив школу із золотою медаллю та вступив до Київського університету на механіко-математичний факультет, а після його закінчення – до аспірантури. Захистив кандидатську і докторську дисертації. Ще будучи аспірантом, він бере активну участь в організації Київських математичних олімпіад і підготовці конкурсних задач. А з 1970 року стає головою журі Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики.

Працювати зі школярами, розшукувати й підтримувати талановиту молодь було покликанням ученого.

Понад 40 років свого життя Михайло Йосипович віддав розвитку шкільної математичної освіти, виданню посібників, зокрема задачників, з математики, титанічній праці з виховання математично здібної молоді. У 2010 році на честь Михайла Йосиповича названо Всеукраїнський турнір юних математиків (ВТЮМ), ще одне не менш популярне за олімпіаду математичне змагання всеукраїнського рівня.

Усе своє життя Ядренко пропрацював у Київському університеті (нині – Київський національний університет імені Тараса Шевченка), понад 30 років завідував кафедрою теорії ймовірностей і математичної статистики механіко-математичного факультету. Під його керівництвом 45 аспірантів захистили дисертації, 10 стали докторами наук. У 1990 році Михайла Йосиповича було обрано членом-кореспондентом Національної академії наук України.

Неможливо перелічити всі громадські обов’язки Михайла Йосиповича. Зокрема, він був віцепрезидентом Українського математичного товариства, членом бюро Відділення математики НАН України, редактором низки наукових журналів.

Плідну наукову, педагогічну, методичну і громадську роботу Михайло Йосипович вів до останнього дня свого життя, яке обірвалося 28 вересня 2004 року.

Його донька Ольга у своїх спогадах про батька зазначала: «Усе своє життя батько присвятив людям, математиці, Україні...».

ТЕМА 8

СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА. ПРЯМОКУТНІ ТРИКУТНИКИ

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **пригадаєте** поняття трикутника і його основних елементів; види трикутників;
- **дізнаєтеся** про нерівність трикутника та співвідношення між сторонами і кутами трикутника; суму кутів трикутника;
- **навчитеся** застосовувати властивості прямокутного трикутника до розв'язування задач.

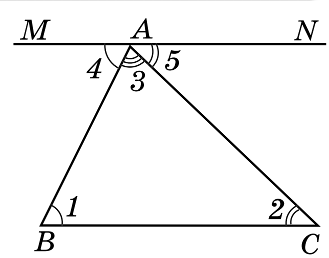
§ 38. Сума кутів трикутника

Розглянемо одну з найважливіших теорем геометрії.

Теорема (про суму кутів трикутника). Сума кутів трикутника дорівнює 180°.

Доведення. Розглянемо трикутник ABC і доведемо, що $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

1) Проведемо через вершину A пряму MN паралельно прямій BC (мал. 38.1). Позначимо $\angle B = \angle 1$, $\angle C = \angle 2$, $\angle BAC = \angle 3$, $\angle MAB = \angle 4$, $\angle NAC = \angle 5$.



Мал. 38.1

Кути 1 і 4 – внутрішні різносторонні кути при перетині паралельних прямих BC і MN січною AB, а кути 2 і 5 – внутрішні різносторонні кути при перетині тих самих прямих січною AC. Тому $\angle 1 = \angle 4$ і $\angle 2 = \angle 5$.

2) $\angle MAN$ – розгорнутий, тому: $\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180°$.

Оскільки $\angle 4 = \angle 1$, $\angle 5 = \angle 2$, то $\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = \angle 3 + \angle 1 + \angle 2 = 180°$, тобто $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, що й потрібно було довести. ■

Наслідок. У будь-якому трикутнику принаймні два кути гострі; трикутник не може мати більше ніж один прямий або тупий кут.

Доведення. Припустимо, що в трикутнику лише один кут є гострим. Тоді сума двох інших кутів, що не є гострими, не менша від 180°. А отже, у сумі з гострим перевищить 180°, що суперечить доведеній теоремі. Прийшли до протиріччя, бо наше припущення є неправильним. Отже, у кожного трикутника принаймні два кути гострі, а тому трикутник не може мати більше ніж один прямий або тупий кут. ■

Враховуючи цей наслідок, можна сказати, що гострокутний трикутник має три гострих кути; прямокутний трикутник має один прямий і два гострих кути; тупокутний трикутник має один тупий і два гострих кути.

Приклад 1. Визначити вид трикутника, якщо два його кути дорівнюють: 1) 40° і 30°; 2) 54° і 36°; 3) 80° і 60°.

Розв'язання. Якщо у трикутнику ABC задано, наприклад, кути A і B, то кут C можна знайти так: $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$. Знайдемо у кожній задачі третій кут, позначивши його $\angle C$, і визначимо вид трикутника.

1) $\angle C = 180° - (40° + 30°) = 110°$; трикутник тупокутний, оскільки має тупий кут.

2) $\angle C = 180° - (54° + 36°) = 90°$; трикутник прямокутний, оскільки має прямий кут.

3) $\angle C = 180° - (80° + 60°) = 40°$; усі кути трикутника гострі, тому трикутник – гострокутний.

Відповідь: 1) тупокутний; 2) прямокутний; 3) гострокутний.

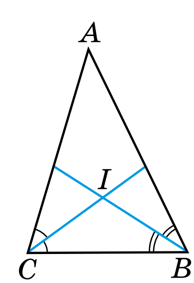
Приклад 2. Бісектриси кутів B і C трикутника ABC перетинаються в точці I. Довести, що $\angle BIC = 90° + \frac{\angle A}{2}$.

Доведення. 1) $\angle ICB = \frac{\angle ACB}{2}$; $\angle IBC = \frac{\angle ABC}{2}$ (мал. 38.2).

2) Тоді $\angle BIC = 180° - (\angle ICB + \angle IBC) =$

$$= 180° - \left(\frac{\angle ACB}{2} + \frac{\angle ABC}{2}\right) = 180° - \frac{\angle ACB + \angle ABC}{2} =$$

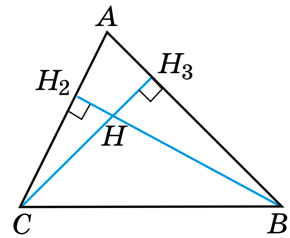
$$= 180° - \frac{180° - \angle A}{2} = 180° - 90° + \frac{\angle A}{2} = 90° + \frac{\angle A}{2}$$



Мал. 38.2

(скористалися тим, що сума кутів кожного з трикутників BCI і ABC дорівнює 180°), що й потрібно було довести. ■

Приклад 3. Висоти BH_2 і CH_3 гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H, $\angle A = \alpha$ (мал. 38.3). Знайти $\angle BHC$.

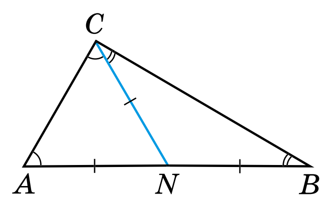


Мал. 38.3

Розв'язання. Розглянемо трикутник H_2BC.
1) $\angle H_2BC = 180° - (90° + \angle ACB) =$
$= 90° - \angle ACB$. У $\triangle H_3CB$:
$\angle H_3CB = 180° - (90° + \angle ABC) =$
$= 90° - \angle ABC$.
2) Тоді у $\triangle HCB$: $\angle BHC = 180° - (\angle HBC + \angle HCB) =$
$= 180° - (90° - \angle ACB + 90° - \angle ABC) = \angle ACB + \angle ABC =$
$= 180° - \angle A = 180° - \alpha$. Отже, $\angle BHC = 180° - \alpha$.
Відповідь: $180° - \alpha$.

Приклад 4. Медіана CN трикутника ABC дорівнює половині сторони AB. Довести, що в трикутнику ABC $\angle C = 90°$.

Доведення (мал. 38.4). 1) Оскільки $CN = \dfrac{AB}{2}$ і N – середина відрізка AB, то $CN = AN = BN$.



Мал. 38.4

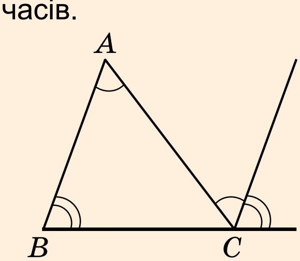
2) Отже, трикутники ANC і CNB – рівнобедрені. Тому $\angle A = \angle ACN$, $\angle B = \angle BCN$. Таким чином, $\angle C = \angle A + \angle B$.
3) Але ж $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. Тому $\angle A + \angle B = 180° - \angle C$. Отже, $\angle C = 180° - \angle C$. Звідки $\angle C = 90°$.
4) $\triangle ABC$ – прямокутний з прямим кутом C, що й потрібно було довести. ■

А ще раніше...

Властивість про суму кутів трикутника експериментальним шляхом було встановлено в Давньому Єгипті, проте відомості про різні способи доведення цієї теореми належать до більш пізніх часів.

Доведення, яке ми розглянули вище, є в коментарях Прокла до «Начал» Евкліда. Він же стверджував, що це доведення було відоме ще учням школи Піфагора (піфагорійцям) у V ст. до н. е.

А сам Евклід у першій книжці «Начал» запропонував доведення теореми про суму кутів трикутника у спосіб, який можна побачити на малюнку 38.5 (виконайте це доведення самостійно).



Мал. 38.5

- Сформулюйте та доведіть теорему про суму кутів трикутника.
- Сформулюйте та доведіть наслідок із цієї теореми.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **38.1.** (*Усно.*) Дано $\triangle PLK$. Знайдіть значення суми $\angle P + \angle L + \angle K$.

38.2. Чи існує трикутник з кутами:
1) 30°, 60° і 70°;
2) 70°, 40° і 70°?

38.3. Чи існує трикутник з кутами:
1) 50°, 70° і 80°;
2) 30°, 60° і 90°?

38.4. Знайдіть третій кут трикутника, якщо два його кути дорівнюють:
1) 43° і 54°;
2) 9° і 93°;
3) 83° і 89°.

38.5. Знайдіть третій кут трикутника, якщо перший і другий кути дорівнюють:
1) 15° і 38°;
2) 28° і 105°;
3) 7° і 91°.

2 **38.6.** (*Усно.*) Закінчіть речення:
1) якщо один з кутів трикутника тупий, то інші... ;
2) якщо один з кутів трикутника прямий, то інші... .

38.7. Сума двох кутів трикутника дорівнює 126°. Знайдіть третій кут трикутника.

38.8. У трикутнику ABC $\angle A + \angle B = 58^\circ$. Знайдіть $\angle C$.

38.9. Один з кутів трикутника дорівнює 62°. Знайдіть суму градусних мір двох інших кутів.

38.10. Доведіть, що кожний з кутів рівностороннього трикутника дорівнює 60°.

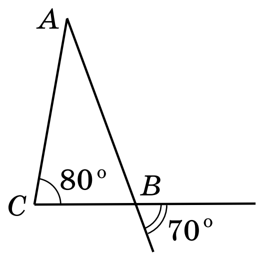
38.11. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 70°. Знайдіть кут при вершині.

38.12. Знайдіть кут при вершині рівнобедреного трикутника, якщо кут при основі дорівнює 45°.

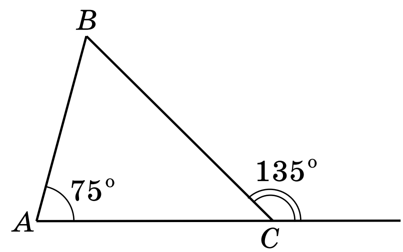
38.13. Знайдіть кути при основі рівнобедреного трикутника, якщо кут при вершині дорівнює 80°.

38.14. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 50°. Знайдіть кути при основі.

38.15. Знайдіть невідомі кути трикутника ABC на малюнках 38.6, 38.7.



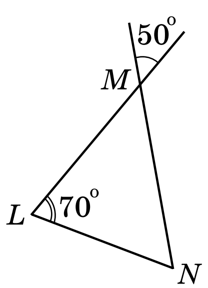
Мал. 38.6



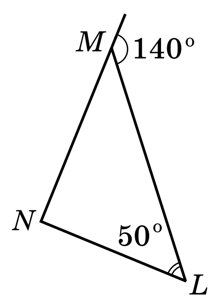
Мал. 38.7

38.16. Знайдіть невідомі кути трикутника MNL на малюнках 38.8, 38.9.

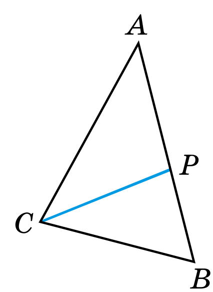
38.17. У трикутнику ABC проведено бісектрису CP (мал. 38.10). Знайдіть $\angle PCB$, якщо $\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$.



Мал. 38.8



Мал. 38.9



Мал. 38.10

38.18. У трикутнику ABC проведено бісектрису CP (мал. 38.10). Знайдіть $\angle A$, якщо $\angle B = 65°$, $\angle ACP = 40°$.

38.19. Знайдіть кути трикутника MNL, якщо $\angle M + \angle N = 120°$, $\angle M + \angle L = 140°$.

38.20. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $\angle A + \angle B = 100°$, $\angle A + \angle C = 130°$.

3

38.21. Доведіть, що в кожному трикутнику є кут, не менший від 60°.

38.22. Доведіть, що в кожному трикутнику є кут, не більший за 60°.

38.23. У трикутнику ABC $\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 4 : 5$. Знайдіть ці кути.

38.24. Знайдіть градусні міри кутів трикутника, якщо вони відносяться як 2 : 3 : 5.

38.25. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при основі на 15° більший за кут при вершині.

38.26. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при вершині на 24° більший за кут при основі.

38.27. Доведіть, що кути при основі рівнобедреного трикутника гострі.

38.28. Якщо один з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 60°, то трикутник – рівносторонній. Доведіть це твердження. (Розгляньте два випадки.)

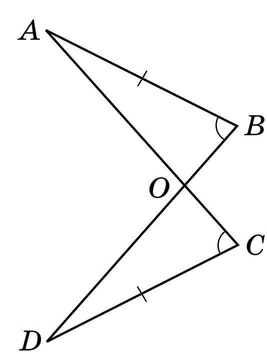
38.29. Розв’яжіть задачі, умови яких подано в таблиці, та прочитайте прізвище видатного українського вченого в галузі ракетобудування та космонавтики. Дізнайтеся з інтернету про його біографію та наукові досягнення.

У $\triangle ABC$: $\angle A = 80°$. Визначте градусні міри кутів B і C, якщо:	$\angle B$	$\angle C$
кут B на 14° більший за кут C	О	Ь
кут B утричі менший від кута C	Л	К
$\angle B : \angle C = 2 : 3$	В	Р

75°	57°	60°	57°	25°	43°	57°	40°

38.30. Перший з кутів трикутника вдвічі більший за другий. Знайдіть ці кути, якщо третій кут дорівнює 36°.

38.31. На малюнку 38.11 $AB = DC$, $\angle B = \angle C$. Доведіть, що $\triangle AOB = \triangle DOC$.



Мал. 38.11

38.32. Доведіть рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, якщо $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

38.33. У трикутнику два кути дорівнюють 46° і 64°. Знайдіть кут між прямими, на яких лежать бісектриси цих кутів.

38.34. У трикутнику два кути дорівнюють 70° і 80°. Знайдіть кут між прямими, на яких лежать висоти цих кутів.

38.35. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них дорівнює: 1) 12°; 2) 92°.

38.36. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них дорівнює: 1) $28°$; 2) $106°$.

4 **38.37.** Доведіть, що бісектриси двох внутрішніх односторонніх кутів при двох паралельних прямих і січній перетинаються під прямим кутом.

38.38. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них удвічі більший за інший. Скільки випадків слід розглянути?

38.39. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них на $15°$ більший за інший. Скільки випадків слід розглянути?

38.40. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює $72°$, а бісектриса кута при основі цього трикутника – 5 см. Знайдіть основу трикутника.

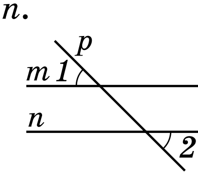
Вправи для повторення

38.41. Точка K лежить між точками P і L. Знайдіть PK, якщо $PL = 56$ мм, а $KL = 3$ см 4 мм.

38.42. Дано $\angle 1 = \angle 2$ (мал. 38.12). Доведіть, що $m \parallel n$.

38.43. $\angle AOB = 40°$, $\angle AOC = 60°$. Знайдіть $\angle BOC$. Скільки випадків слід розглянути?

38.44. Трикутники ABC і ABD – рівносторонні. Доведіть, що $AB \perp CD$.



Мал. 38.12

Життєва математика

38.45. На центральну міську клумбу, що має форму прямокутника зі сторонами 20 м і 6 м, потрібно висадити цибулини тюльпанів з розрахунку 60 цибулин на 1 м^2.
1) Скільки цибулин потрібно заготувати для висаджування?
2) Тюльпани продають в упаковках по 3 цибулини. Ціна такої упаковки 28 грн. Магазин готовий зробити знижки міській адміністрації за гуртову покупку на 15 %. Скільки доведеться заплатити за тюльпани?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

38.46. Чи можна двома ударами сокири розрубати підкову на 6 частин, не переміщуючи частин після першого удару? Якщо відповідь ствердна, укажіть, як це зробити.

§ 39. Зовнішній кут трикутника та його властивості. Співвідношення між сторонами і кутами трикутника

Зовнішній кут трикутника

Зовнішнім кутом трикутника **називають кут, суміжний з кутом цього трикутника.**

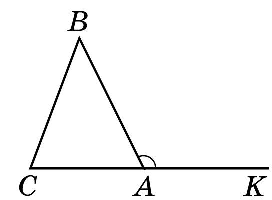
На малюнку 39.1 кут BAK – зовнішній кут трикутника ABC.

Щоб не плутати кут трикутника із зовнішнім кутом, його іноді називають *внутрішнім кутом*.

Теорема 1 (властивість зовнішнього кута трикутника). Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.

Доведення. Нехай $\angle BAK$ – зовнішній кут трикутника ABC (мал. 39.1). Враховуючи властивість суміжних кутів, отримаємо $\angle BAK = 180° - \angle BAC$.

Водночас, враховуючи теорему про суму кутів трикутника, $\angle B + \angle C = 180° - \angle BAC$. Тому $\angle BAK = \angle B + \angle C$, що й потрібно було довести. ■



Мал. 39.1

Наслідок. Зовнішній кут трикутника більший за будь-який внутрішній кут, не суміжний з ним.

Приклад 1. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 120°. Знайти внутрішні кути, не суміжні з ним, якщо вони відносяться як 3 : 5.

Розв'язання. Нехай $\angle BAK$ – зовнішній кут трикутника ABC (мал. 39.1), $\angle BAK = 120°$.

1) Оскільки $\angle B : \angle C = 3 : 5$, то можемо позначити $\angle B = 3x$, $\angle C = 5x$.

2) Оскільки $\angle BAK = \angle B + \angle C$ (за властивістю зовнішнього кута), маємо рівняння: $3x + 5x = 120°$, звідки $x = 15°$.

3) Тоді $\angle B = 3 \cdot 15° = 45°$, $\angle C = 5 \cdot 15° = 75°$.

Відповідь: 45°; 75°.

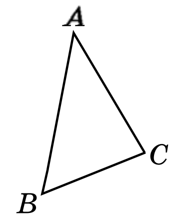
Співвідношення між сторонами і кутами трикутника

Розглянемо ще одну важливу властивість трикутника.

Т **Теорема 2** (про співвідношення між сторонами і кутами трикутника).

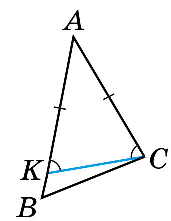
У трикутнику: 1) проти більшої сторони лежить більший кут; 2) проти більшого кута лежить більша сторона.

Доведення. 1) Нехай у трикутнику ABC $AB > AC$ (мал. 39.2). Доведемо, що $\angle C > \angle B$. Відкладемо на стороні AB відрізок AK, що дорівнює відрізку AC (мал. 39.3). Оскільки $AB > AC$, то точка K належить відрізку AB. Тому $\angle ACK$ є частиною кута ACB і $\angle ACK < \angle ACB$.



Мал. 39.2

$\triangle AKC$ – рівнобедрений, тому $\angle AKC = \angle ACK$. Але $\angle AKC$ – зовнішній кут трикутника KBC. Тому $\angle AKC > \angle B$. Отже, і $\angle ACK > \angle B$, а тому $\angle ACB > \angle B$.



Мал. 39.3

2) Нехай у трикутнику ABC $\angle C > \angle B$ (мал. 39.2). Доведемо, що $AB > AC$. Припустимо протилежне, тобто що $AB = AC$ або $AB < AC$. Якщо $AB = AC$, то $\triangle ABC$ – рівнобедрений, і тоді $\angle C = \angle B$. Це суперечить умові. Якщо припустити, що $AB < AC$, то за першою частиною теореми отримаємо, що $\angle C < \angle B$, і це також суперечить умові. Наше припущення неправильне. Отже, $AB > AC$, що й потрібно було довести. ■

Приклад 2. У трикутнику ABC: $\angle A = 57°$, $\angle B = 61°$. Яка зі сторін трикутника є найбільшою?

Розв'язання. У трикутнику більшою є та сторона, яка лежить проти більшого кута (мал. 39.2).

1) $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) = 180° - (57° + 61°) = 62°$.

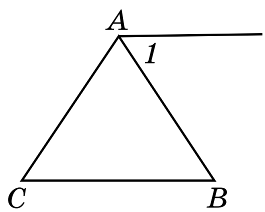
2) Оскільки $\angle C > \angle A$ і $\angle C > \angle B$, то найбільшою є сторона, яка лежить проти кута C, тобто сторона AB.

Відповідь: AB.

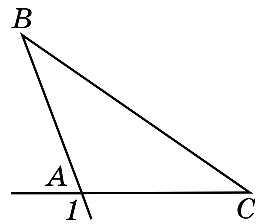
? Що таке зовнішній кут трикутника? ○ Сформулюйте та доведіть теорему про властивість зовнішнього кута трикутника. ○ Сформулюйте наслідок із цієї теореми. ○ Сформулюйте теорему про співвідношення між сторонами і кутами трикутника.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

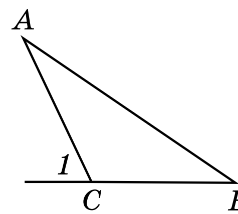
39.1. (*Усно.*) На яких з малюнків 39.4–39.6 кут *1* є зовнішнім кутом трикутника *ABC*?



Мал. 39.4



Мал. 39.5



Мал. 39.6

39.2. Накресліть $\triangle ABC$ та його зовнішній кут при вершині *A*.

39.3. Накресліть $\triangle DMN$ та його зовнішній кут при вершині *D*.

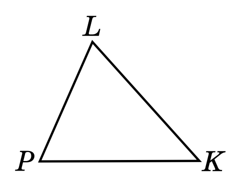
39.4. (*Усно.*) Укажіть суму внутрішнього кута трикутника і його зовнішнього кута при тій самій вершині.

39.5. Зовнішній кут при вершині *C* трикутника *ABC* дорівнює $65°$ (мал. 39.6). Знайдіть суму внутрішніх кутів *A* і *B* цього трикутника.

39.6. Сума внутрішніх кутів *A* і *B* трикутника *ABC* дорівнює $70°$ (мал. 39.6). Знайдіть зовнішній кут цього трикутника при вершині *C*.

39.7. (*Усно.*) У $\triangle PLK$ $PL < LK$ (мал. 39.7). Порівняйте кути *P* і *K* цього трикутника.

39.8. У $\triangle PLK$ $\angle L > \angle K$ (мал. 39.7). Порівняйте сторони *PK* і *PL* цього трикутника.



Мал. 39.7

39.9. Два кути трикутника дорівнюють $62°$ і $37°$. Знайдіть градусну міру зовнішнього кута при третій вершині.

39.10. У трикутнику *ABC* $\angle A = 43°$, $\angle B = 102°$. Знайдіть градусну міру зовнішнього кута при вершині *C*.

39.11. (*Усно.*) Скільки гострих кутів може бути серед зовнішніх кутів трикутника?

39.12. Зовнішній кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює $100°$. Знайдіть кут при основі трикутника.

39.13. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює $55°$. Знайдіть зовнішній кут при вершині кута між бічними сторонами.

39.14. Зовнішній кут при вершині A трикутника ABC дорівнює 105°. Знайдіть $\angle B$, якщо $\angle C = 45°$.

39.15. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 120°. Знайдіть внутрішній кут трикутника, не суміжний з ним, якщо другий внутрішній кут трикутника, не суміжний з ним, дорівнює 18°.

39.16. Внутрішні кути трикутника дорівнюють 45° і 70°. Знайдіть градусну міру зовнішніх кутів трикутника, взятих по одному при кожній з його вершин.

39.17. Зовнішні кути при двох вершинах трикутника відповідно дорівнюють 110° і 140°. Знайдіть градусну міру кожного з трьох внутрішніх його кутів.

39.18. Розв'яжіть задачі, подані в таблиці, і прочитаєте назву одного із символів нашої держави.

У трикутнику ABC зовнішній кут при вершині C дорівнює 140°. Знайдіть внутрішні кути A і B цього трикутника, якщо:	$\angle A$	$\angle B$
кут B на 30° більший за кут A	Р	А
кут A у 4 рази більший за кут B	О	П

28°	55°	85°	28°	112°	55°

39.19. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 120°. Знайдіть внутрішні кути, які не суміжні з ним, якщо:
1) один з них на 20° менший від іншого;
2) один з них утричі менший від іншого.

39.20. Один із зовнішніх кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 118°. Знайдіть градусні міри внутрішніх кутів трикутника. Скільки розв'язків має задача?

39.21. Один із зовнішніх кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 42°. Знайдіть градусні міри внутрішніх кутів трикутника. Скільки розв'язків має задача?

39.22. Доведіть, що сума зовнішніх кутів будь-якого трикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°.

39.23. Зовнішні кути трикутника відносяться як 3 : 5 : 4. Знайдіть відношення його внутрішніх кутів.

39.24. Внутрішні кути трикутника відносяться як 7 : 8 : 9. Знайдіть відношення зовнішніх кутів трикутника, не знаходячи їхніх градусних мір.

39.25. Доведіть, що бісектриси зовнішнього і внутрішнього кутів трикутника при одній вершині перпендикулярні між собою.

Вправи для повторення

39.26. Промінь, що проходить між сторонами прямого кута, ділить його на два кути, різниця яких складає $\frac{1}{3}$ від їхньої суми. Знайдіть градусні міри цих кутів.

39.27. Відрізок AB, довжина якого 22,8 см, поділено на три частини. Відношення двох з них дорівнює 1 : 2, а третя – на 1,8 см довша за більшу з двох перших частин. Знайдіть довжини кожної з трьох частин відрізка.

Життєва математика

39.28. У розпорядженні дитячого садочка є дві ділянки. Одна з них має форму прямокутника, 32 м завдовжки і 18 м завширшки. Друга ділянка є квадратною, такої самої площі, що й перша. У садівника є 97 м паркану.
1) Яку з ділянок садівник зможе обгородити парканом?
2) Скільки метрів паркану ще потрібно докупити, щоб можна було обгородити парканом обидві ділянки?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

39.29. Накресліть $\triangle ABC$, у якого $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$. У скільки разів сторона BC цього трикутника менша від сторони AB?

39.30. Накресліть $\triangle ABC$, у якого $\angle C = 90°$, і проведіть медіану CM цього трикутника. У скільки разів медіана CM менша від сторони AB?

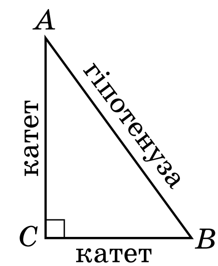
Цікаві задачі – поміркуй одначе

39.31. Розріжте деякий квадрат на два рівних між собою п’ятикутники.

§ 40. Прямокутні трикутники. Властивості та ознаки рівності прямокутних трикутників

Прямокутний трикутник

***Трикутник* називають *прямокутним*, якщо один з його кутів прямий.**



Мал. 40.1

На малюнку 40.1 зображено прямокутний трикутник ABC, у нього $\angle C = 90°$. Сторону прямокутного трикутника, яка лежить проти прямого кута, називають ***гіпотенузою***, а дві інші сторони – ***катетами***.

Властивості прямокутних трикутників

Розглянемо властивості прямокутних трикутників та їх застосування до розв'язування задач.

1. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.

Справді, сума кутів трикутника дорівнює 180°, прямий кут становить 90°. Тому сума двох гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює: $180° - 90° = 90°$.

Приклад 1. Знайти гострі кути прямокутного трикутника, якщо один з них становить $\frac{2}{7}$ від іншого.

Розв'язання. Розглянемо прямокутний трикутник ABC (мал. 40.1), у якого $\angle A = \frac{2}{7}\angle B$.

1) Позначимо $\angle B = x°$, тоді $\angle A = \frac{2}{7}x°$.

2) Використовуючи властивість, маємо $x + \frac{2}{7}x = 90°$, тоді $x = 70°$.

3) Отже, $\angle B = 70°$; $\angle A = \frac{2}{7} \cdot 70° = 20°$.

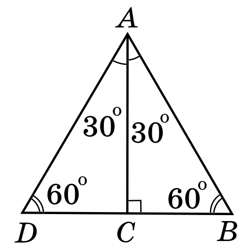
Відповідь: 20°; 70°.

2. Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за будь-який з його катетів.

Ця властивість є наслідком теореми про співвідношення між сторонами і кутами трикутника, оскільки прямий кут більший за гострий.

3. Катет прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.

Доведення. Розглянемо прямокутний $\triangle ABC$ з прямим кутом C і кутом A, що дорівнює 30° (мал. 40.2). Прикладемо до трикутника ABC трикутник ADC, що йому дорівнює. Тоді $\angle B = \angle D = 90° - 30° = 60°$ і $\angle DAB = 30° + 30° = 60°$. Отже, $\triangle ABD$ – рівносторонній. Тому $DB = AB$. Оскільки $BC = \frac{1}{2}BD$, то $BC = \frac{1}{2}AB$, що й потрібно було довести. ■



Мал. 40.2

Приклад 2. У трикутнику ABC: $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$ (мал. 40.1). Гіпотенуза трикутника на 5 см більша за менший катет. Знайти гіпотенузу трикутника.

Розв'язання. 1) Оскільки у прямокутному трикутнику ABC з прямим кутом C маємо $\angle A = 30°$, то за властивістю $BC = \frac{1}{2}AB$.

2) $\angle B = 90° - \angle A = 90° - 30° = 60°$; $\angle A < \angle B$, тому $BC < AC$. А, отже, BC є меншим катетом трикутника ABC.

3) Позначимо $BC = x$ (см), тоді $AB = 2x$ (см).

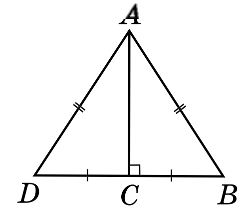
4) За умовою $2x - x = 5$; $x = 5$ (см).

5) Тоді $AB = 2 \cdot 5 = 10$ (см).

Відповідь: 10 см.

4. Якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то кут, що лежить проти цього катета, дорівнює 30°.

Доведення. Розглянемо прямокутний $\triangle ABC$, у якого катет BC дорівнює половині гіпотенузи AB (мал. 40.3). Прикладемо до трикутника ABC трикутник ADC, що йому дорівнює. Оскільки $BC = \frac{1}{2}AB$, то $BD = AB = AD$. Маємо рівносторонній трикутник ABD, тому $\angle B = 60°$. У трикутнику ABC $\angle BAC = 90° - 60° = 30°$, що й потрібно було довести. ■



Мал. 40.3

Ознаки рівності прямокутних трикутників

Розглянемо *ознаки рівності прямокутних трикутників*.

З першої ознаки рівності трикутників випливає:

якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам іншого, то такі трикутники рівні між собою.

З другої ознаки рівності трикутників випливає:

якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і прилеглому до нього куту іншого, то такі трикутники рівні між собою.

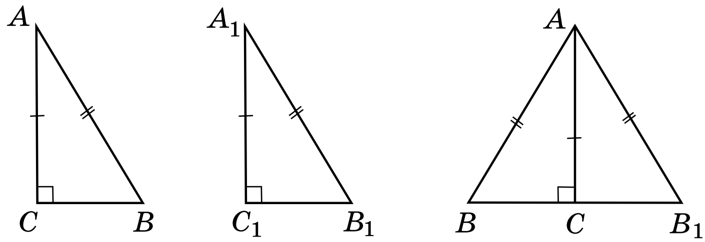
Якщо у двох прямокутних трикутників є одна пара рівних між собою гострих кутів, то й інша пара гострих кутів – також рівні між собою кути (це випливає з властивості 1 прямокутних трикутників). Тому маємо ще дві ознаки рівності прямокутних трикутників:

якщо гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й гострому куту іншого, то такі трикутники рівні між собою;

якщо катет і протилежний йому кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і протилежному йому куту іншого, то такі трикутники рівні між собою.

Т Теорема (ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і гіпотенузою).
Якщо катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету і гіпотенузі іншого, то такі трикутники рівні між собою.

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких кути C і C_1 – прямі та $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$ (мал. 40.4). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.



Мал. 40.4

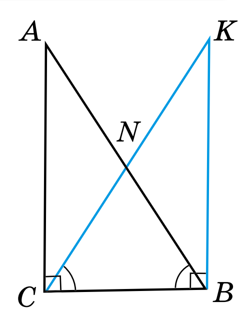
Прикладемо $\triangle ABC$ до $\triangle A_1B_1C_1$ так, щоб вершина A сумістилася з вершиною A_1, а вершина C – з вершиною C_1 (мал. 40.4 праворуч). Оскільки $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1 = 90°$, то $\angle BCB_1$ – розгорнутий, а тому точки B, C, B_1 лежать на одній прямій. $\triangle ABB_1$ – рівнобедрений, бо $AB = AB_1$. AC – його висота, проведена до основи. Звідси AC є також і медіаною, тому $BC = CB_1$. Отже, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за третьою ознакою рівності трикутників. ■

Властивість медіани прямокутного трикутника, проведеної до гіпотенузи

Розглянемо ще одну властивість прямокутного трикутника.

5. У прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.

Доведення. Проведемо перпендикуляр BK до сторони BC так, щоб $BK = CA$ (мал. 40.5). Тоді $\triangle ABC$ і $\triangle KCB$ – прямокутні, BC – їхній спільний катет, $AC = BK$ (за побудовою). Тому $\triangle ABC = \triangle KCB$ (за двома катетами), тоді $\angle ABC = \angle KCB$. Отже, $\triangle NBC$ – рівнобедрений і $BN = CN$. Аналогічно можна довести, що $CN = AN$. Таким чином, $BN = CN = AN$. Тому CN – медіана і $CN = \frac{AB}{2}$, що й потрібно було довести. ■



Мал. 40.5

Зауважимо, що з доведеної властивості можна зробити важливий висновок. Оскільки $CN = \frac{AB}{2}$ і $AN = BN = \frac{AB}{2}$, то $AN = BN = CN$.

Тобто

у прямокутному трикутнику середина гіпотенузи рівновіддалена від його вершин.

А ще раніше...

Про прямокутний трикутник згадується в папірусі Ахмеса. Деякі відомості про нього знали також вавилонські геометри. Ще тоді землеміри використовували ці властивості для визначення відстані на місцевості.

Термін «гіпотенуза» походить від грецького слова «іпотейнуза» і перекладається як «що тягнеться під чим-небудь», «та, що стягує». Походить це слово, найімовірніше, від давньоєгипетських арф, струни яких натягувалися на кінцях двох взаємно перпендикулярних підставок.

Термін «катет» походить від грецького слова «катетос», що перекладається як «схил», «перпендикуляр».

Евклід у своїх працях для катетів використовував формулювання «сторони, що містять прямий кут», а для гіпотенузи – «сторона, що стягує прямий кут».

Який трикутник називають прямокутним? Які назви мають сторони прямокутного трикутника? Сформулюйте та доведіть властивості прямокутного трикутника. Сформулюйте та доведіть ознаки рівності прямокутних трикутників.

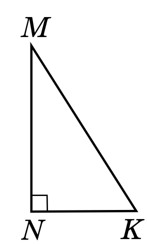
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

40.1. (*Усно.*) 1) Як називають трикутник, зображений на малюнку 40.6?

2) Назвіть гіпотенузу і катети цього трикутника.

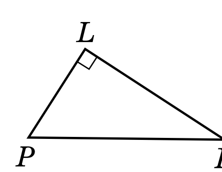
3) Яка зі сторін цього трикутника найдовша?



Мал. 40.6

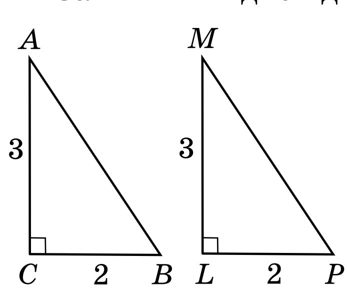
40.2. 1) Назвіть гіпотенузу і катети прямокутного трикутника *PFL* (мал. 40.7).

2) Яка сторона довша: *PL* чи *PF*; *LF* чи *PF*?

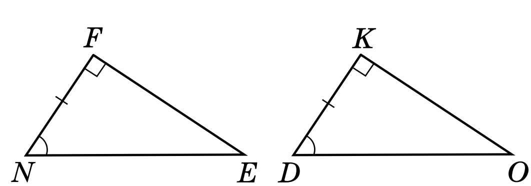


Мал. 40.7

40.3. За якими елементами прямокутні трикутники на малюнках 40.8 і 40.9 є рівними? Запишіть відповідні рівності.

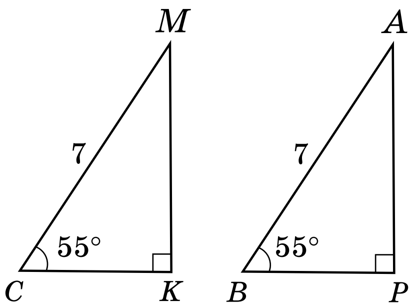


Мал. 40.8

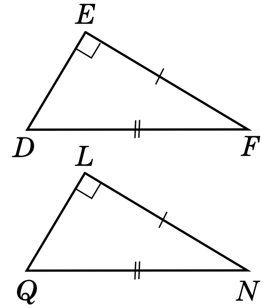


Мал. 40.9

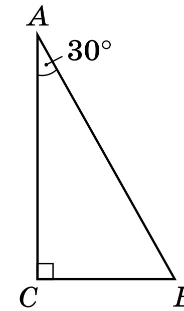
40.4. За якими елементами є рівними прямокутні трикутники на малюнках 40.10 і 40.11? Запишіть відповідні рівності.



Мал. 40.10



Мал. 40.11



Мал. 40.12

40.5. Знайдіть гострий кут прямокутного трикутника, якщо інший його гострий кут дорівнює: 1) 18°; 2) 87°.

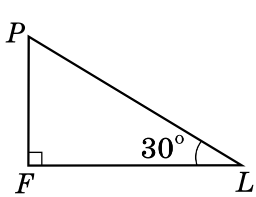
40.6. Знайдіть гострий кут прямокутного трикутника, якщо інший його гострий кут дорівнює: 1) 75°; 2) 23°.

40.7. Знайдіть кути рівнобедреного прямокутного трикутника.

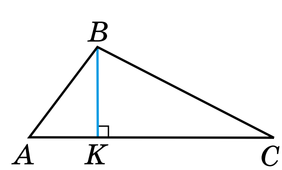
40.8. У рівнобедреному трикутнику один з кутів при основі дорівнює 45°. Чи можна стверджувати, що цей трикутник прямокутний?

40.9. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) $\angle A = 30°$ (мал. 40.12). Знайдіть:
1) BC, якщо $AB = 14$ см; 2) AB, якщо $BC = 5$ дм.

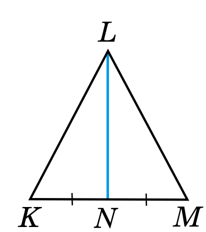
40.10. У прямокутному трикутнику PFL ($\angle F = 90°$) $\angle L = 30°$ (мал. 40.13). Знайдіть:
1) PF, якщо $PL = 12$ дм; 2) PL, якщо $PF = 4$ см.



Мал. 40.13



Мал. 40.14

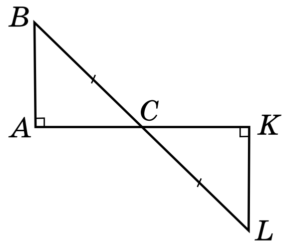


Мал. 40.15

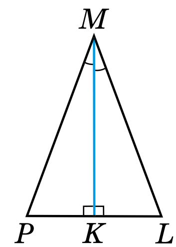
40.11. На малюнку 40.14 BK – висота трикутника ABC. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $\angle ABK = 36°$, $\angle KBC = 64°$.

40.12. На малюнку 40.15 KLM – рівнобедрений трикутник з основою KM, LN – його медіана. Знайдіть кути трикутника KLM, якщо $\angle KLN = 31°$.

40.13. На малюнку 40.16 $AB \perp AC$, $KL \perp CK$, $BC = CL$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle KLC$.



Мал. 40.16



Мал. 40.17

40.14. На малюнку 40.17 $MK \perp PL$, $\angle PMK = \angle LMK$. Доведіть, що $\triangle MPK = \triangle MLK$.

40.15. Розв'яжіть задачі, подані в таблиці, та прочитайте прізвище. Хто з відомих українців має таке прізвище? За потреби використайте інтернет.

У трикутнику ABC кут C – прямий. Знайдіть градусні міри кутів A і B, якщо:	$\angle A$	$\angle B$
кут A на $28°$ більший за кут B	Т	О
кут A у 5 разів менший від кута B	К	Н
$\angle A : \angle B = 2 : 3$	Е	С

15°	31°	54°	59°	36°	75°	15°	31°

40.16. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо:
1) один з них у 4 рази більший за інший;
2) один з них на $16°$ менший від іншого;
3) їхні градусні міри відносяться як $5 : 4$.

40.17. Знайдіть менший з кутів, що утворює бісектриса прямого кута трикутника з гіпотенузою, якщо один з гострих кутів трикутника дорівнює $26°$.

40.18. Знайдіть більший з кутів, що утворює бісектриса прямого кута трикутника з гіпотенузою, якщо один з гострих кутів трикутника дорівнює $68°$.

40.19. Доведіть, що точка, яка лежить у внутрішній області кута і рівновіддалена від його сторін, належить бісектрисі цього кута.

40.20. Кут між висотою прямокутного трикутника, проведеною до гіпотенузи, і одним з катетів дорівнює 32°. Знайдіть гострі кути трикутника.

40.21. Один з кутів, утворених при перетині бісектрис прямого і гострого кутів трикутника, дорівнює 115°. Знайдіть гострі кути цього трикутника.

4 **40.22.** Доведіть, що два рівнобедрених трикутники рівні, якщо відповідно рівні їхні бічні сторони і висоти, проведені до основ.

40.23. У прямокутному трикутнику один з кутів дорівнює 60°, а сума гіпотенузи і меншого катета – 30 см. Знайдіть довжину гіпотенузи та медіани, що проведена до неї.

40.24. У прямокутному трикутнику гострий кут дорівнює 60°, а бісектриса цього кута – 4 см. Знайдіть довжину катета, що лежить проти цього кута.

40.25. Різниця градусних мір двох зовнішніх кутів при вершинах гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 20°. Знайдіть гострі кути трикутника.

40.26. Знайдіть градусні міри гострих кутів прямокутного трикутника, якщо градусні міри їхніх зовнішніх кутів відносяться як 2 : 3.

Вправи для повторення

40.27. Доведіть, що коли медіана трикутника ділить його на два трикутники з однаковими периметрами, то хоча б два кути трикутника між собою рівні.

40.28. Один з кутів трикутника на 20° менший від другого і втричі менший від третього. Знайдіть кожний з кутів трикутника.

40.29. У рівнобедреному трикутнику основа більша за бічну сторону на 3 см, але менша від суми бічних сторін на 4 см. Знайдіть периметр цього трикутника.

Життєва математика

40.30. Виміряйте розміри однієї з кімнат вашого будинку (квартири) та знайдіть площу цієї кімнати. Скільки потрібно заплатити за лінолеум для цієї кімнати, якщо 1 м^2 лінолеуму коштує 130 грн?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

40.31. Накресліть довільний $\triangle ABC$, виміряйте довжини трьох його сторін. Порівняйте суму довжин кожної пари сторін із третьою стороною. Зробіть висновки.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

40.32. Позначте вісім точок і сполучіть їх відрізками так, щоб жодні два з них не перетиналися і з кожної точки виходило по чотири відрізки.

§ 41. Нерівність трикутника

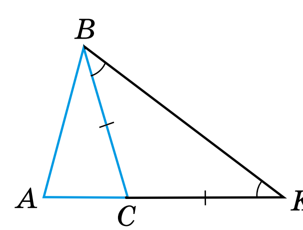
Розглянемо важливу властивість сторін трикутника.

Теорема (нерівність трикутника).
Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін.

Доведення. Розглянемо довільний $\triangle ABC$ і доведемо, що його сторона, наприклад AB, менша від суми двох інших сторін AC і CB.

1) Відкладемо на продовженні сторони AC відрізок CK, що дорівнює стороні BC (мал. 41.1). Тоді $\triangle BCK$ – рівнобедрений, і тому $\angle CBK = \angle CKB$.

2) $\angle ABK > \angle CBK$, тому $\angle ABK > \angle AKB$. Оскільки в трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона, то $AB < AK$. Але $AK = AC + CK = AC + BC$. Отже, $AB < AC + BC$.



Мал. 41.1

Аналогічно можна довести, що $AC < AB + BC$, $BC < AB + AC$. Теорему доведено. ■

Наслідок. Кожна зі сторін трикутника більша за різницю двох інших його сторін.

Доведення. Запишемо нерівність трикутника для трикутника ABC: $AB < AC + BC$. Віднявши від обох її частин, наприклад,

AC, матимемо: $AB - AC < BC$. Таку дію можна виконати, використовуючи властивості нерівностей, які розглядатимуться в курсі алгебри. Отже, $BC > AB - AC$. Аналогічно: $AC > BC - AB$, $AB > BC - AC$. ■

Оскільки, наприклад, $BC > AB - AC$ і $BC > AC - AB$, то, узагальнюючи, отримаємо $BC > |AB - AC|$.

З теореми про нерівність трикутника та наслідку з неї отримаємо важливе співвідношення між сторонами трикутника:

кожна сторона трикутника менша від суми двох інших сторін, але більша за модуль їхньої різниці.

Наприклад, $|AB - AC| < BC < AB + AC$.

Приклад 1. Дві сторони трикутника дорівнюють 0,7 см і 1,7 см. Знайти довжину третьої сторони, якщо її довжина дорівнює цілому числу сантиметрів.

Розв'язання. Нехай невідома сторона трикутника дорівнює a см. Тоді $1{,}7 - 0{,}7 < a < 1{,}7 + 0{,}7$, тобто $1 < a < 2{,}4$. Оскільки a – ціле число, то $a = 2$ (см).

Відповідь: 2 см.

Приклад 2. Периметр рівнобедреного трикутника 60 см, а дві його сторони відносяться як 2 : 5. Знайти сторони трикутника.

Розв'язання. Позначимо сторони трикутника, відношення яких 2 : 5, як $2x$ см і $5x$ см. Оскільки невідомо, яка з них – основа, а яка – бічна сторона, розглянемо два випадки.

1. Основа дорівнює $5x$ см, а бічні сторони – по $2x$ см. Але тоді $2x + 2x < 5x$, що суперечить нерівності трикутника, тобто трикутника зі сторонами $2x$, $2x$ і $5x$ не існує.

2. Основа дорівнює $2x$ см, а бічні сторони – по $5x$ см. Для цього випадку нерівність трикутника виконується.

Отже, за умовою задачі маємо рівняння:

$$2x + 5x + 5x = 60,\ x = 5 \text{ (см)}.$$

Тоді $2 \cdot 5 = 10$ (см) – основа, $5 \cdot 5 = 25$ (см) – бічна сторона.

Відповідь: 10 см; 25 см; 25 см.

? Сформулюйте теорему про нерівність трикутника та наслідок з неї. ○ Якими співвідношеннями пов'язані між собою сторони трикутника?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

41.1. Чи існує трикутник зі сторонами:
1) 1 см, 2 см і 4 см; 2) 7 дм, 6 дм і 5 дм;
3) 3 см, 4 см і 7 см; 4) 9 дм, 5 дм і 5 дм?

41.2. Чи існує трикутник зі сторонами:
1) 2 дм, 5 дм і 7 дм; 2) 2 см, 3 см і 6 см;
3) 5 дм, 2 дм і 4 дм; 4) 7 см, 4 см і 4 см?

2

41.3. Дві сторони трикутника дорівнюють 2,8 см і 8,4 см. Якому найбільшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона?

41.4. Дві сторони трикутника дорівнюють 2,7 см і 4,3 см. Якому найменшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона?

41.5. Чи можуть сторони трикутника бути пропорційними числам:
1) 2, 3, 4; 2) 7, 8, 15; 3) 5, 3, 7?

41.6. Чи можуть сторони трикутника бути пропорційними числам:
1) 5, 1, 4; 2) 5, 6, 7; 3) 8, 2, 11?

3

41.7. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см. Чи може бічна сторона цього трикутника дорівнювати 3 см?

41.8. Дві сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 5 см і 11 см. Знайдіть периметр цього трикутника.

41.9. Дві сторони трикутника дорівнюють 2,5 см і 1,2 см. Яким може бути периметр трикутника, якщо довжина третьої сторони дорівнює цілому числу сантиметрів?

41.10. Периметр трикутника дорівнює 30 см. Чи може одна з його сторін дорівнювати: 1) 14 см; 2) 15 см; 3) 16 см?

41.11. Периметр трикутника дорівнює 40 дм. Чи може одна з його сторін дорівнювати:
1) 21 дм; 2) 20 дм; 3) 19 дм?

4

41.12. Чи існує трикутник з периметром 20 см, перша сторона якого на 2 см більша за другу і на 4 см менша від третьої?

41.13. Чи існує трикутник з периметром 23 см, перша сторона якого на 6 см менша від другої і на 1 см більша за третю?

Вправи для повторення

41.14. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо кут A втричі менший від кута B і на 15° більший за кут C.

41.15. Доведіть, що два прямокутних трикутники між собою рівні, якщо висота, проведена до гіпотенузи, і катет одного трикутника дорівнюють відповідно висоті, проведеній до гіпотенузи, і катету іншого трикутника.

Життєва математика

41.16. Циферблат морських компасів поділено на 32 рівні частини, які називають румбами. Скільки градусів становлять 4 румби?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

41.17. Коник-стрибунець може переміщуватися вздовж певної прямої на 4 см або 6 см (у будь-який бік). Чи зможе він за кілька стрибків опинитися в точці, що міститься від початкової на відстані: 1) 2024 см; 2) 2025 см?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 8 (§§38–41)

Кожне завдання має по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Три кути трикутника можуть дорівнювати...

А. 20°, 20° і 150° **Б.** 30°, 100° і 40°

В. 50°, 60° і 70° **Г.** 60°, 60° і 61°

2. У $\triangle ABC$ $AB > AC$. Порівняйте $\angle B$ і $\angle C$ цього трикутника.

А. $\angle B < \angle C$ **Б.** $\angle B = \angle C$

В. $\angle B > \angle C$ **Г.** Порівняти неможливо

3. Знайдіть другий гострий кут прямокутного трикутника, якщо перший дорівнює 40°.

А. 30° **Б.** 40° **В.** 50° **Г.** 60°

2

4. Один з кутів трикутника дорівнює 72°. Знайдіть суму двох інших кутів трикутника.

А. 98° **Б.** 108° **В.** 118° **Г.** Знайти неможливо

5. Зовнішній кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 140°. Знайдіть кут при основі цього трикутника.

А. 40° **Б.** 50° **В.** 60° **Г.** 70°

6. Дві сторони трикутника дорівнюють 2,7 см і 4,2 см. Якому цілому числу сантиметрів НЕ може дорівнювати третя сторона трикутника?

А. 2 см **Б.** 4 см **В.** 6 см **Г.** 8 см

3 **7.** Один з гострих кутів прямокутного трикутника на 30° менший від іншого, а гіпотенуза трикутника дорівнює 8 см. Знайдіть менший з його катетів.

А. 2 см **Б.** 4 см **В.** 5 см **Г.** 6 см

8. У трикутнику два кути дорівнюють 60° і 50°. Знайдіть кут між прямими, що містять бісектриси цих кутів.

А. 125° **Б.** 115° **В.** 65° **Г.** 55°

9. Периметр трикутника дорівнює 16 см. Якою НЕ може бути довжина однієї з його сторін?

А. 8 см **Б.** 7,5 см **В.** 7 см **Г.** 2 см

4 **10.** Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника дорівнює основі цього трикутника. Знайдіть кут при основі цього трикутника.

А. 60° **Б.** 72° **В.** 84° **Г.** 96°

11. Зовнішні кути трикутника відносяться як 3 : 5 : 7. Знайдіть менший з внутрішніх кутів трикутника.

А. 12° **Б.** 24° **В.** 60° **Г.** Інша відповідь

12. У прямокутному трикутнику один з кутів дорівнює 60°, а сума меншого катета і медіани, проведеної до гіпотенузи, дорівнює 10 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

А. 6 см **Б.** 8 см **В.** 10 см **Г.** 15 см

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами.

3 **13.** У прямокутному трикутнику один з гострих кутів дорівнює 40°. Установіть відповідність між кутами (1–3) та їхніми градусними мірами (А–Г).

Кути	*Градусні міри*
1. Кут, що утворює висота трикутника, проведена до гіпотенузи, з більшим катетом.	**А.** 45°
2. Менший з кутів, що утворює бісектриса прямого кута з гіпотенузою.	**Б.** 50°
3. Кут між прямими, що містять бісектриси прямого і меншого гострого кута трикутника.	**В.** 65°
	Г. 85°

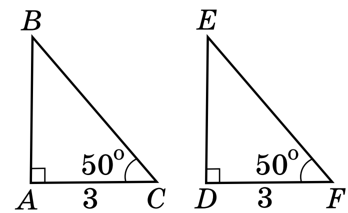
ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 38–41

1

1. Знайдіть третій кут трикутника, якщо два з його кутів дорівнюють 30° і 80°.

2. Накресліть $\triangle PLK$ та його зовнішній кут при вершині P.

3. За якими елементами рівні між собою прямокутні трикутники, зображені на малюнку 1? Запишіть відповідні рівності.

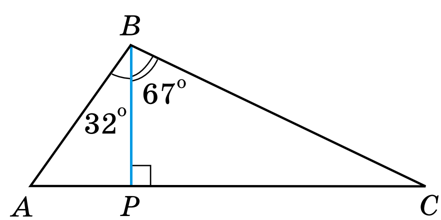


Мал. 1

2

4. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 71°. Знайдіть кут при вершині цього трикутника.

5. На малюнку 2 BP – висота трикутника ABC, $\angle ABP = 32°$, $\angle PBC = 67°$. Знайдіть кути трикутника ABC.



Мал. 2

6. Дві сторони трикутника дорівнюють 5,2 см і 6,3 см. Якому найбільшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона?

3

7. Один з кутів трикутника вдвічі менший від другого і на 16° більший за третій. Знайдіть кути трикутника.

8. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 112°. Знайдіть внутрішні кути, не суміжні з ним, якщо вони відносяться як 3 : 5.

4

9. У прямокутному трикутнику BCD $\angle C = 90°$, BM – бісектриса трикутника, $\angle CBD = 60°$. Знайдіть довжину катета CD, якщо $CM = 8$ см.

Додаткові вправи

10. Зовнішні кути трикутника відносяться як 4 : 5 : 6. Знайдіть відношення внутрішніх кутів трикутника.

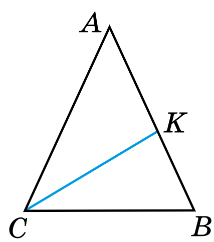
11. Чи існує трикутник з периметром 23 см, одна сторона якого на 3 см більша за другу і на 5 см менша від третьої?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 8

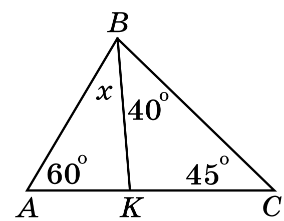
До § 38

1 **1.** Знайдіть кут C трикутника ABC, якщо:
1) $\angle A = 65°$, $\angle B = 29°$; 2) $\angle A = 37°$, $\angle B = 116°$.

2 **2.** На малюнку 1 CK – бісектриса рівнобедреного трикутника ABC з основою CB. Знайдіть:
1) $\angle A$, якщо $\angle KCB = 32°$; 2) $\angle ACK$, якщо $\angle A = 56°$.



Мал. 1



Мал. 2

3. Визначте вид трикутника ABC за сторонами, якщо $\angle A = 76°$, $\angle B = 28°$.

4. За малюнком 2 знайдіть градусну міру кута x.

3 **5.** Один з кутів трикутника дорівнює 60°, а два інших відносяться як 2 : 3. Знайдіть ці кути.

6. Знайдіть кут між двома прямими, що містять медіани рівностороннього трикутника.

4 **7.** Бісектриса одного з кутів трикутника утворює з висотою, проведеною з тієї самої вершини, кут 16°, а менший з двох інших кутів трикутника дорівнює 50°. Знайдіть невідомі кути трикутника.

8. Знайдіть градусну міру кута трикутника, якщо він:
1) дорівнює $\frac{1}{5}$ від суми градусних мір двох інших кутів;
2) на 40° менший від суми двох інших кутів.

9. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AB проведено бісектрису AK. Знайдіть:
1) $\angle B$, якщо $\angle AKB = 60°$;
2) $\angle C$, якщо $\angle AKC = 111°$.

До § 39

1 **10.** Накресліть $\triangle MNK$ та по одному зовнішньому куту при кожній вершині цього трикутника.

2 **11.** Зовнішній кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 150°. Знайдіть внутрішні кути трикутника.

12. Один з кутів трикутника дорівнює 80°. Чи може зовнішній кут трикутника, не суміжний з ним, дорівнювати:

1) 102°; 2) 80°; 3) 75°?

3 **13.** Зовнішні кути при двох вершинах трикутника дорівнюють 115° і 137°. Знайдіть градусну міру зовнішнього кута при третій вершині.

14. Один з кутів трикутника дорівнює половині зовнішнього кута, не суміжного з ним. Доведіть, що трикутник – рівнобедрений.

15. Два внутрішніх кути трикутника відносяться як 2 : 3, а зовнішній кут третього кута дорівнює 140°. Знайдіть кути трикутника.

4 **16.** Сума внутрішніх кутів рівнобедреного трикутника разом з одним із зовнішніх кутів дорівнює 260°. Знайдіть градусні міри внутрішніх кутів трикутника.

17. Доведіть, що не існує трикутника, у якому зовнішні кути при кожній з вершин більші за 120°.

* **18.** Внутрішній кут трикутника дорівнює різниці зовнішніх кутів, не суміжних з ним. Доведіть, що трикутник – прямокутний.

До § 40

1 **19.** Укажіть умови, з яких випливає рівність двох прямокутних трикутників:

1) катет одного трикутника дорівнює катету другого трикутника;

2) катет і прилеглий до нього гострий кут одного трикутника дорівнює катету і прилеглому до нього гострому куту другого трикутника;

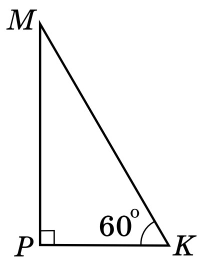
3) два гострих кути одного трикутника дорівнюють двом гострим кутам другого;

4) катет і гіпотенуза одного трикутника дорівнюють катету і гіпотенузі другого.

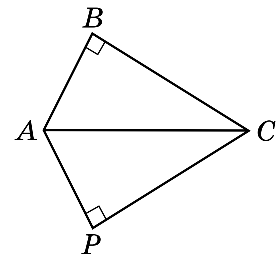
2 **20.** У прямокутному трикутнику MKP $\angle K = 60°$ (мал. 3). Знайдіть:

1) $\angle M$; 2) PK, якщо $MK = 24$ см;

3) MK, якщо $PK = 30$ мм.



Мал. 3



Мал. 4

21. На малюнку 4 $\angle B = \angle P = 90°$, CA – бісектриса кута C. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle APC$.

3 **22.** Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо їхні градусні міри відносяться як 7 : 3.

23. З вершини прямого кута прямокутного трикутника проведено бісектрису і висоту, кут між якими 15°. Знайдіть гострі кути трикутника.

24. У прямокутному трикутнику ABC $AC = BC$. Знайдіть довжину гіпотенузи, якщо висота, проведена до неї, дорівнює 5 см.

25. Знайдіть кут між бісектрисами гострих кутів прямокутного трикутника.

4 **26.** У прямокутному трикутнику катет 24 см завдовжки прилягає до кута 30°. Знайдіть бісектрису другого гострого кута трикутника.

27. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 120°, а висота, проведена до бічної сторони, – a см. Знайдіть основу трикутника.

28. Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює 10 см і ділить прямий кут у відношенні 1 : 2. Знайдіть гіпотенузу та менший катет трикутника.

* **29.** Доведіть, що в нерівнобедреному прямокутному трикутнику бісектриса прямого кута ділить кут між висотою і медіаною, проведеними з тієї самої вершини, навпіл.

До § 41

1 **30.** Дві сторони трикутника дорівнюють 5 см і 8 см. Чи може третя сторона трикутника дорівнювати:

1) 2 см; 2) 3 см;
3) 6 см; 4) 10 см;
5) 13 см; 6) 15 см?

2 **31.** Дві сторони трикутника дорівнюють 5,2 см і 8,7 см. Якому найменшому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона і якому найбільшому?

3 **32.** На сторонах AB і AC трикутника ABC позначено точки D і E, причому точка D – середина AB, $AE = 6$ см, $DE = 4$ см. Чи може довжина сторони AB дорівнювати 21 см?

33. Знайдіть сторону рівнобедреного трикутника, якщо дві інші сторони дорівнюють:

1) 4 см і 7 см; 2) 5 см і 2 см; 3) 12 см і 6 см.

4 **34.** Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 51 см, а дві його сторони відносяться як 3 : 7. Знайдіть сторони трикутника.

Головне в темі 8

ТЕОРЕМА ПРО СУМУ КУТІВ ТРИКУТНИКА

Сума кутів трикутника дорівнює 180°.

ЗОВНІШНІЙ КУТ ТРИКУТНИКА

✓ **Зовнішній кут трикутника** – кут, суміжний з кутом цього трикутника.

ВЛАСТИВІСТЬ ЗОВНІШНЬОГО КУТА ТРИКУТНИКА

Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.

СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ СТОРОНАМИ І КУТАМИ ТРИКУТНИКА

У трикутнику:
1) проти більшої сторони лежить більший кут;
2) проти більшого кута лежить більша сторона.

ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК

✓ Сторона **прямокутного трикутника**, яка лежить проти прямого кута, – ***гіпотенуза***, а дві інші сторони – ***катети***.

ВЛАСТИВОСТІ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

1. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.

2. Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за будь-який з його катетів.

3. Катет прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.

4. Якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то кут, що лежить проти цього катета, дорівнює 30°.

5. У прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.

ОЗНАКИ РІВНОСТІ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

- ✓ Якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам іншого, то такі трикутники рівні між собою.
- ✓ Якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і прилеглому до нього куту іншого, то такі трикутники рівні між собою.
- ✓ Якщо гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі й гострому куту іншого, то такі трикутники рівні між собою.
- ✓ Якщо катет і протилежний йому кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету і протилежному йому куту іншого, то такі трикутники рівні між собою.
- ✓ Якщо катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету і гіпотенузі іншого, то такі трикутники рівні між собою.

НЕРІВНІСТЬ ТРИКУТНИКА

Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін.

Кожна зі сторін трикутника більша за різницю двох інших його сторін.

ТЕМА 9

ФУНКЦІЇ

У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ ВИ:

- **ознайомитеся** з поняттями функції та її графіка, лінійної функції;
- **дізнаєтеся** про способи задання функцій;
- **навчитеся** знаходити область визначення та область значень деяких функцій, будувати графік лінійної функції.

§ 42. Функція. Область визначення та область значень функції. Способи задання функцій. Функціональна залежність між величинами як математична модель реальних процесів

Поняття функції

У житті ми часто стикаємося із залежностями між різними величинами. Наприклад, периметр квадрата залежить від довжини його сторони, площа прямокутника – від його вимірів, маса шматка крейди – від його об'єму, відстань, яку долає рухомий об'єкт, – від його швидкості та часу руху тощо.

Розглянемо приклади *залежностей між двома величинами*.

Приклад 1. Нехай сторона квадрата дорівнює a см, а його периметр – P см. Для кожного значення змінної a можна знайти відповідне значення змінної P. Наприклад,

якщо $a = 5$, то $P = 4 \cdot 5 = 20$;
якщо $a = 8$, то $P = 4 \cdot 8 = 32$;
якщо $a = 1{,}2$, то $P = 4 \cdot 1{,}2 = 4{,}8$.

Отже, периметр квадрата залежить від довжини його сторони. Математичну модель цієї залежності можна записати у вигляді формули $P = 4a$.

Оскільки кожному значенню довжини сторони квадрата відповідає певне значення його периметра, то кажуть, що маємо *відповідність* між довжиною сторони квадрата і його периметром (або *залежність між змінними* a і P). При цьому вважають, що значенню $a = 5$ *відповідає* значення $P = 20$, або значення $P = 20$ є *відповідним* значенню $a = 5$.

Змінну a, значення якої вибирають довільно, називають ***незалежною змінною***, а змінну P, кожне значення якої залежить від вибраного значення a, – ***залежною змінною***.

Приклад 2. Нехай автомобіль рухається зі сталою швидкістю 80 км/год. Відстань, яку він при цьому подолає, залежить від часу його руху.

Позначимо час руху автомобіля (у годинах) через t, а відстань, яку він подолав (у кілометрах), – через s. Для кожного значення змінної t ($t \geqslant 0$) можна знайти відповідне значення s. Наприклад,

якщо $t = 1{,}5$, то $s = 80 \cdot 1{,}5 = 120$;
якщо $t = 3$, то $s = 80 \cdot 3 = 240$;
якщо $t = 4{,}5$, то $s = 80 \cdot 4{,}5 = 360$.

Залежність змінної s від змінної t можна задати формулою $s = 80t$, де t – незалежна змінна, а s – залежна змінна.

У математиці зазвичай незалежну змінну позначають буквою x, а залежну змінну – буквою y. У прикладах, які ми розглянули, кожному значенню незалежної змінної відповідає *лише одне значення* залежної змінної.

Якщо кожному значенню незалежної змінної відповідає єдине значення залежної змінної, то таку залежність називають *функціональною залежністю*, або *функцією*.

Незалежну змінну ще називають ***аргументом***, а про залежну змінну кажуть, що вона є ***функцією*** від цього аргументу. У згаданих вище прикладах – периметр квадрата P є функцією від довжини його сторони a, а відстань s, яку подолав автомобіль зі сталою швидкістю, є функцією від часу руху t. Значення залежної змінної називають ***значенням функції***.

Область визначення та область значень функції

Усі значення, яких набуває незалежна змінна (аргумент), утворюють *область визначення функції*.
Усі значення, яких набуває залежна змінна (функція), утворюють *область значень функції*.

Наприклад, областю визначення функції у прикладі 1 є всі додатні числа a, тобто $a > 0$.

Областю визначення функції у прикладі 2 є всі невід'ємні числа t, тобто $t \geqslant 0$.

Область значень функції у прикладі 1 складається з усіх додатних чисел P, а область значень функції у прикладі 2 – з усіх невід'ємних чисел s, тобто $s \geqslant 0$.

Приклад 3. Функцію задано формулою $y = \dfrac{8}{x-2}$. Знайти:

1) область визначення функції;
2) значення функції, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює -2; 6; 10;
3) значення аргументу, за якого значення функції дорівнює -1.

Розв'язання. 1) Областю визначення функції є всі такі значення x, для яких дріб $\dfrac{8}{x-2}$ має зміст. Знаменник дробу дорівнює нулю для $x = 2$. Отже, областю визначення функції є всі числа, крім числа 2. Домовимся, що в таких випадках можна записувати: «$x \neq 2$», маючи на увазі, що всі значення, крім числа 2, утворюють область визначення функції.

2) Якщо $x = -2$, то $y = \dfrac{8}{-2-2} = \dfrac{8}{-4} = -2$; якщо $x = 6$, то $y = \dfrac{8}{6-2} = 2$; якщо $x = 10$, то $y = \dfrac{8}{10-2} = 1$.

3) Щоб знайти x, для якого $y = -1$, потрібно у формулу функції замість y підставити число -1. Тоді матимемо рівняння: $-1 = \dfrac{8}{x-2}$, коренем якого є число -6.

Отже, значення $y = -1$ функція набуває для $x = -6$.

Способи задання функції

Задавати функцію можна різними способами. У прикладах, які ми розглянули, *функції задано формулами*: $P = 4a$; $s = 80t$; $y = \dfrac{8}{x-2}$. Такий спосіб задання функції є досить зручним, бо дає змогу для довільного значення аргументу знаходити відповідне йому значення функції, та компактним, оскільки в більшості випадків формула має короткий запис.

Трапляються і функції, які для різних значень аргументу задаються різними формулами. Розглянемо таку функцію, її запис та як з нею працювати.

Приклад 4. Нехай дано функцію $y = \begin{cases} 2x - 7, \text{ якщо } x \leqslant -2; \\ x^2 + 1, \text{ якщо } x > -2. \end{cases}$

Цей запис означає, що для значень аргументу x таких, що $x \leqslant -2$, значення функції обчислюють за формулою $y = 2x - 7$, а для значень аргументу x таких, що $x > -2$, – за формулою $y = x^2 + 1$.

Наприклад, якщо $x = -3$, то $y = 2 \cdot (-3) - 7 = -13$;
якщо $x = -2$, то $y = 2 \cdot (-2) - 7 = -11$;
якщо $x = 0$, то $y = 0^2 + 1 = 1$;
якщо $x = 5$, то $y = 5^2 + 1 = 26$.

Задавати функцію можна і *таблицею*. Такий спосіб задання функції називають *табличним*. Розглянемо його на прикладі.

Приклад 5. Щогодини, починаючи з восьмої і до тринадцятої, вимірювали атмосферний тиск і отримані значення записували в таблицю:

Час t, год	8	9	10	11	12	13
Атмосферний тиск p, мм рт. ст.	753	754	756	754	753	752

Таблиця задає відповідність між часом вимірювання t і атмосферним тиском p. Ця відповідність є функцією, бо кожному значенню змінної t відповідає єдине значення змінної p. У цьому прикладі t є незалежною змінною, а p – залежною змінною. Область визначення функції складається із чисел 8; 9; 10; 11; 12; 13 (перший рядок таблиці), а область значень – із чисел 752; 753; 754; 756 (другий рядок таблиці).

Табличний спосіб задання функції зручний тим, що для знаходження значень функції не потрібно нічого обчислювати. Незручним є те, що таблиця зазвичай займає багато місця й може не містити саме того значення аргументу, яке нас цікавить, наприклад, якщо його немає в першому рядку таблиці. Зокрема, у прикладі 5 неможливо знайти значення функції, що відповідає значенню аргументу, наприклад, 8,5 або 14.

Задавати функцію можна також висловленням. Такий спосіб задання функції називають *описовим*, або *словесним*.

Приклад 6. Кожному натуральному числу поставимо у відповідність квадрат цього числа. Одержимо функцію, область визначення якої складається з усіх натуральних чисел, а область значень – з квадратів цих чисел.

Функціональна залежність як математична модель реальних процесів

Ми вже розглядали задачі практичного змісту, математичними моделями яких є рівняння. Моделями реальних процесів можуть бути і функціональні залежності.

Функціональні залежності, які ми розглянули у прикладах 2 і 5, є математичними моделями реальних процесів: модель руху автомобіля зі сталою швидкістю, модель вимірювання атмосферного тиску протягом деякого часу.

Надалі під час вивчення математики ми будемо неодноразово звертатися до математичних моделей реальних процесів.

А ще раніше...

Функція – одне з найважливіших понять сучасної математики.

Залежності між різними величинами цікавили ще давніх математиків. Зокрема, у Вавилоні було складено таблиці квадратів і кубів чисел, таблиці сум і добутків двох чисел, у Греції – знайдено співвідношення між елементами кола. У працях І. Ньютона, Р. Декарта, Г. Лейбніца, П. Ферма розглядалося багато функціональних залежностей, пов'язаних з геометрією та фізикою. Так, французькі математики П'єр Ферма (1601–1665) та Рене Декарт (1596–1650) розглядали функцію як залежність ординати точки кривої від її абсциси. Рене Декарт використовував поняття змінної величини.

Б. Больцано (1781–1848)

Термін «функція» (від латинського *functio* – виконання, звершення) для назви залежностей вперше ввів Готфрід Лейбніц (1646–1716). Він пов'язував функцію з графіками.

Швейцарські математики Йоганн Бернуллі (1667–1748) і його видатний учень Леонард Ейлер (1707–1783) розглядали функцію як аналітичний вираз, тобто вираз, утворений із змінних і чисел за допомогою тих чи тих аналітичних операцій (дій).

П. Г. Діріхле (1805–1859)

Поняття функції як залежності однієї змінної від іншої ввів чеський математик Бернард Больцано, а узагальнив – німецький математик Петер Густав Діріхле.

Найзагальніше сучасне означення функції було запропоновано в середині XX ст. Свій внесок у становлення цього поняття в ці часи зробили математики М. Гюнтер, І. Гельфанд, С. Соболєв, Г. Шилов.

Наведіть приклади функціональної залежності однієї змінної від іншої, назвіть у них незалежну змінну і залежну. Що називають функцією, аргументом функції, значенням функції? Що називають областю визначення функції і що – областю значень функції? Які є способи задання функції? Наведіть власний приклад функції, заданої формулою. Наведіть власний приклад функціональної залежності між величинами, що є математичною моделлю реальних процесів.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

42.1. (*Усно.*) Чи залежить периметр рівностороннього трикутника від довжини його сторони? Чи є периметр цього трикутника функцією від довжини сторони трикутника? Якщо так, то задайте цю функцію формулою за умови, що сторона трикутника дорівнює a.

42.2. (*Усно.*) Які з даних записів задають функцію? Укажіть для них незалежну змінну (аргумент) і залежну змінну:

1) $a = 4b + 2$; 2) $4 + 2x = 2x - 7$; 3) $y = \frac{1}{4x-1}$;

4) $18 : 3 - 6 = 0$; 5) $p = t - t^3 - 2$; 6) $4a - 2 > 0$.

42.3. Які з даних записів задають функцію? Укажіть для них незалежну змінну (аргумент) і залежну змінну:

1) $m = 5n^2 - 2$; 2) $y = x^2 - x + 2$; 3) $40 - 30 > 5$;

4) $4x - 1 = 7 - 4x$; 5) $d = \frac{m-1}{m^2+1}$; 6) $3 \cdot 8 = 2 \cdot 12$.

42.4. (*Усно.*) Площу круга знаходять за формулою $S = \pi r^2$, де r – радіус круга. Чи задає ця формула функцію? Якщо так, укажіть її аргумент та область визначення.

42.5. Площа прямокутника зі сторонами x см і 8 см дорівнює S. Виразіть формулою залежність S від x. Чи задає ця формула функцію?

2

42.6. Об’єм куба з ребром a см дорівнює V см³. Виразіть формулою залежність V від a. Чи задає ця формула функцію? Знайдіть за цією формулою значення V, якщо:

1) $a = 5$; 2) $a = 7$; 3) $a = \frac{3}{4}$.

42.7. Периметр прямокутника зі сторонами x дм і 6 дм дорівнює P дм. Запишіть формулу залежності P від x. Для значень аргументу $x = 2$; 4; 5; 15 знайдіть відповідні значення функції P.

42.8. (*Усно.*) Функцію задано формулою $y = -2x$.

1) Яка змінна є незалежною, а яка – залежною?

2) Знайдіть значення функції, що відповідають значенням аргументу -3; 0; 8.

42.9. Обчисліть значення функції, заданої формулою $y = 5x - 7$, для значень аргументу, що дорівнюють -2; 0; 5; 10.

42.10. Знайдіть значення функції, заданої формулою $y = \frac{20}{x}$, для значень аргументу, що дорівнюють -40; -10; 4; 5.

42.11. Функцію задано формулою $y = -\frac{6}{x}$. У таблиці наведено значення її аргументу. Перенесіть цю таблицю в зошит і заповніть її, обчисливши відповідні значення функції.

x	–12	–6	–5	–3	2	4	8	10
y								

42.12. Функцію задано формулою $y = 4x + 3$. У таблиці наведено значення її аргументу. Перенесіть цю таблицю в зошит і заповніть її, обчисливши відповідні значення функції.

x	–7	–5	–3	–1	2	4	6	8
y								

42.13. Складіть таблицю значень функції, заданої формулою $y = x^2 - 3$, для значень аргументу -3; -2; -1; 0; 1; 2.

42.14. Складіть таблицю значень функції, заданої формулою $y = 5 - x^2$, для значень аргументу -2; -1; 0; 1; 2; 3.

42.15. Поїзд, рухаючись зі швидкістю 65 км/год, долає за t год відстань s км. Задайте формулою залежність s від t. Обчисліть значення функції, які відповідають значенням аргументу, що дорівнюють 1; 2,4; 3; 5,8.

42.16. Кожному натуральному значенню n відповідає втричі більше за нього число N. Задайте формулою залежність N від n. Знайдіть значення функції, що відповідають значенням аргументу 2; 7; 13; 20.

42.17. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = 3x - 5$; 2) $y = \frac{2x+3}{5}$;

3) $y = \frac{8}{x}$; 4) $y = \frac{7}{x+2}$.

42.18. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = 2x + 3$; 2) $y = \frac{8x-3}{7}$;

3) $y = -\frac{6}{x}$; 4) $y = \frac{4}{x-3}$.

42.19. Знайдіть значення аргументу, для якого:
1) функція $y = -3x$ набуває значення -6; 9; 15;
2) функція $y = 5x - 1$ набуває значення -1; 4; 14.

42.20. Знайдіть значення аргументу, для якого:
1) функція $y = 4x$ набуває значення -8; 0; 12;
2) функція $y = 3 - 2x$ набуває значення -1; 3; 17.

42.21. Функцію задано таблицею:

x	-2	-1	0	1	2
y	-5	-3	-1	2	7

Знайдіть:
1) значення функції для $x = -2$; 0; 1;
2) значення аргументу, для якого значення функції дорівнює -3; 2; 7;
3) область визначення функції;
4) область значень функції.

42.22. Функцію задано таблицею:

x	1	2	3	4	5
y	-2	0	2	5	7

Знайдіть:
1) значення функції для значень аргументу 1; 3; 4;
2) значення аргументу, для якого $y = 0$; 5; 7;
3) область визначення функції;
4) область значень функції.

3

42.23. Функцію задано формулою $y = \frac{3}{4}x$. Перенесіть таблицю в зошит і заповніть її порожні комірки:

x	-8		1,6		20,8		
y		-9		$-\frac{3}{8}$		$1\frac{5}{7}$	20,7

42.24. Функцію задано формулою $y = \frac{3}{5}x$. Перенесіть таблицю в зошит і заповніть її порожні комірки:

x	–10		0		8,5	
y		–1,2		$\frac{3}{5}$		13,5

42.25. Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:

1) $y = \frac{5}{x^2 - 9}$; 2) $y = \frac{17}{x^2 + 4}$; 3) $y = \frac{9}{x(x-3)}$;

4) $y = \frac{7x+1}{x^2 + x}$; 5) $y = \frac{9}{(x-1)(x+4)}$; 6) $y = \frac{15}{x-2} + \frac{7}{x+3}$.

42.26. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{7}{x^2 - 4}$; 2) $y = \frac{13}{x^2 + 1}$; 3) $y = \frac{14}{(x+2)x}$;

4) $y = \frac{9}{x^2 - x}$; 5) $y = \frac{7}{(x+5)(x-3)}$; 6) $y = \frac{14}{x+3} + \frac{7}{x-1}$.

42.27. Початкова температура води була 20 °С. Під час нагрівання вона щохвилини підвищувалася на 5 °С.

1) Задайте формулою залежність температури води T від часу t її нагрівання.

2) Знайдіть значення T, що відповідає значенню аргументу $t = 7; 9; 10$.

3) Знайдіть значення t, яким відповідає $T = 45; 60; 70$.

4) Знайдіть значення t, за якого вода закипить.

42.28. Перебуваючи на відстані 10 км від міста, велосипедистка зупинилася. А через деякий час продовжила рух зі швидкістю 15 км/год.

1) Задайте формулою залежність відстані s (у км), яку загалом подолала велосипедистка, від часу t (у год), який відраховується після зупинки.

2) Знайдіть значення s, що відповідає значенню $t = 1; 2; 5$.

3) Знайдіть значення t, для якого $s = 34; 55; 70$.

42.29. У таблиці подано залежність функції y від аргументу x.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–3	–2	1	–3	5	1	6	–2	–3

Знайдіть: 1) значення y, якщо $x = -4; -1; 0; 3$;

2) значення x, яким відповідає $y = -3; -2; 5$;
3) значення x, якому відповідає рівне йому значення y;
4) область визначення функції;
5) область значень функції.

42.30. У таблиці подано залежність функції y від аргументу x.

x	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6	8
y	–1	2	4	2	4	7	2	–1	9

Знайдіть: 1) значення y, якщо $x = -8; -2; 4; 6$;
2) значення x, яким відповідає $y = -1; 4; 7$;
3) значення x, якому відповідає протилежне до x значення y;
4) область визначення функції;
5) область значень функції.

42.31. Складіть таблицю значень функції $y = 0{,}6 - 0{,}3x$, де $-2 \leqslant x \leqslant 5$, з кроком, що дорівнює 1. Використовуючи цю таблицю, укажіть:
1) значення функції, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює 0;
2) значення аргументу, для якого значення функції дорівнює 0.

4 **42.32.** Знайдіть значення функції для $x = -5; 0; 3$, якщо:

1) $y = \begin{cases} 4x - 3, & \text{якщо } x < 0, \\ -2x, & \text{якщо } x \geqslant 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 7, & \text{якщо } x \leqslant 1, \\ x^2, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$

42.33. Знайдіть значення функції для значення аргументу, яке дорівнює $-2; 0; 4$, якщо:

1) $y = \begin{cases} 7x - 2, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ -3x, & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 3, & \text{якщо } x \leqslant 2, \\ -x^2, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$

42.34. Знайдіть найменше значення функції $y = x^2 + 2x + 5$.

Вправи для повторення

42.35. Обчисліть вираз $\frac{8}{15} \cdot 0{,}5625 - \left(\frac{11}{24} + 1\frac{13}{36}\right) \cdot 1{,}44 + 2\frac{8}{25}$.

42.36. Якими одночленами потрібно заповнити клітинки, щоб рівність перетворилася на тотожність:
1) $(3x - 2y)(\square + \square) = 9x^2 - 4y^2$;
2) $(5m + \square)(5m - \square) = 25m^2 - 36$;
3) $(7c^2 - \square)(\square + 3p) = 49c^4 - 9p^2$;
4) $(4m + 9a^2)(\square - \square) = 81a^4 - 16m^2$?

42.37. Сторона квадрата на 4 см більша за одну сторону прямокутника і на 5 см менша за другу. Знайдіть сторону квадрата, якщо його площа на 10 см^2 більша за площу прямокутника.

Життєва математика

42.38. Відомо, що 60 кг макулатури зберігають одне дерево. Учні та учениці сьомих класів школи зібрали 300 кг макулатури. Скільки дерев зберегли учні та учениці?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

42.39. У трьох коробках лежать кульки: у першій – дві білого кольору (ББ), у другій – дві чорного кольору (ЧЧ), у третій – білого й чорного (БЧ). На коробках є таблички з написами: ББ, ЧЧ і БЧ, але вміст жодної з коробок не відповідає напису на її табличці. З якої коробки достатньо навмання взяти лише одну кульку, щоб визначити колір кульок, які лежать у кожній коробці?

§ 43. Графік функції. Графічний спосіб задання функції

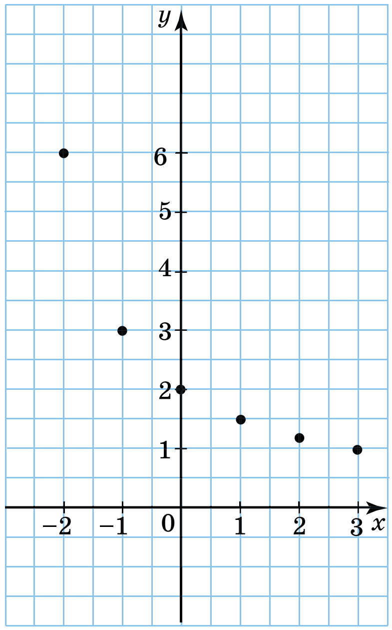
Поняття про графік функції

У 6 класі ми вже розглядали графік залежності між двома величинами. Розглянемо, що таке ***графік функції***.

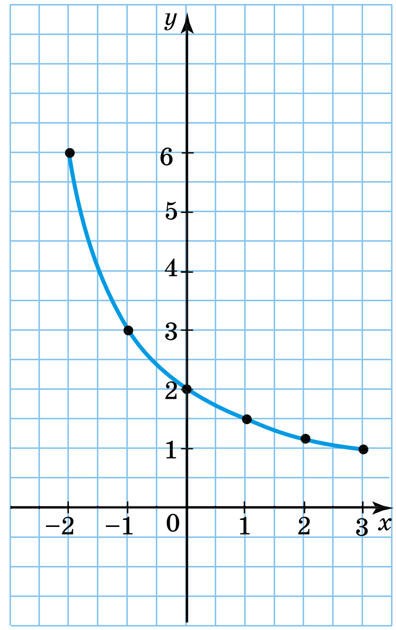
Приклад 1. Нехай дано функцію $y = \dfrac{6}{x+3}$, де $-2 \leqslant x \leqslant 3$. Знайдемо значення цієї функції для цілих значень аргументу й результати занесемо в таблицю:

x	–2	–1	0	1	2	3
y	6	3	2	1,5	1,2	1

Позначимо на координатній площині точки $(x;\ y)$, координати яких візьмемо з таблиці. Це точки (–2; 6), (–1; 3), (0; 2), (1; 1,5), (2; 1,2), (3; 1) (мал. 43.1). Якщо взяти інші значення x з проміжку від –2 до 3 і за формулою $y = \dfrac{6}{x+3}$ обчислити відповідні їм значення y, то одержимо інші пари значень x і y. Кожній із цих пар відповідає певна точка координатної площини. Усі такі



Мал. 43.1



Мал. 43.2

точки утворюють фігуру, яку називають *графіком функції* $y = \dfrac{6}{x+3}$, де $-2 \leqslant x \leqslant 3$ (мал. 43.2).

Графіком функції **називають фігуру, що складається з усіх точок координатної площини, абсциси яких – значення аргументу, а ординати – відповідні значення функції.**

Приклад 2. Побудувати графік функції $y = x^2 - 1$, якщо $-3 \leqslant x \leqslant 2$.

Розв'язання. Складемо таблицю значень функції для цілих значень аргументу:

x	–3	–2	–1	0	1	2
y	8	3	0	–1	0	3

Позначимо точки, координати яких подано в таблиці, на координатній площині та сполучимо їх плавною лінією (мал. 43.3). Одержимо графік функції $y = x^2 - 1$ для $-3 \leqslant x \leqslant 2$.

Зауважимо: що меншим буде крок (відстань) між значеннями аргументу, то щільніше розташуються точки на координатній площині, а отже, більш точним буде побудований графік.

Визначення окремих характеристик функції за її графіком

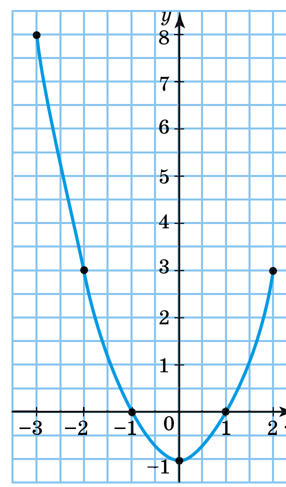
За графіком можна одразу визначити, для яких значень аргументу значення функції додатні, для яких – від'ємні, для яких дорівнюють нулю. За графіком можна також установити область визначення та область значень функції.

Нулем функції **називають таке значення аргументу, за якого значення функції дорівнює нулю.**

Зрозуміло, що нулі функції – це абсциси точок перетину графіка функції з віссю абсцис, бо ордината – це значення функції, і саме в цих точок вона дорівнює нулю.

Приклад 3. Використовуючи графік функції $y = x^2 - 1$, де $-3 \leqslant x \leqslant 2$, знайти: 1) нулі функції; 2) область значень функції; 3) значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень; 4) значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень.

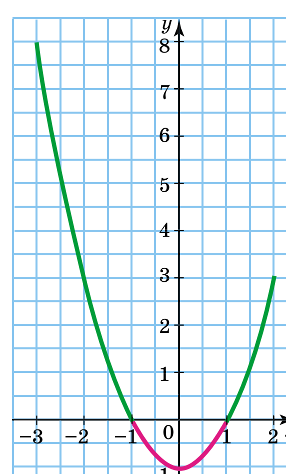
Розв'язання. Графік функції $y = x^2 - 1$ зображено на малюнку 43.3.



Мал. 43.3

1) Нулі функції – це абсциси точок перетину графіка функції з віссю x. Отже, $x = -1$ і $x = 1$ – нулі функції. Зауважимо, що нулі функції можна знайти й не використовуючи графік даної функції. Наприклад, достатньо розв'язати рівняння $x^2 - 1 = 0$.

2) Функція може набувати будь-яких значень від –1 до 8. Тому областю значень функції є всі такі значення y, що $-1 \leqslant y \leqslant 8$.



Мал. 43.4

3) Для значень x таких, що $-3 \leqslant x < -1$, точки графіка лежать вище від осі абсцис. Тому функція набуває додатних значень для $-3 \leqslant x < -1$. На малюнку 43.4 цю частину графіка позначено зеленим кольором. Так само вище від осі абсцис лежать точки графіка для $1 < x \leqslant 2$. Тому для $1 < x \leqslant 2$ функція знову набуває додатних значень (на малюнку 43.4 цю частину графіка та-

кож позначено зеленим кольором). Отже, для $-3 \leqslant x < -1$ та $1 < x \leqslant 2$ функція набуває додатних значень.

4) Для значень x таких, що $-1 < x < 1$, точки графіка лежать нижче від осі абсцис (на малюнку 43.4 цю частину графіка позначено червоним кольором). Тому для $-1 < x < 1$ функція набуває від'ємних значень.

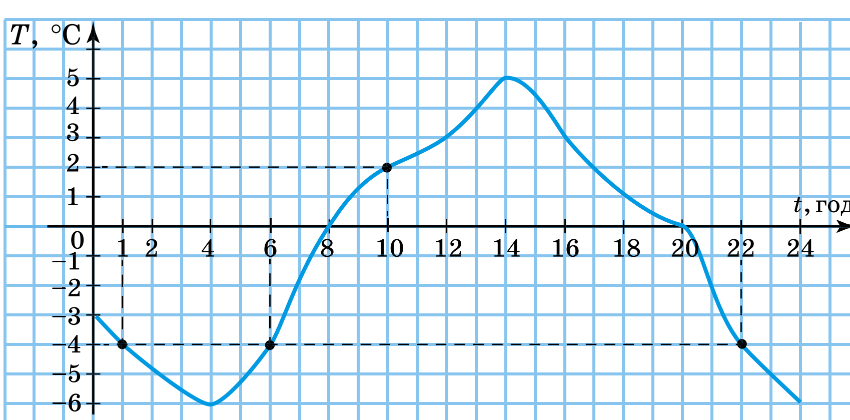
Графічний спосіб задання функції

Використовуючи графік функції, для будь-якого значення аргументу з області визначення можна знайти відповідне йому значення функції. Також за графіком можна скласти таблицю значень функції.

Так можна дійти висновку, що *функцію можна задати графіком*. Цей спосіб задання функції називають *графічним*. Він є зручним своєю наочністю, тому його часто використовують для відображення явищ, які супроводжують практичну діяльність людини або відбуваються в навколишньому світі.

Приклад 4. На малюнку 43.5 зображено графік зміни температури повітря протягом доби, одержаний за допомогою спеціального приладу – термографа. Використовуючи цей графік, знайти:

1) якою була температура о 10 год;
2) о котрій годині температура була –4 °C.

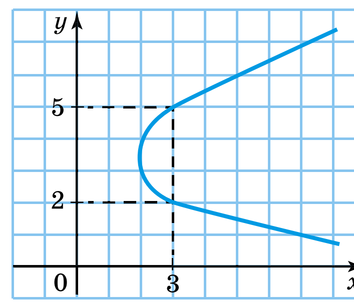


Мал. 43.5

Розв'язання. 1) Через точку осі t з координатами (10; 0) проведемо перпендикуляр до цієї осі (мал. 43.5). Точка перетину цього перпендикуляра з графіком температури має координати (10; 2). Отже, о 10 год температура повітря була 2 °C.

2) Через точку осі T з координатами (0; −4) проведемо перпендикуляр до цієї осі (мал. 43.5). Цей перпендикуляр перетинає графік у точках (1; −4), (6; −4) і (22; −4). Отже, температура повітря −4 °С була о 1 год, о 6 год і о 22 год.

Зауважимо, що не кожна фігура на координатній площині є графіком деякої функції. Наприклад, фігура на малюнку 43.6 не є графіком жодної з функцій, оскільки існують такі значення x, яким відповідають два значення y. Наприклад, значенню $x = 3$ відповідають значення $y = 2$ і $y = 5$.



Мал. 43.6

Це означає, що залежність між x і y, графік якої зображено на малюнку 43.6, не є функціональною через те, що існує хоча б одне значення x, якому відповідає більш ніж одне значення y. Графічно це означає, що існує хоча б одна пряма, перпендикулярна до осі абсцис, яка перетинає дану фігуру більше ніж в одній точці. Враховуючи, що при функціональній залежності кожному значенню аргументу ставиться у відповідність єдине значення функції, то кожна пряма, перпендикулярна до осі абсцис, має перетинати графік функції не більше ніж в одній точці.

Отже,

щоб фігура, яку зображено на координатній площині, була графіком деякої функції, необхідно, щоб кожна пряма, перпендикулярна до осі абсцис, перетинала цю фігуру не більше ніж в одній точці.

Що таке графік функції? ○ Як побудувати графік функції? ○ Поясніть, як за графіком знайти значення функції, що відповідає даному значенню аргументу, та значення аргументу, якому відповідає дане значення функції (на прикладі одного з графіків на малюнках 43.2, 43.3 і 43.5). ○ Як з'ясувати, що фігура на координатній площині є графіком функції?

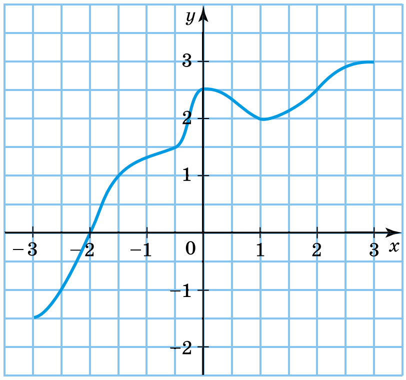
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

2

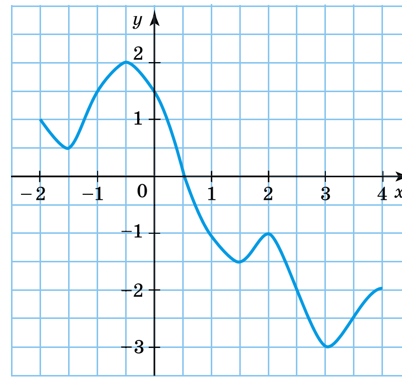
43.1. На малюнку 43.7 зображено графік функції. За графіком:
1) заповніть у зошиті таблицю:

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−0,5	0	1	2	3
y									

2) знайдіть область визначення та область значень функції.



Мал. 43.7



Мал. 43.8

43.2. На малюнку 43.8 зображено графік функції. За графіком:
1) заповніть у зошиті таблицю:

x	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y													

2) знайдіть область визначення та область значень функції.

43.3. Побудуйте графік функції $y = x - 3$, де $-2 \leqslant x \leqslant 5$, склавши таблицю для цілих значень аргументу.
1) Чи належить графіку функції точка $A(3; 0)$; точка $B(-1; 2)$?
2) Знайдіть за графіком значення функції, якщо $x = 2$; $x = 4$.
3) Знайдіть за графіком значення аргументу, якому відповідає значення функції $y = -3$; $y = 2$.

43.4. Побудуйте графік функції $y = x + 2$, де $-4 \leqslant x \leqslant 3$, склавши таблицю для цілих значень аргументу.
1) Чи належить графіку функції точка $C(2; 5)$; точка $D(-2; 0)$?
2) Знайдіть за графіком значення функції для $x = -3$; $x = 1$.
3) Знайдіть за графіком значення аргументу, якому відповідає значення функції $y = 1$; $y = 5$.

43.5. Не виконуючи побудови графіка, знайдіть нулі функції:
1) $y = 5x$;
2) $y = 3x - 6$;
3) $y = -\frac{x}{10}$;
4) $y = \frac{5 - x}{8}$.

43.6. Не будуючи графіка, знайдіть нулі функції:
1) $y = -3x$;
2) $y = 12 - 4x$;
3) $y = \frac{x}{3}$;
4) $y = \frac{x + 2}{4}$.

43.7. За графіком, який зображено на малюнку 43.5, знайдіть:
1) якою була температура повітря о 3 год; о 5 год; о 7 год; о 21 год;
2) о котрій годині температура повітря була −5 °C; 0 °C; 5 °C.

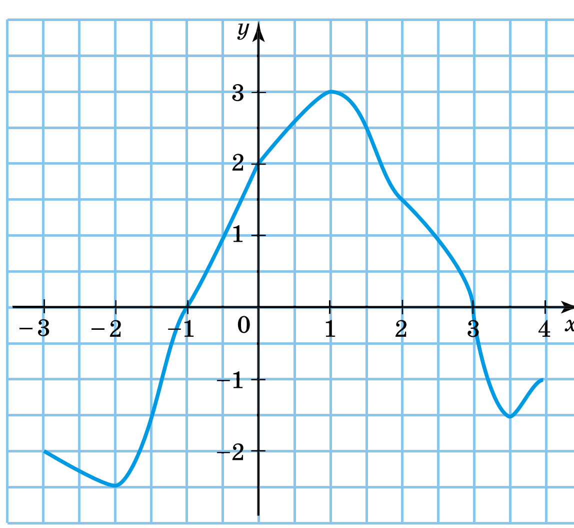
3

43.8. За графіком, який зображено на малюнку 43.5, знайдіть:
1) якою була температура повітря в 0 год; о 2 год; о 9 год; о 12 год; о 18 год;
2) о котрій годині температура повітря дорівнювала −6 °C; −2 °C; 1 °C; 3 °C;
3) якою була найнижча температура й о котрій годині;
4) якою була найвища температура й о котрій годині;
5) протягом якого часу температура підвищувалась;
6) протягом якого часу температура знижувалась;
7) протягом якого часу температура повітря була нижчою від 0 °C;
8) протягом якого часу температура повітря була вищою від 0 °C.

43.9. Не виконуючи побудови, з'ясуйте, чи належить графіку функції $y = x^2 - 3x$ точка:
1) (1; −2); 2) (−2; −2); 3) (0; −3); 4) (−1; 4).

43.10. Не виконуючи побудови графіка функції $y = 2x + x^2$, з'ясуйте, чи належить йому точка:
1) (1; 3); 2) (−1; 3); 3) (0; 0); 4) (−2; 4).

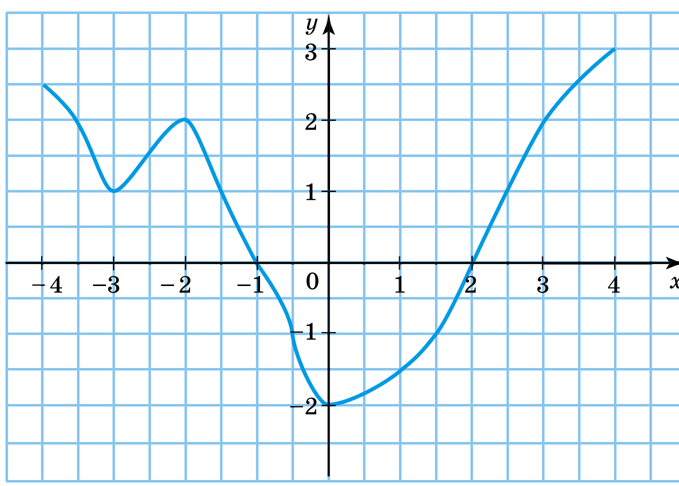
43.11. За графіком, який зображено на малюнку 43.9, знайдіть:
1) значення y, якщо $x = -3$; -2; $-0{,}5$; $1{,}5$; 4;



Мал. 43.9

2) значення x, яким відповідає $y = -2{,}5; -1{,}5; 1$;
3) нулі функції;
4) значення аргументу, за яких функція набуває додатних значень;
5) значення аргументу, за яких функція набуває від'ємних значень.

43.12. За графіком функції (мал. 43.10) знайдіть:
1) значення y, якщо $x = -3{,}5; -2; -1{,}5; 0; 1; 2{,}5$;
2) значення x, яким відповідає $y = -1; 1; 2; 3$;
3) нулі функції;
4) значення аргументу, за яких функція набуває від'ємних значень;
5) значення аргументу, за яких функція набуває додатних значень.



Мал. 43.10

43.13. Ламана ABC – графік деякої функції, причому $A(-3; 2)$, $B(1; 6)$, $C(4; 0)$. Побудуйте цей графік і за графіком знайдіть:
1) значення функції, які відповідають значенням $x = -2; 0; 1$;
2) значення аргументу, яким відповідає значення $y = 2; 4; 6$.

43.14. Ламана MNL є графіком деякої функції, причому $M(-2; -1)$, $N(2; 3)$, $L(6; -1)$. Побудуйте графік цієї функції і за графіком знайдіть:
1) значення функції, які відповідають значенням $x = -2; 0; 2; 5$;
2) значення аргументу, яким відповідають значення $y = -1; 1; 3$.

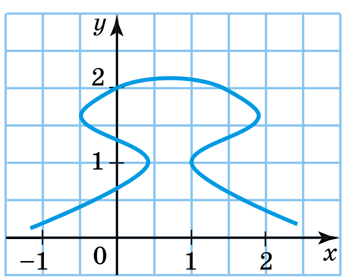
43.15. Не будуючи графіка, знайдіть нулі функції:
1) $y = x^2 - 4x$; 2) $y = 16 - x^2$; 3) $y = 2x^2 + 10x$.

43.16. Не будуючи графіка, знайдіть нулі функції:
1) $y = x^2 + 2x$; 2) $y = x^2 - 25$; 3) $y = 12x - 3x^2$.

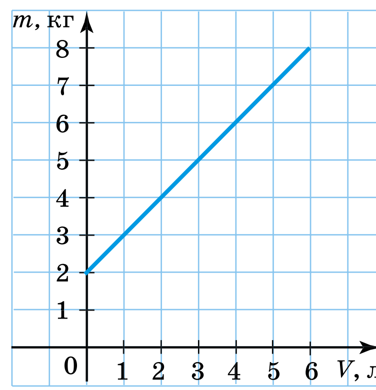
43.17. Побудуйте графік функції:
1) $y = \frac{8 - x}{2}$, де $-2 \leqslant x \leqslant 10$; 2) $y = x(4 + x)$, де $-5 \leqslant x \leqslant 1$.

43.18. Побудуйте графік функції:
1) $y = \frac{x + 3}{2}$, де $-5 \leqslant x \leqslant 7$; 2) $y = x\ (4 - x)$, де $-1 \leqslant x \leqslant 5$.

43.19. Чи є фігура на малюнку 43.11 графіком деякої функції?



Мал. 43.11



Мал. 43.12

4 **43.20.** На малюнку 43.12 зображено графік залежності маси m (у кг) відра з водою від об'єму V (у л) води в ньому. Знайдіть за графіком:
1) масу порожнього відра;
2) масу відра, у якому 4 л води;
3) масу 1 л води;
4) об'єм води у відрі, якщо маса відра з водою – 8 кг.

Вправи для повторення

43.21. Спростіть вираз:
1) $(a - 5)(a + 5) - a(a + 7)$;
2) $m(m - 4) + (9 - m)(m + 9)$;
3) $2a(a - b) - (a - b)^2$;
4) $(q + 5p)(5p - q) - (p - 5q)^2 - 10pq$.

43.22. Доведіть, що різниця між будь-яким трицифровим натуральним числом і сумою його цифр кратна числу 9.

Життєва математика

43.23. 1) Використання проточної води для миття посуду чи прання білизни призводить до марних витрат води в середньому до 15 л за хвилину. Скільки води можна зберегти під час півгодинного прання, якщо правильно ставитися до споживання води?

2) *Практична діяльність.* З'ясуйте, який тариф на воду (ціна за 1 м^3 води) у вашій місцевості, та обчисліть, скільки коштів за годину можна заощадити, якщо правильно ставитися до споживання води.

Цікаві задачі — поміркуй одначе

43.24. Доведіть, що якщо n – натуральне число ($n > 1$), то число $4^n - 3$ не може бути квадратом натурального числа.

§ 44. Лінійна функція, її графік і властивості

Поняття про лінійну функцію

Приклад 1. Нехай маса одного цвяха 4 г, а маса порожнього ящика – 600 г. Тоді залежність між масою m (у г) ящика із цвяхами та кількістю x цвяхів у ньому (x – натуральне число) можна задати формулою $m = 4x + 600$.

Приклад 2. Нехай щомісячна зарплата продавчині складається з окладу в розмірі 10 500 грн та премії в розмірі 1 % від вартості реалізованого товару. Тоді залежність між зарплатою y (у грн) і вартістю x (у грн) реалізованого товару можна задати формулою $y = 0{,}01x + 10\,500$, де $x > 0$.

В обох цих прикладах функції задано формулами вигляду $y = kx + l$, де k і l – деякі числа.

Лінійною **називають функцію вигляду $y = kx + l$, де x – незалежна змінна, k і l – деякі числа.**

Числа k і l називають ***коефіцієнтами лінійної функції.***

Графік лінійної функції

З'ясуємо, який вигляд має графік лінійної функції.

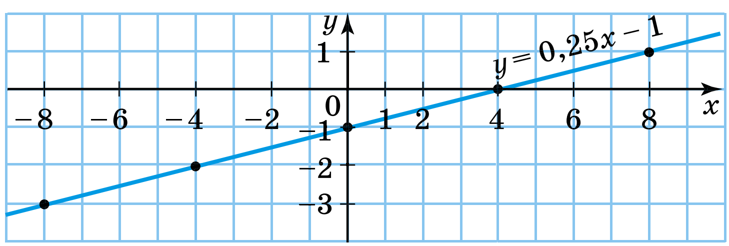
У формулі $y = kx + l$ незалежній змінній x можна надавати будь-яких значень, тому областю визначення лінійної функції є всі числа. Отже, для побудови графіка лінійної функції можна вибрати будь-які значення x, найкраще ті, що будуть зручними для обчислення значень y.

Приклад 3. Побудувати графік функції $y = 0{,}25x - 1$.

Розв'язання. Функція є лінійною. Складемо для неї таблицю кількох значень незалежної змінної x і відповідних їй значень функції y:

x	–8	–4	0	4	8
y	–3	–2	–1	0	1

Позначимо на координатній площині точки, координати яких отримано в таблиці. За допомогою лінійки легко впевнитися, що всі позначені точки лежать на одній прямій. Ця пряма є графіком лінійної функції $y = 0{,}25x - 1$ (мал. 44.1).



Мал. 44.1

Графіком будь-якої лінійної функції є *пряма*.

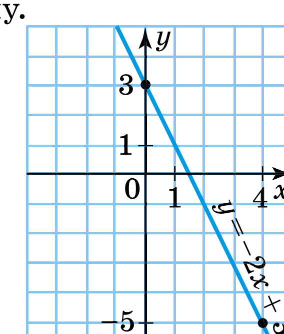
Оскільки пряма однозначно задається двома своїми точками, то для побудови прямої, що є графіком лінійної функції, достатньо знайти координати двох точок графіка, позначити їх на координатній площині та провести через них пряму.

Приклад 4. Побудувати графік функції $y = -2x + 3$.

Розв'язання. Складемо таблицю для двох довільних значень аргументу. Отримані точки позначимо на координатній площині та проведемо через них пряму.

x	0	4
y	3	–5

Графік функції $y = -2x + 3$ зображено на малюнку 44.2.



Мал. 44.2

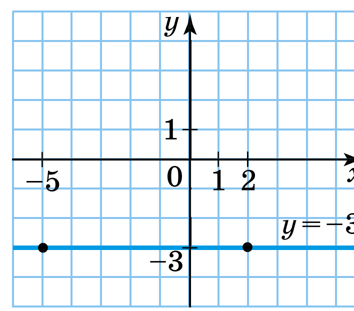
Якщо коефіцієнти лінійної функції є дробами, то для знаходження двох точок її графіка доцільно добирати такі цілі значення аргументу, щоб отримувати цілі значення функції. Наприклад, значення функції $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ будуть цілими для $x = -1$ та $x = 5$, і для побудови графіка отримаємо точки $(-1; -1)$ та $(5; 1)$.

Функція виду $y = l$

Якщо $k = 0$, формула $y = kx + l$ матиме вигляд $y = 0x + l$, тобто $y = l$. Лінійна функція вигляду $y = l$ набуває одних і тих самих значень для будь-яких значень x.

Приклад 5. Побудувати графік функції $y = -3$.

Розв'язання. Будь-якому значенню x відповідає одне й те саме значення y, що дорівнює -3. Графіком функції є пряма, яка проходить через точки вигляду $(x; -3)$, де x – будь-яке число. Виберемо будь-які дві з них, наприклад $(-5; -3)$ і $(2; -3)$, та проведемо через них пряму (мал. 44.3). Ця пряма і є графіком функції $y = -3$. Вона паралельна осі x.



Мал. 44.3

Пряма вигляду $y = l$ паралельна осі x.

Щоб побудувати графік функції $y = l$, достатньо позначити на осі y точку з координатами $(0; l)$ та провести через неї пряму, паралельну осі x.

Пряма пропорційність

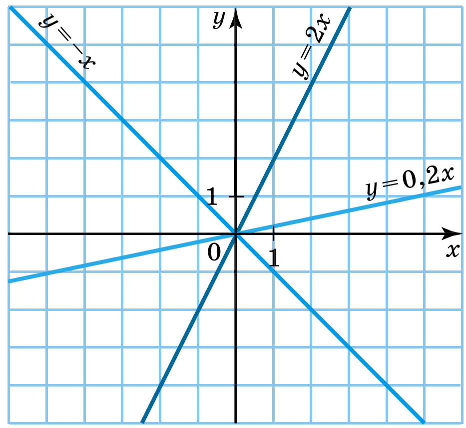
Для $l = 0$, $k \neq 0$ формула $y = kx + l$ набуває вигляду $y = kx$.

Функцію вигляду $y = kx$, де x – незалежна змінна, k – відмінне від нуля число, називають *прямою пропорційністю*.

Оскільки пряма пропорційність є окремим випадком лінійної функції і $y = 0$ для $x = 0$, то

графіком прямої пропорційності є пряма, що проходить через початок координат.

На малюнку 44.4 зображено графіки прямих пропорційностей $y = -x$, $y = 2x$ та $y = 0{,}2x$.



Мал. 44.4

Властивості лінійної функції

Узагальнимо *властивості лінійної функції* $y = kx + l$.

1. **Область визначення функції складається з усіх чисел.**
2. **Область значень функції для $k \neq 0$ складається з усіх чисел; для $k = 0$ лише з одного значення — числа l.**
3. **Графіком функції є пряма.**

Перетин графіка функції з осями координат

Однією з важливих властивостей функції є існування *точок перетину її графіка з осями координат*.

Якщо на координатній площині графік функції вже зображено, то такі точки можна знайти безпосередньо з малюнка. Наприклад, на малюнку 44.1 точкою перетину графіка функції $y = 0{,}25x - 1$ з віссю абсцис є точка (4; 0), а з віссю ординат – точка (0; –1). У такому разі кажуть, що точки перетину знайдено графічно.

Але графічний спосіб не завжди дає змогу знайти точні координати цих точок. Наприклад, на малюнку 44.2 визначити абсцису точки перетину графіка функції $y = -2x + 3$ з віссю абсцис можна лише наближено, наприклад так: $x \approx 1{,}5$.

Отже, за допомогою графіка функції знайти точні значення абсциси точки перетину з віссю абсцис або ординати точки перетину з віссю ординат не завжди можливо.

Для багатьох функцій знайти координати точок перетину графіка з осями координат можна і не виконуючи побудови графіка, зокрема, якщо функцію задано формулою. У такому разі кажуть, що координати точок перетину знайдено аналітично, причому знайдені значення будуть точними, а не наближеними.

Приклад 6. Не виконуючи побудови, знайти координати точок перетину графіка функції $y = 2x - 6$ з осями координат.

Розв'язання. 1) Точка перетину графіка з віссю абсцис належить цій осі, отже, її ордината має дорівнювати нулю. Тому для пошуку точки (або точок) перетину графіка функції з віссю абсцис достатньо у формулу, якою задано функцію, підставити значення $y = 0$ і розв'язати одержане рівняння.

Підставимо 0 замість y в рівняння $y = 2x - 6$. Одержимо рівняння $2x - 6 = 0$. Звідки $x = 3$. Отже, (3; 0) – точка перетину графіка функції з віссю абсцис.

2) Точка перетину графіка з віссю ординат належить цій осі, отже, абсциса такої точки має дорівнювати нулю. Тому для знаходження точки перетину графіка функції з віссю ординат достатньо у формулу, якою задано функцію, підставити значення $x = 0$ та виконати обчислення.

Підставимо 0 замість x у рівняння $y = 2x - 6$. Одержимо: $y = 2 \cdot 0 - 6 = -6$. Отже, (0; –6) – точка перетину графіка функції $y = 2x - 6$ з віссю ординат.

Відповідь: (3; 0); (0; –6).

Зауважимо, що існують функції, графіки яких не перетинають осі координат або хоча б одну з них.

Яку функцію називають лінійною? ○ Що є графіком лінійної функції? Як його побудувати? ○ Які властивості має лінійна функція? ○ Як знайти координати точок перетину графіка функції з осями координат? ○ Як побудувати графік функції $y = l$, де l – число? ○ Яку функцію називають прямою пропорційністю?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

44.1. (*Усно.*) Чи є лінійною функція:

1) $y = 2x - 3$; 2) $y = 4x - x^2$;

3) $y = 3$; 4) $y = \frac{4}{x}$;

5) $y = \frac{x}{3} - 1$; 6) $y = x - 1 - x^6$?

44.2. Які з даних функцій є лінійними:

1) $y = 2x^2 - 7$; 2) $y = 3x - 1$; 3) $y = \frac{10}{x}$;

4) $y = \frac{x}{2} + 3$; 5) $y = -4$; 6) $y = 7x - x^3$?

44.3. (*Усно.*) Які з функцій задають пряму пропорційність:

1) $y = 2x$; 2) $y = \frac{2}{x}$; 3) $y = x + 2$;

4) $y = 2$; 5) $y = -\frac{x}{2}$; 6) $y = \frac{x}{2}$?

44.4. Чи є прямою пропорційністю функція, яку задано формулою:

1) $y = -3x$; 2) $y = -3x + 1$; 3) $y = -\frac{3}{x}$;

4) $y = -3$; 5) $y = \frac{x}{3}$; 6) $y = -\frac{x}{3}$?

44.5. (*Усно.*) Назвіть коефіцієнти k і l для кожної з даних лінійних функцій:

1) $y = -0{,}8x + 7$; 2) $y = 6 - x$; 3) $y = \frac{x}{3}$;

4) $y = 2{,}4x$; 5) $y = -15$; 6) $y = 0$.

2

44.6. Ширина прямокутника дорівнює x см, а його довжина на 3 см більша за ширину. Задайте формулою залежність:
1) периметра прямокутника від його ширини;
2) площі прямокутника від його ширини.
Яка із цих залежностей є лінійною функцією?

44.7. Учениця купила щоденник за 15 грн і кілька зошитів по 4 грн. Задайте формулою залежність вартості покупки y (у грн) від кількості придбаних зошитів x. Чи є ця залежність лінійною функцією? Якою є область визначення цієї функції?

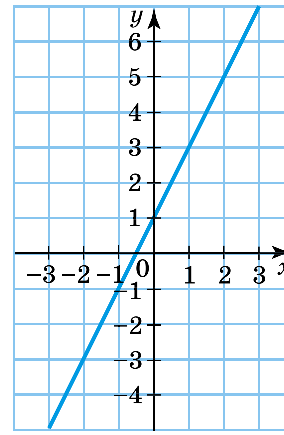
44.8. Учень мав 30 грн. За ці кошти він придбав x олівців, по 1,5 грн кожен, після чого в нього залишилося y грн. Задайте формулою залежність y від x. Чи є ця залежність лінійною функцією?

44.9. Лінійну функцію задано формулою $y = 0{,}5x + 3$. Знайдіть:
1) значення y, якщо $x = -12$; 0; 18;
2) значення x, для якого $y = -4$; 8; 2,5.

44.10. Дано лінійну функцію $y = -2x + 3$. Знайдіть значення:
1) y, якщо $x = 1{,}5; -4; -6{,}5$;
2) x, для якого $y = 5; 0; -8$.

44.11. Використовуючи графік функції на малюнку 44.5, заповніть у зошиті таблицю:

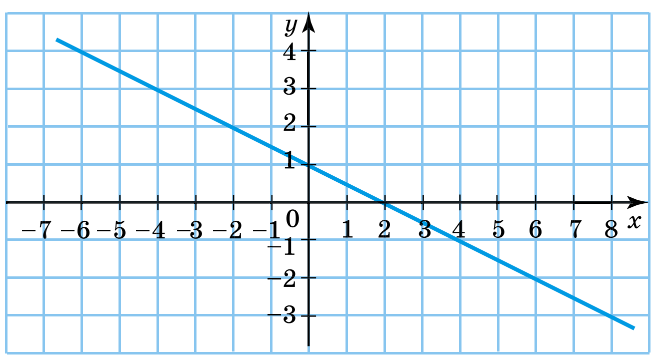
x	−2	0	1	3			
y					−5	−1	5



Мал. 44.5

44.12. Використовуючи графік функції на малюнку 44.6, заповніть у зошиті таблицю:

x	−6	−2	2			
y				−3	−1	3



Мал. 44.6

44.13. Запишіть координати будь-яких двох точок, що належать графіку функції $y = 5x - 2$.

44.14. Заповніть у зошиті таблицю значень лінійної функції та побудуйте її графік:
1) $y = -x + 2$;
2) $y = 2x - 3$.

x	0	4
y		

x		
y		

44.15. Заповніть у зошиті таблицю значень лінійної функції та побудуйте її графік:
1) $y = x - 3$;
2) $y = -3x + 1$.

x	0	3
y		

x		
y		

44.16. Побудуйте графік лінійної функції:
1) $y = x + 2$; 2) $y = -3x + 4$; 3) $y = 0{,}5x - 3$;
4) $y = \frac{2}{3}x - 1$; 5) $y = -1$; 6) $y = -x + 2{,}5$.

44.17. Побудуйте графік лінійної функції:
1) $y = x - 1$; 2) $y = -2x + 5$; 3) $y = -0{,}5x + 3$;
4) $y = \frac{3}{4}x + 1$; 5) $y = 4$; 6) $y = x - 1{,}5$.

44.18. Мотоциклістка рухається зі швидкістю 65 км/год. Задайте формулою залежність відстані s (у км) від часу t (у год), за який вона подолає цю відстань. Чи є ця залежність прямою пропорційністю?

44.19. Задайте формулою залежність:
1) довжини C кола від його радіуса r;
2) площі S круга, обмеженого цим колом, від радіуса r.
Яка із цих залежностей є прямою пропорційністю?

44.20. Запишіть формули будь-яких двох лінійних функцій, графіки яких проходять через точку $P(1; -5)$.

44.21. Серед даних функцій знайдіть ті, графіки яких проходять через точку $(1; -4)$:
1) $y = 4x$; 2) $y = 2x - 2$; 3) $y = 1$;
4) $y = -4$; 5) $y = -4x$; 6) $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$.

44.22. Не виконуючи побудови графіка функції $y = 1{,}8x - 7$, з'ясуйте, чи проходить цей графік через точку:
1) $A(0; 7)$; 2) $B(-5; -16)$; 3) $C(5; -2)$; 4) $D(10; 11)$.

44.23. Не будуючи графіка функції $y = -3x + 7$, з'ясуйте, чи належить йому точка:
1) $A(1; -4)$; 2) $B(0; 7)$; 3) $C(-1; 10)$; 4) $D(10; -37)$.

44.24. Не виконуючи побудови, знайдіть нулі функції:
1) $y = 2x - 6$; 2) $y = -\frac{1}{2}x + 8$; 3) $y = 7x$; 4) $y = -5x$.

44.25. Не будуючи графіка, знайдіть нулі функції:
1) $y = 4x + 12$; 2) $y = -8x$.

44.26. Побудуйте графік прямої пропорційності:
1) $y = x$; 2) $y = -2{,}5x$; 3) $y = -x$; 4) $y = \frac{1}{2}x$.

44.27. Побудуйте графік прямої пропорційності:

1) $y = 1{,}5x$;

2) $y = -2x$.

3 **44.28.** Побудуйте графік функції $y = 5 - 2{,}5x$. За графіком знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 0; 2;

2) значення аргументу, якщо значення функції дорівнює -5; 0; 10;

3) нулі функції;

4) значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень;

5) значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень;

6) точки перетину графіка з осями координат.

44.29. Побудуйте графік функції $y = 1{,}5x - 3$. За графіком знайдіть:

1) значення y, що відповідає значенню $x = -2$; 0; 4;

2) для якого значення x значення y дорівнює -3; 0; 6;

3) нулі функції;

4) значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень;

5) значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень;

6) точки перетину графіка з осями координат.

44.30. Графік функції $y = kx - 2$ проходить через точку $(6; -11)$. Знайдіть значення k.

44.31. Знайдіть значення l, якщо графік функції $y = -\frac{1}{5}x + l$ проходить через точку $M(10; -5)$.

44.32. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіка функції з осями координат:

1) $y = 1{,}5x - 20$; 2) $y = 5 - \frac{x}{4}$.

44.33. У яких точках перетинає осі координат графік функції:

1) $y = 0{,}2x - 40$; 2) $y = 18 - \frac{1}{3}x$?

44.34. Точка $A(0{,}7; 70)$ належить графіку прямої пропорційності. Задайте цю функцію формулою.

44.35. Задайте формулою пряму пропорційність, якщо її графік проходить через точку $B(-2; 18)$.

44.36. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{2}(6 - x)$; 2) $y = \frac{x-5}{5}$.

44.37. Побудуйте графіки функцій в одній системі координат і знайдіть координати точки їхнього перетину:

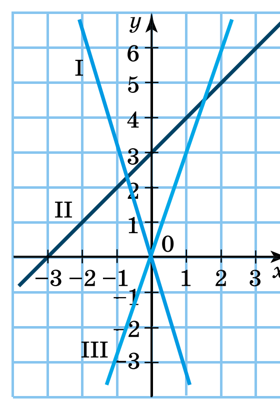
1) $y = -0{,}5x - 1$ і $y = x - 4$; 2) $y = -2$ і $y = 3x - 5$.

44.38. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = 1{,}5x - 4$ і $y = 2$ та знайдіть координати точки їхнього перетину.

44.39. Усі точки графіка функції $y = kx + l$ мають одну й ту саму ординату, яка дорівнює 5. Знайдіть k і l.

44.40. Графік функції $y = kx + l$ паралельний осі абсцис і проходить через точку $M(0; -5)$. Знайдіть k і l.

44.41. Установіть відповідність між функціями $y = 3x$, $y = -3x$ і $y = x + 3$ та їхніми графіками I–III, зображеними на малюнку 44.7.



Мал. 44.7

44.42. Функцію $y = 2x + 1$ задано для $-3 \leqslant x \leqslant 4$. Знайдіть область значень цієї функції.

44.43. Не будуючи графіка функції $y = 4x - 6$, знайдіть таку його точку, у якої:

1) абсциса дорівнює ординаті;
2) абсциса й ордината – протилежні числа;
3) абсциса вдвічі менша від ординати.

44.44. Побудуйте графік функції:

1) $y = \begin{cases} x + 1, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ 1, & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 2x, & \text{якщо } x < -2, \\ 3x + 2, & \text{якщо } x \geqslant -2. \end{cases}$

44.45. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} 2 - 3x, & \text{якщо } x < 1, \\ 2x - 3, & \text{якщо } x \geqslant 1. \end{cases}$

44.46. Побудуйте графік функції.

1) $y = |x|$; 2) $y = |x| + x$;
3) $y = 4x - |x|$; 4) $y = |2x| + 3x + 1$.

44.47. Побудуйте графік функції.

1) $y = -|x|$; 2) $y = |x| - x$;

3) $y = 2x + |x|$; 4) $y = |3x| - x - 1$.

Вправи для повторення

44.48. Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x + 5)^2 - (2x - 3)^2 = 16$;

2) $(7x + 1)^2 - (49x - 2)(x - 1) = -66$.

44.49. Спростіть вираз:

1) $(5m - 2)(5m + 2) - m(10m - 1) + \left(m - \frac{1}{2}\right)^2$;

2) $(a + 4y)^2 - (a - 2y)(a + 2y) - y(4a - 5y)$.

44.50. На столі лежить 73 зошити, а в коробці – 17 зошитів. Скільки зошитів потрібно перекласти зі стола в коробку, щоб у коробці їх стало вдвічі менше, ніж на столі?

44.51. Подайте вираз у вигляді квадрата двочлена, якщо це можливо:

1) $\frac{1}{9}p^2 + pq + 9p^2$; 2) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{15}xy + \frac{1}{25}y^2$;

3) $4x^2 - 20xy - 25y^2$; 4) $-36ab + 9a^2 + 36b^2$.

Життєва математика

44.52. Вкладниця відкрила в банку «Щасливий» депозит на 20 000 грн. Через рік їй було нараховано 3200 грн відсоткових коштів.

1) Який відсоток річних нараховує банк?

2) Після сплати податку на доходи фізичних осіб вкладниця отримала відсоткові кошти в сумі 2624 грн. Скільки відсотків складає податок на доходи фізичних осіб?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

44.53. Накресліть коло із центром у точці O, радіус якого дорівнює 25 мм. Проведіть діаметр кола AB та позначте точку M, що належить колу.

1) Виміряйте довжину діаметра AB та порівняйте її з радіусом.

2) Виміряйте градусну міру кута AMB.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

44.54. *Давня аравійська задача.* В Аравії помер старий. Усе своє майно, 17 верблюдів, він заповів своїм синам, причому старший мав одержати половину, середній – третину, а найменший – дев'яту частину цього майна. Після смерті батька сини не змогли виконати заповіт, бо 17 не ділилося без остачі ані на 2, ані на 3, ані на 9. Довго сперечалися брати, аж тут на верблюді під'їхав до них мудрець. Довідався про суперечку і дав братам слушну пораду, яка й допомогла розділити майно відповідно до батькового заповіту. Що саме порадив мудрець?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 9 (§§ 42–44)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Укажіть формулу, що задає функцію.

А. $x^2 + y^2 = xy$ **Б.** $y = \dfrac{4}{x-3}$

В. $x^2 + x + y = zy$ **Г.** $y = \dfrac{x-1}{y+2}$

2. Яка з функцій є лінійною?

А. $y = x - 2$ **Б.** $y = \dfrac{1}{x-2}$

В. $y = x^2 - 2$ **Г.** $y = x^3 - 2$

3. Укажіть функцію, що задає пряму пропорційність.

А. $y = x - 3$ **Б.** $y = \dfrac{2}{x}$

В. $y = 2x$ **Г.** $y = 2 + x$

2

4. Обчисліть значення функції $y = -\dfrac{20}{x}$ для значення аргументу, що дорівнює −4.

А. 4 **Б.** −4

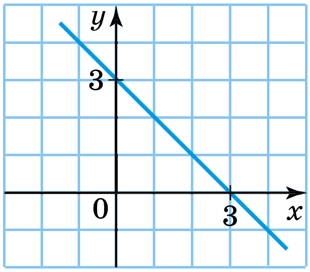
В. −5 **Г.** 5

5. Не виконуючи побудови, знайдіть нуль функції $y = \dfrac{1}{3}x - 2$.

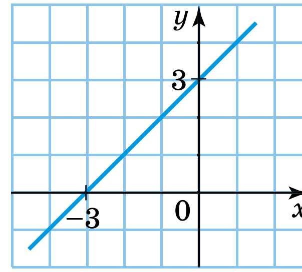
А. 2 **Б.** 4 **В.** 6 **Г.** −6

6. На якому з малюнків зображено графік функції $y = 3 - x$?

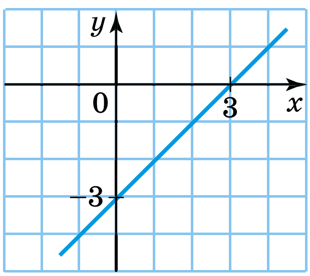
А.



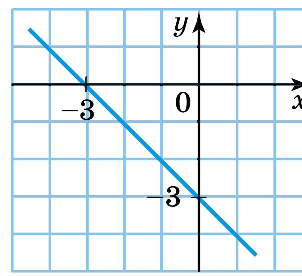
Б.



В.



Г.



7. Знайдіть область визначення функції $y = \dfrac{3}{x^2 + x}$.

А. Усі числа **Б.** Усі числа, крім 0
В. Усі числа, крім 0 і 1 **Г.** Усі числа, крім 0 і −1

8. Укажіть точку, що належить графіку функції $y = x^2 - 2x$.

А. (0; −2) **Б.** (1; −1)
В. (−2; 0) **Г.** (−1; −1)

9. Укажіть точку перетину графіка функції $y = 0{,}1x + 15$ з віссю абсцис.

А. (0; 15) **Б.** (150; 0)
В. (−150; 0) **Г.** Такої точки не існує

10. Знайдіть для $x = 2$ значення функції

$$y = \begin{cases} 7, & \text{якщо } x < 0, \\ x^2, & \text{якщо } 0 \leqslant x < 3, \\ 5x, & \text{якщо } x \geqslant 3. \end{cases}$$

А. 4 **Б.** 7
В. 10 **Г.** Неможливо знайти

11. Графік прямої пропорційності проходить через точку $P(2; -4)$. Укажіть точку, через яку також проходить цей графік.

А. (0; −2) **Б.** (3; 6) **В.** (−3; −6) **Г.** (3; −6)

12. Не будуючи графіка функції $y = 3x - 8$, знайдіть таку його точку, абсциса й ордината якої є протилежними числами.

А. $(-2; 2)$ **Б.** $(2; -2)$ **В.** $(4; -4)$ **Г.** $(-4; 4)$

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 **13.** Установіть відповідність між функціями (1–3) та точками, у яких графік функції перетинає осі координат (А–Г).

Функція	*Точки, у яких графік функції перетинає осі координат*
1. $y = 4 - 2x$	**А.** $(0; 4)$
2. $y = 4$	**Б.** $(0; 4)$, $(4; 0)$
3. $y = x - 4$	**В.** $(0; 4)$, $(2; 0)$
	Г. $(0; -4)$, $(4; 0)$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 42–44

1 **1.** Які з наведених формул задають функцію:

1) $y = x^2 + x$; 2) $y = \dfrac{x-1}{y+2}$;

3) $y = \dfrac{1}{x-8}$; 4) $xy = (x - y)^2$?

2. Чи є лінійною функція, яку задано формулою:

1) $y = 3x - 7$; 2) $y = x^2 - 5$; 3) $y = 4$; 4) $y = \dfrac{1}{2x-4}$?

3. Укажіть значення коефіцієнтів k і l для лінійної функції, заданої формулою:

1) $y = -2x + 6$; 2) $y = 7{,}4x$.

2 **4.** Функцію задано формулою $y = -2x + 7$. Знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 5;

2) значення аргументу, якщо значення функції дорівнює 3.

5. Побудуйте графік функції $y = 2x - 5$. За графіком знайдіть:

1) значення функції для $x = 4$;

2) значення аргументу, для якого $y = -3$.

6. Функцію задано формулою $y = 0{,}8x - 7{,}2$. Не виконуючи побудови:

1) знайдіть нулі функції;

2) з'ясуйте, чи проходить графік функції через точку $(10; 1)$.

3 **7.** Знайдіть область визначення функції $y = \dfrac{7}{x^2 - 5x}$.

8. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = -2{,}5x$ і $y = -5$ та знайдіть координати точки їх перетину.

4 **9.** Знайдіть найменше значення функції $y = x^2 - 6x + 11$.

Додаткові вправи

4 **10.** Функцію $y = 3x - 7$ задано для $-2 \leqslant x \leqslant 5$. Знайдіть область значень цієї функції.

11. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} 2x + 6, & \text{якщо } x < 0, \\ 6 - x, & \text{якщо } x \geqslant 0. \end{cases}$

За графіком знайдіть:

1) нулі функції;

2) значення аргументу, за яких функція набуває додатних значень;

3) значення аргументу, за яких функція набуває від'ємних значень.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 9

До § 42

1 **1.** Чи залежить площа квадрата від довжини його сторони? Чи є площа квадрата функцією від довжини сторони квадрата? Якщо так, то задайте цю функцію формулою за умови, що сторона квадрата дорівнює a.

2 **2.** Функції задано формулами $y = \dfrac{x+2}{x-3}$ і $g = \dfrac{x-4}{5}$. Заповніть у зошиті таблицю, обчисливши відповідні значення функцій.

x	–4	–2	0	2	4
y					
g					

3 **3.** Із села до міста, відстань між якими дорівнює 48 км, вирушив велосипедист зі швидкістю 14 км/год. Задайте формулою залежність змінної s від змінної t, де s – відстань, яку залишилося подолати велосипедисту до міста (у км), а t – час його руху (у год). За формулою знайдіть:

1) s, якщо $t = 1{,}5$; 2) t, якщо $s = 13$.

4 **4.** Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \dfrac{12}{9x^2 - 17x}$; 2) $y = \dfrac{x}{|x| - 1}$; 3) $y = \dfrac{2}{|x| + 5}$;

4) $y = \dfrac{9}{3 - |x - 1|}$; 5) $y = \dfrac{15}{|2x - 3| - 5}$; 6) $y = \dfrac{2}{1 - \dfrac{1}{x}}$.

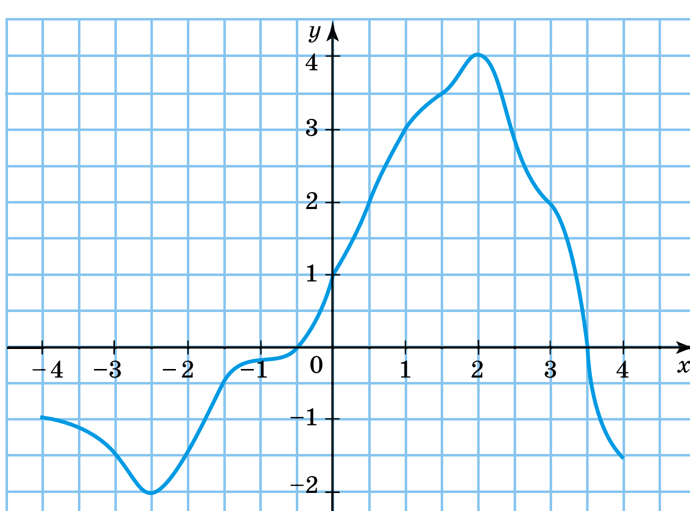
До § 43

2 **5.** Функцію задано формулою $y = 2x - 3$, де $-2 \leqslant x \leqslant 3$. Заповніть у зошиті таблицю значень функції і побудуйте її графік.

x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y											

3 **6.** На малюнку 1 зображено графік функції. За графіком знайдіть:

1) значення y, якщо $x = -3;\ -1{,}5;\ 0;\ 1{,}5;\ 3$;
2) значення x, для яких $y = -1{,}5;\ 2;\ 3$;
3) область визначення функції;
4) область значень функції;
5) нулі функції;
6) значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень;
7) значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень.



Мал. 1

4 **7.** Побудуйте графік функції:

1) $y = |x|$, де $-2 \leqslant x \leqslant 4$; 2) $y = |x + 3|$, де $-5 \leqslant x \leqslant 3$.

До § 44

1 **8.** Які з наведених функцій є лінійними:

1) $y = -3x$; 2) $y = -3x + 4$; 3) $y = -3x + 4x^2$;

4) $y = -3$; 5) $y = -\frac{3}{x}$; 6) $y = -\frac{1}{3}x$?

Які з них є прямою пропорційністю?

2 **9.** Побудуйте графік функції:

1) $y = 2x$; 2) $y = 1 - x$; 3) $y = 2$;

4) $y = 4x - 1$; 5) $y = -3x$; 6) $y = 0{,}5x + 2$.

3 **10.** Побудуйте графік прямої пропорційності $y = -\frac{3}{4}x$. Знайдіть за графіком:

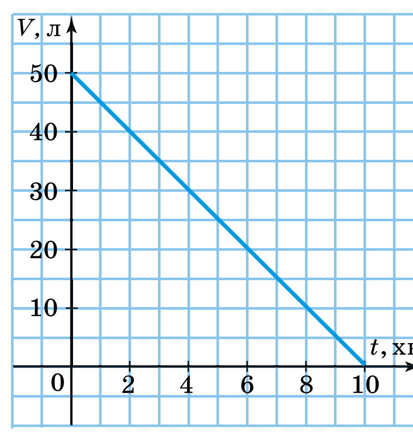
1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює −4; 0; 8;

2) значення аргументу, для якого значення функції дорівнює −6; 3; 6;

3) нулі функції;

4) значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень;

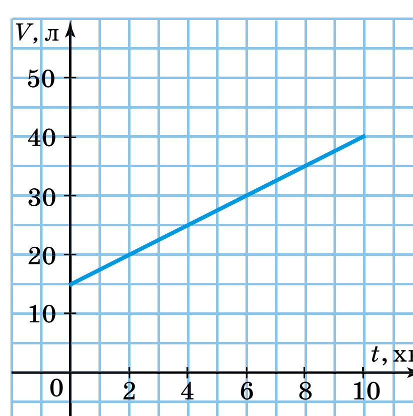
5) значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень.



Мал. 2

11. Графіки функцій $y = kx$ і $y = 2x + l$ перетинаються в точці $A(-2; 6)$. Знайдіть k і l.

4 **12.** На малюнках 2 і 3 зображено графіки двох процесів. Один з них описує процес наповнення резервуара водою, а другий – процес спорожнення резервуара від води. Який з графіків відповідає кожному зі згаданих процесів? За кожним з графіків знайдіть:



Мал. 3

1) скільки літрів води було в резервуарі в початковий момент часу;

2) скільки літрів води буде в резервуарі через 1 хв; через 6 хв; через 8 хв від початку процесу;

3) через скільки хвилин від початку процесу в резервуарі буде 25 л води;

4) скільки літрів води надходить (виливається) щохвилини.

Задайте формулою залежність об'єму V води в резервуарі від часу t для кожного із цих двох процесів.

13. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2|x|$;

2) $y = 5|x| + x$;

3) $y = \dfrac{|x| - 3x}{2}$;

4) $y = |x| + |-2x|$.

Головне в темі 9

ФУНКЦІЯ

Якщо кожному значенню незалежної змінної відповідає єдине значення залежної змінної, то таку залежність називають ***функціональною залежністю***, або ***функцією***.

ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ

Усі значення, яких набуває незалежна змінна (аргумент), утворюють ***область визначення функції***.

ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ

Усі значення, яких набуває залежна змінна (функція), утворюють ***область значень функції***.

ГРАФІК ФУНКЦІЇ

Графіком функції називають фігуру, яка складається з усіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції.

ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ

Лінійною називають функцію вигляду $y = kx + l$, де x – незалежна змінна, k і l – деякі числа.

Графіком будь-якої лінійної функції є ***пряма***.

Для побудови графіка лінійної функції достатньо знайти координати двох точок графіка.

Пряма вигляду $y = l$ паралельна осі x.

ПОБУДОВА ГРАФІКА ФУНКЦІЇ $y = l$

Щоб побудувати графік функції $y = l$, достатньо позначити на осі y точку з координатами $(0;\ l)$ і провести через неї пряму, паралельну осі x.

ПРЯМА ПРОПОРЦІЙНІСТЬ

Прямою пропорційністю називають функцію вигляду $y = kx$, де x – незалежна змінна, k – відмінне від нуля число.

Графіком прямої пропорційності є пряма, яка проходить через початок координат.

ТЕМА 10

КОЛО І КРУГ

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **пригадаєте** поняття кола, круга та їхніх елементів;
- **ознайомитеся** з поняттями дотичної до кола, серединного перпендикуляра до відрізка; кола, описаного навколо трикутника, і кола, вписаного в трикутник, центрального та вписаного кута; поняттям геометричного місця точок;
- **навчитеся** застосовувати означення та властивості до розв'язування задач.

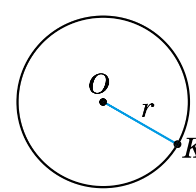
§ 45. Коло і круг

Коло та його елементи

Колом **називають геометричну фігуру, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки.**

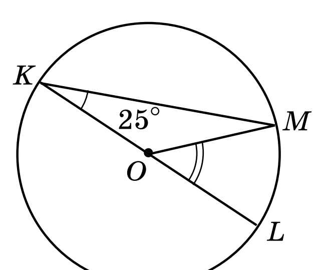
Цю точку називають ***центром*** кола. Відрізок, що сполучає центр з будь-якою точкою кола, називають ***радіусом***.

На малюнку зображено коло із центром у точці O і радіусом OK. З означення кола випливає, що всі радіуси одного й того самого кола мають однакову довжину. Радіус кола зазвичай позначають буквою r.



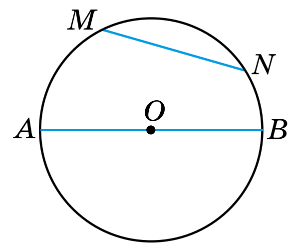
Приклад. Д а н о: O – центр кола, $\angle LKM = 25°$ (мал. 45.1).
З н а й т и: $\angle MOL$.

Розв'язання.
1) Оскільки точка O – центр кола, то $OK = OM$ (як радіуси). Тоді $\triangle KOM$ – рівнобедрений, отже, $\angle M = \angle K = 25°$.
2) $\angle MOL$ – зовнішній для $\triangle KOM$, тому, за властивістю зовнішнього кута, $\angle MOL = \angle K + \angle M = 2 \cdot 25° = 50°$.
Відповідь: 50°.



Мал. 45.1

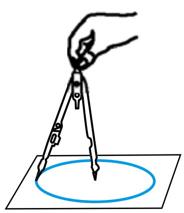
Відрізок, що сполучає дві точки кола, називають ***хордою.*** Хорду, що проходить через центр кола, називають ***діаметром.*** На малюнку 45.2 відрізок MN є хордою кола, а відрізок AB – його діаметром. Оскільки $AB = OA + OB$, доходимо висновку, що довжина діаметра вдвічі більша за довжину радіуса.

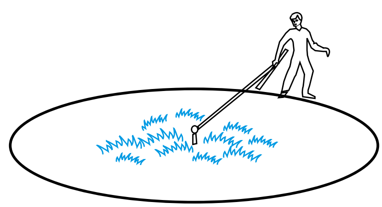


Мал. 45.2

Діаметр кола зазвичай позначають буквою d. Отже, $d = 2r$. Крім того, центр кола є серединою будь-якого діаметра.

Коло на папері зображують за допомогою циркуля (мал. 45.3). На місцевості для побудови кола можна використати мотузку (мал. 45.4).

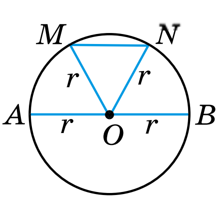

Мал. 45.3


Мал. 45.4

Властивості елементів кола

Розглянемо деякі властивості елементів кола.

Теорема 1 (про порівняння діаметра і хорди). Діаметр є найбільшою з хорд.

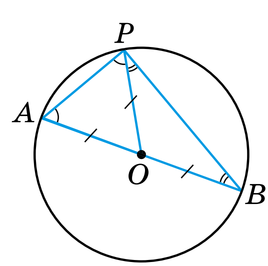


Мал. 45.5

Доведення. Нехай AB – довільний діаметр кола, радіус якого дорівнює r, а MN – відмінна від діаметра хорда кола (мал. 45.5). Доведемо, що $AB > MN$.

$AB = 2r$. У трикутнику MON, використовуючи нерівність трикутника, маємо $MN < MO + ON$. Отже, $MN < 2r$. Тому $AB > MN$. Теорему доведено. ■

Нехай точка P не належить відрізку AB. Тоді кут APB називають ***кутом, під яким відрізок AB видно з точки P*** (мал. 45.6).



Мал. 45.6

Теорема 2 (про кут, під яким видно діаметр з точки кола).
Діаметр з будь-якої точки кола видно під прямим кутом.

Доведення. Нехай AB – діаметр кола, а P – довільна точка кола (мал. 45.6). Доведемо, що $\angle APB = 90°$.

1) У трикутнику AOP $AO = PO$ (як радіуси). Тому $\triangle AOP$ – рівнобедрений і $\angle OAP = \angle OPA$.

2) Аналогічно $\angle OPB = \angle OBP$.

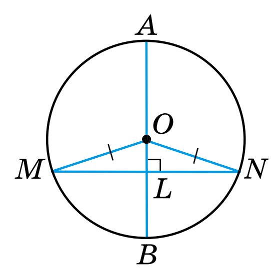
3) Отже, $\angle APB = \angle A + \angle B$. Але ж у $\triangle APB$: $\angle APB + \angle A + \angle B = 180°$. Тому $\angle APB + \angle APB = 180°$; $2\angle APB = 180°$; $\angle APB = 90°$. Теорему доведено. ■

Теорема 3 (властивість діаметра кола, перпендикулярного до хорди).
Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл.

Доведення. Нехай AB – діаметр кола, MN – відмінна від діаметра хорда кола, $AB \perp MN$ (мал. 45.7). Доведемо, що $ML = LN$, де L – точка перетину AB і MN.

$\triangle MON$ – рівнобедрений, бо $MO = ON$ (як радіуси), OL – його висота, проведена до основи. Тому OL є також і медіаною. Отже, $ML = LN$.

Якщо хорда MN є діаметром кола, то твердження теореми є очевидним. Теорему доведено. ■

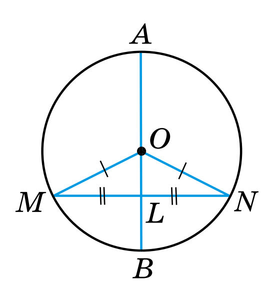


Мал. 45.7

Теорема 4 (властивість діаметра кола, що проходить через середину хорди).
Діаметр кола, що проходить через середину хорди, яка не є діаметром, перпендикулярний до цієї хорди.

Доведення. Нехай діаметр AB проходить через точку L – середину хорди MN, яка не є діаметром кола (мал. 45.8). Доведемо, що $AB \perp MN$.

$\triangle MON$ – рівнобедрений, бо $MO = NO$ (як радіуси). OL – медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи. Тому OL є також висотою. Отже, $OL \perp MN$, а тому і $AB \perp MN$. Теорему доведено. ■

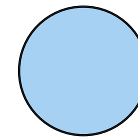


Мал. 45.8

Круг і його елементи

Коло разом з його внутрішньою областю називають *кругом*.

На малюнку 45.9 зображено круг.



Мал. 45.9

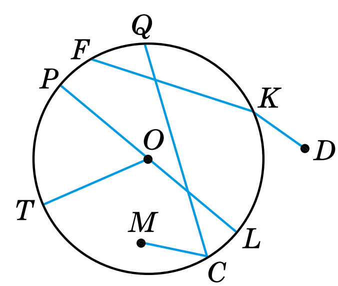
Центром, *радіусом*, *діаметром*, *хордою круга* називають відповідно центр, радіус, діаметр, хорду кола, яке є межею даного круга.

Що називають колом; центром кола; радіусом кола? ○ Який відрізок називають хордою кола, а який – діаметром кола? ○ Що називають кругом? ○ Сформулюйте та доведіть теореми про властивості елементів кола.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

45.1. (*Усно.*) Точка O – центр кола (мал. 45.10). Які з відрізків на малюнку є:
1) хордами кола;
2) діаметрами кола;
3) радіусами кола?



Мал. 45.10

45.2. Знайдіть на малюнку 45.10 хорду, що проходить через центр кола. Як називають таку хорду?

45.3. Обчисліть діаметр кола, якщо його радіус дорівнює:
1) 4 см; 2) 3,7 дм.

45.4. Знайдіть діаметр кола, якщо його радіус дорівнює:
1) 7 мм; 2) 4,8 см.

45.5. Знайдіть радіус кола, якщо його діаметр дорівнює:
1) 8 дм; 2) 2,6 см.

45.6. Обчисліть радіус кола, якщо його діаметр дорівнює:
1) 18 см; 2) 3,8 дм.

2

45.7. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 4 см. Проведіть у ньому діаметр MN і хорду MK. Знайдіть $\angle NKM$.

45.8. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 3,6 см. Проведіть у ньому діаметр AB та хорду BD. Перевірте за допомогою косинця чи транспортира, що $\angle BDA$ – прямий.

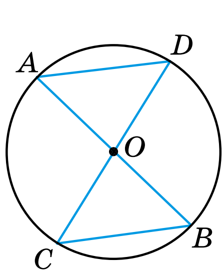
45.9. Усередині кола взято довільну точку, відмінну від центра. Скільки діаметрів і скільки хорд можна провести через цю точку?

45.10. На колі взято довільну точку. Скільки діаметрів і скільки хорд можна через неї провести?

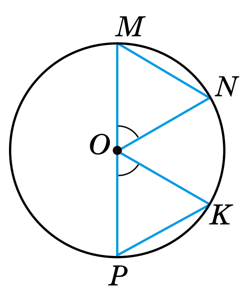
45.11. Радіус кола дорівнює 5 см. Чи може хорда цього кола дорівнювати:
1) 2 см; 2) 5 см; 3) 7 см;
4) 9,8 см; 5) 10,2 см; 6) 93 мм?

45.12. Радіус кола дорівнює 4 дм. Чи може хорда цього кола дорівнювати:
1) 1 дм; 2) 4 дм; 3) 6,7 дм;
4) 7,95 дм; 5) 8,3 дм; 6) 89 см?

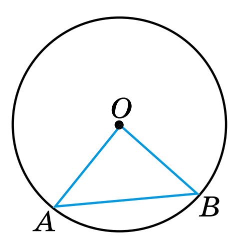
45.13. У колі проведено діаметри AB і CD (мал. 45.11). Доведіть, що $\triangle AOD = \triangle BOC$.



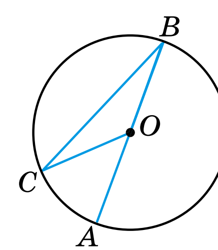
Мал. 45.11



Мал. 45.12



Мал. 45.13



Мал. 45.14

45.14. У колі із центром O проведено хорди MN і PK та діаметр PM. $\angle POK = \angle MON$ (мал. 45.12). Доведіть, що $\triangle MON = \triangle POK$.

45.15. На малюнку 45.13 точка O – центр кола. Знайдіть градусну міру:
1) кута O, якщо $\angle A = 52°$; 2) кута B, якщо $\angle O = 94°$.

45.16. На малюнку 45.13 точка O – центр кола. Знайдіть градусну міру:
1) кута O, якщо $\angle B = 48°$;
2) кута A, якщо $\angle O = 102°$.

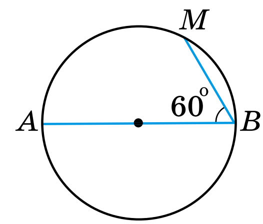
45.17. На малюнку 45.14 точка O – центр кола, $\angle COA = 32°$. Знайдіть $\angle CBA$.

45.18. На малюнку 45.14 точка O – центр кола, $\angle BCO = 18°$. Знайдіть $\angle AOC$.

45.19. Дано коло радіуса 5 см. 1) Проведіть у ньому хорду 6 см завдовжки. Скільки таких хорд можна провести?
2) Точка A належить даному колу. Скільки хорд 6 см завдовжки можна провести з даної точки?

45.20. У колі на малюнку 45.15 AB – діаметр, $\angle ABM = 60°$, $BM = 5$ см. Знайдіть діаметр кола.

45.21. У колі на малюнку 45.15 AB – діаметр, $\angle ABM = 60°$, $AB = 18$ см. Знайдіть довжину хорди MB.



Мал. 45.15

4

45.22. Доведіть, що коли хорди рівновіддалені від центра кола, то вони між собою рівні.

45.23. Доведіть, що рівні хорди кола рівновіддалені від його центра.

45.24. Хорда кола перетинає його діаметр під кутом 30° і ділиться діаметром на відрізки 4 см і 7 см завдовжки. Знайдіть відстань від кінців хорди до прямої, що містить діаметр кола.

Вправи для повторення

45.25. Побудуйте пряму a, точку M на відстані 3 см від прямої та точку N на відстані 2 см від прямої так, щоб відрізок MN перетинав пряму.

45.26. Два рівних між собою тупих кути мають спільну сторону, а дві інші сторони взаємно перпендикулярні. Знайдіть градусну міру тупого кута.

45.27. Доведіть рівність двох гострокутних рівнобедрених трикутників за основою і висотою, проведеною до бічної сторони.

Життєва математика

45.28. Скільки потрібно робітників для перенесення дубової балки розміром 6,5 м × 30 см × 45 см? Кожен робітник може підняти в середньому 70 кг. Щільність дуба – 810 кг/м^3.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

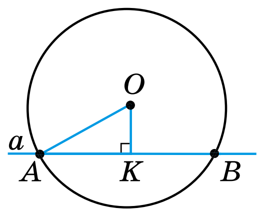
45.29. У коробці шоколадні цукерки квадратної форми викладено у вигляді квадрата в один шар. Марійка з'їла всі цукерки по периметру квадрата – усього 20 цукерок. Скільки цукерок залишилось у коробці?

§ 46. Дотична до кола, її властивості

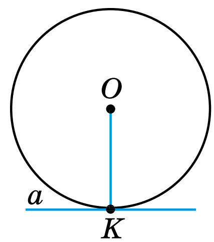
Взаємне розміщення прямої та кола

Розглянемо взаємне розміщення прямої та кола.

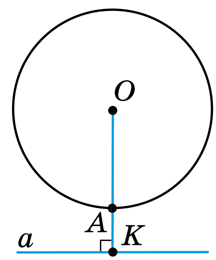
Пряма і коло можуть мати дві спільні точки (мал. 46.1), одну спільну точку (мал. 46.2) або не мати спільних точок (мал. 46.3).



Мал. 46.1



Мал. 46.2



Мал. 46.3

Пряму, яка має дві спільні точки з колом, називають ***січною***. На малюнку 46.1 *OK* – відстань від центра кола – точки *O* – до січної. У прямокутному трикутнику *OKA* сторона *OK* є катетом, а *AO* – гіпотенузою. Тому $OK < OA$. Отже, *відстань від центра кола до січної менша від радіуса*.

Дотичною **до кола називають пряму, яка має з колом лише одну спільну точку. Цю точку називають *точкою дотику*.**

На малюнку 46.2 пряма *a* – дотична до кола, *K* – точка дотику.

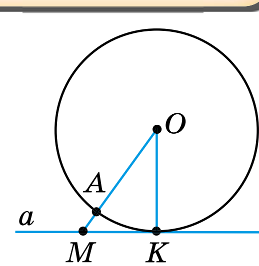
Якщо пряма і коло не мають спільних точок, то відстань *OK* більша за радіус кола *OA* (мал. 46.3). *Відстань від центра кола до прямої, яка не перетинає це коло, більша за радіус.*

Властивість дотичної

Теорема 1 (властивість дотичної).
Дотична до кола є перпендикулярною до радіуса, який проведений у точку дотику.

Доведення. Нехай пряма *a* дотична до кола із центром у точці *O*, точка *K* – точка дотику (мал. 46.4). Доведемо, що $a \perp OK$.

Припустимо, що пряма *a* не є перпендикулярною до *OK*. Проведемо з точки *O* перпендикуляр *OM* до прямої *a*. Тоді *OM* – катет прямокутного трикутника *KOM*. Оскільки у прямої



Мал. 46.4

з колом лише одна спільна точка K, то точка M, що належить прямій a, лежить поза колом. Тому довжина відрізка OM більша за довжину відрізка OA, який є радіусом кола. Оскільки $OA = OK$ (як радіуси), то $OM > OK$. Але, за припущенням, OM – катет прямокутного трикутника KOM, а OK – його гіпотенуза. Прийшли до протиріччя зі співвідношенням між катетом і гіпотенузою прямокутного трикутника (див. § 40, властивість 2).

Отже, наше припущення є неправильним, тому $a \perp OK$.

Теорему доведено. ■

Н **Наслідок. Відстань від центра кола до дотичної до цього кола дорівнює радіусу кола.**

Приклад 1. Пряма AK дотикається до кола в точці K (мал. 46.5). Знайти кут KOL, якщо $\angle AKL = 130°$.

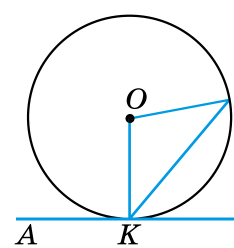
Розв'язання. 1) Оскільки AK – дотична до кола і точка K – точка дотику, то $AK \perp KO$, тобто $\angle AKO = 90°$.

2) $\angle OKL = \angle AKL - \angle AKO = 130° - 90° = 40°$.

3) $OK = OL$ (як радіуси кола), $\triangle OKL$ – рівнобедрений; $\angle L = \angle OKL = 40°$.

4) Тоді $\angle KOL = 180° - 2 \cdot 40° = 100°$.

Відповідь: $100°$.

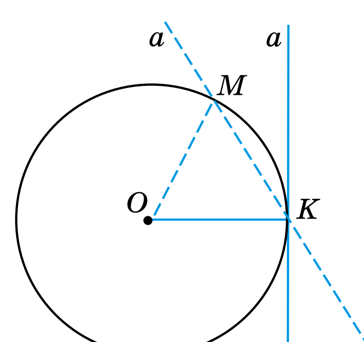


Мал. 46.5

Т Теорема 2 (обернена до теореми про властивість дотичної). **Якщо пряма проходить через кінець радіуса кола і перпендикулярна до цього радіуса, то ця пряма є дотичною до цього кола.**

Доведення. Нехай OK – радіус кола із центром у точці O. Пряма a проходить через точку K так, що $a \perp OK$ (мал. 46.6). Доведемо, що a – дотична до кола.

Припустимо, що пряма a має з колом ще одну спільну точку – точку M. Тоді $OK = OM$ (як радіуси) і $\triangle OMK$ – рівнобедрений. $\angle OMK = \angle OKM = 90°$. Отримали, що в трикутнику OMK є два прямих кути, що суперечить теоремі про суму кутів трикутника.



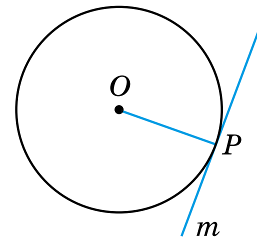
Мал. 46.6

Наше припущення неправильне. Отже, пряма a не має інших спільних точок з колом, окрім точки K. Тому пряма a є дотичною до кола.

Теорему доведено. ■

Приклад 2. Через дану точку P кола із центром O провести дотичну до цього кола (мал. 46.7).

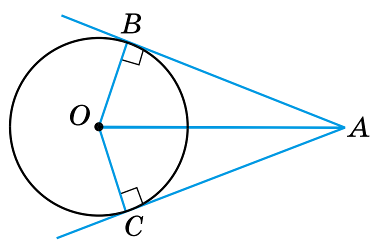
Розв'язання. Проведемо радіус OP, а потім побудуємо пряму m, перпендикулярну до радіуса (наприклад, за допомогою косинця). За теоремою 2 пряма m є дотичною до кола.



Мал. 46.7

Властивість відрізків дотичних, проведених з однієї точки

Розглянемо дві дотичні до кола з центром у точці O, які проходять через точку A й дотикаються до кола в точках B і C (мал. 46.8). Відрізки AB і AC називають *відрізками дотичних, проведених з точки* A.



Мал. 46.8

Теорема 3 (властивість відрізків дотичних, проведених з однієї точки). Відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола, рівні між собою.

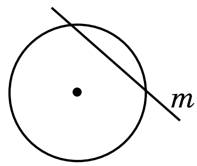
Доведення. На малюнку 46.8 трикутники OBA і OCA – прямокутні, $OB = OC$ (як радіуси), OA – спільна сторона цих трикутників. $\triangle OBA = \triangle OCA$ (за катетом і гіпотенузою). Тому $AB = AC$. Теорему доведено. ■

○ Яким може бути взаємне розміщення кола і прямої? ○ Яку пряму називають січною до кола? ○ Що більше: відстань від центра кола до січної чи радіус кола? ○ Що більше: відстань від центра кола до прямої, яка не перетинає коло, чи радіус? ○ Яку пряму називають дотичною до кола? ○ Сформулюйте та доведіть властивість дотичної. ○ Сформулюйте та доведіть властивість, обернену до теореми про властивість дотичної. ○ Сформулюйте та доведіть теорему про властивість відрізків дотичних, проведених з однієї точки.

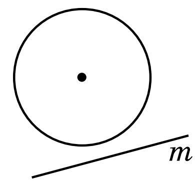
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

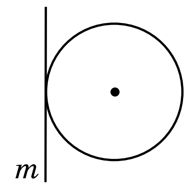
46.1. (*Усно.*) На якому з малюнків 46.9–46.11 пряма m є дотичною до кола, а на якому – січною?



Мал. 46.9



Мал. 46.10



Мал. 46.11

46.2. (*Усно.*) Скільки різних дотичних можна провести до кола через точку, що лежить:
1) на колі; 2) поза колом; 3) усередині кола?

2

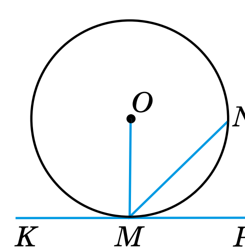
46.3. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 3 см, позначте на ньому точку P. За допомогою косинця проведіть через точку P дотичну до цього кола.

46.4. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 3,5 см, позначте на ньому точку M. За допомогою косинця або транспортира проведіть дотичну через точку M до цього кола.

46.5. Радіус кола дорівнює 6 см. Як розміщені пряма a і коло, якщо відстань від центра кола до прямої дорівнює:
1) 4 см; 2) 6 см; 3) 8 см?

46.6. Радіус кола дорівнює 3 дм. Як розміщені пряма b і коло, якщо відстань від центра кола до прямої дорівнює:
1) 3,7 дм; 2) 3 дм; 3) 2,7 дм?

46.7. На малюнку 46.12 KP – дотична до кола, точка O – центр кола. Знайдіть:
1) $\angle OMN$, якщо $\angle NMP = 40°$;
2) $\angle KMN$, якщо $\angle OMN = 48°$.



Мал. 46.12

46.8. На малюнку 46.12 KP – дотична до кола, точка O – центр кола. Знайдіть:
1) $\angle NMP$, якщо $\angle OMN = 53°$;
2) $\angle OMN$, якщо $\angle KMN = 130°$.

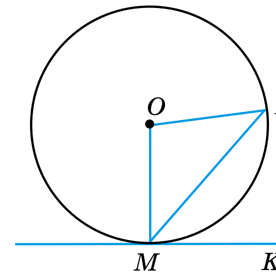
3

46.9. З точки A до кола із центром у точці O проведено дві дотичні AB і AC (B і C – точки дотику). Доведіть, що промінь OA – бісектриса кута BOC.

46.10. З точки P до кола із центром у точці Q проведено дотичні PM і PN. Доведіть, що промінь PQ – бісектриса кута MPN.

46.11. Пряма MK – дотична до кола, точка O – центр кола (мал. 46.13). Знайдіть $\angle NMK$, якщо $\angle MON = 82°$.

46.12. Пряма MK – дотична до кола, точка O – центр кола (мал. 46.13). Знайдіть $\angle NOM$, якщо $\angle KMN = 53°$.



Мал. 46.13

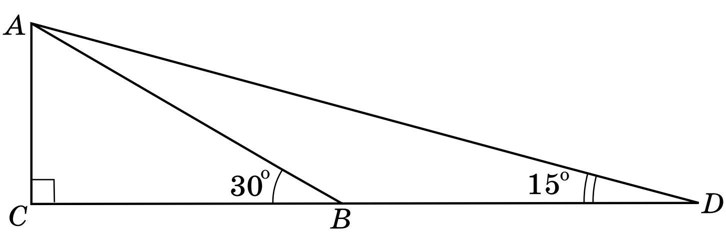
4 **46.13.** З точки M, що лежить поза колом, проведено дві дотичні. Відстань від точки M до центра кола вдвічі більша за радіус кола. Знайдіть кут між дотичними.

46.14. Прямі MN і MK дотикаються до кола із центром O в точках N і K. Знайдіть NK, якщо $\angle OMN = 30°$, $MN = 7$ см.

Вправи для повторення

46.15. Один з кутів трикутника дорівнює половині зовнішнього кута, не суміжного з ним. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.

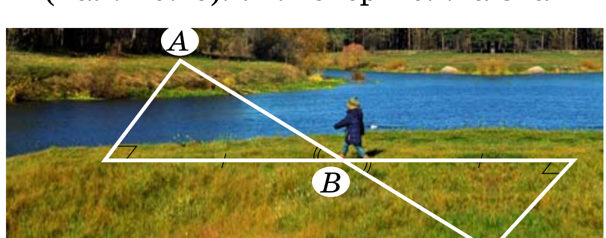
46.16. На малюнку 46.14: $\angle C = 90°$, $\angle ABC = 30°$, $\angle ADB = 15°$, $AC = 6$ см. Знайдіть BD.



Мал. 46.14

Життєва математика

46.17. Щоб визначити відстань від спостерігача B до недоступного дерева A, що росте на другому березі, було виконано побудови (мал. 46.15). Як тепер можна знайти відстань BA?



Мал. 46.15

Цікаві задачі – поміркуй одначе

46.18. Поставте п'ять шашок на шахову дошку (розмір якої 8×8) так, щоб будь-який квадрат, що складається з дев'яти клітинок, містив тільки одну шашку.

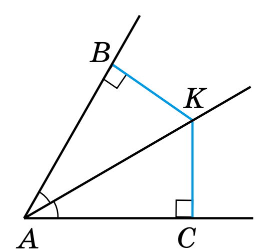
§ 47. Коло, вписане у трикутник

Властивість бісектриси кута

Розглянемо важливу властивість бісектриси кута.

Теорема 1 (властивість бісектриси кута).
Будь-яка точка бісектриси кута рівновіддалена від сторін цього кута.

Доведення. Виберемо на бісектрисі кута A довільну точку K і проведемо з точки K перпендикуляри KB і KC до сторін кута (мал. 47.1). Тоді KB і KC – відстані від точки K до сторін кута A. Доведемо, що $KB = KC$.



Мал. 47.1

Розглянемо $\triangle AKB$ і $\triangle AKC$ ($\angle B = \angle C = 90°$). AK – їхня спільна гіпотенуза, $\angle BAK = \angle CAK$ (бо AK – бісектриса).

Отже, $\triangle AKB = \triangle AKC$ (за гіпотенузою і гострим кутом). Тому $KB = KC$.

Теорему доведено. ■

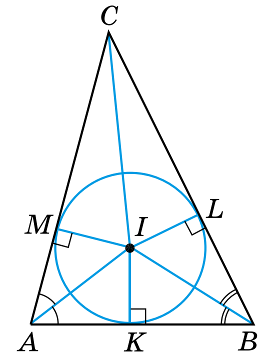
Коло, вписане у трикутник, та його існування

Коло **називають** ***вписаним у трикутник*****, якщо воно дотикається до всіх сторін цього трикутника.**

При цьому трикутник називають ***описаним навколо кола***.

Теорема 2 (про коло, вписане у трикутник).
У будь-який трикутник можна вписати коло.

Доведення. Розглянемо довільний $\triangle ABC$. Нехай бісектриси кутів A і B цього трикутника перетинаються в точці I (мал. 47.2). Доведемо, що ця точка є центром вписаного у трикутник кола.



Мал. 47.2

1) Оскільки точка I лежить на бісектрисі кута A, то вона рівновіддалена від сторін AB і AC трикутника, тобто $IM = IK$, де M і K – основи перпендикулярів, проведених з точки I до сторін AC і AB відповідно.

2) Аналогічно $IK = IL$, де L – основа перпендикуляра, проведеного з точки I до сторони BC.

3) Отже, $IM = IK = IL$. Тому коло із центром у точці I, радіус якого IM, проходить через точки M, K і L. Сторони трикутника ABC дотикаються до цього кола в точках M, K і L, оскільки перпендикулярні до радіусів IM, IK і IL.

4) Тому коло із центром у точці I, радіус якого IM, є вписаним у $\triangle ABC$.

Теорему доведено. ■

Н **Наслідок 1. Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.**

Доведення. За доведенням попередньої теореми точка I – точка перетину бісектрис кутів A і B трикутника ABC. Доведемо, що бісектриса кута C також проходить через точку I.

Розглянемо прямокутні трикутники CMI і CLI (мал. 47.2).

Оскільки $IM = IL$, а CI – спільна гіпотенуза цих трикутників, то $\triangle CMI = \triangle CLI$ (за катетом і гіпотенузою). Тоді $\angle MCI = \angle LCI$ (як відповідні кути рівних трикутників), а CI – бісектриса кута C трикутника ABC.

Отже, бісектриси всіх трьох кутів трикутника ABC проходять через точку I, тобто всі три бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.

Наслідок доведено. ■

Нагадаємо, що точку перетину бісектрис трикутника називають *інцентром*.

Н **Наслідок 2. Центром кола, вписаного у трикутник, є точка перетину бісектрис цього трикутника.**

Приклад. Коло, вписане у $\triangle ABC$, дотикається до сторони AB у точці K, до сторони BC – у точці L, а до сторони CA – у точці M. Довести, що:

$AK = AM = p - BC$, $BK = BL = p - AC$, $CM = CL = p - AB$,

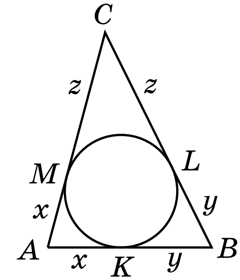
де $p = \dfrac{AB + AC + BC}{2}$ – півпериметр трикутника ABC.

Доведення. 1) За властивістю відрізків дотичних, проведених з однієї точки, маємо: $AM = AK$, $BK = BL$, $CL = CM$ (мал. 47.3).

2) Позначимо $AM = AK = x$, $BK = BL = y$, $CL = CM = z$. Тоді $P_{ABC} = 2x + 2y + 2z = 2(x + y + z)$. Тому $p = x + y + z$, звідки $x = p - (y + z)$; тобто $x = p - BC$.

3) Маємо: $AM = AK = p - BC$.

Аналогічно доводиться, що $BK = BL = p - AC$, $CM = CL = p - AB$. ■



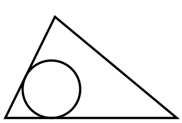
Мал. 47.3

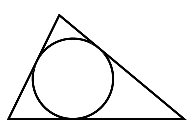
Сформулюйте та доведіть властивість бісектриси кута. Яке коло називають вписаним у трикутник? Сформулюйте та доведіть теорему про коло, вписане у трикутник, та наслідок 1 з неї. Сформулюйте наслідок 2.

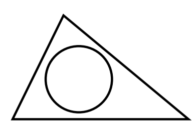
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

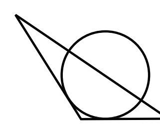
1

47.1. (*Усно.*) На яких з малюнків 47.4–47.7 зображено коло, вписане у трикутник?


Мал. 47.4


Мал. 47.5


Мал. 47.6


Мал. 47.7

2

47.2. Накресліть гострокутний трикутник. За допомогою транспортира, циркуля і лінійки побудуйте коло, вписане в цей трикутник.

47.3. Накресліть прямокутний трикутник. За допомогою транспортира, циркуля і лінійки побудуйте коло, вписане в цей трикутник.

47.4. У $\triangle ABC$ вписано коло із центром у точці I (мал. 47.2). Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $\angle IBK = 35°$, $\angle MCI = 25°$.

47.5. У $\triangle ABC$ вписано коло із центром у точці I (мал. 47.2). $\angle CAB = 70°$, $\angle CBA = 60°$. Знайдіть $\angle MCI$.

3

47.6. На малюнку 47.2 точка I – центр кола, вписаного в різносторонній трикутник ABC, M, K і L – точки дотику. Знайдіть усі пари рівних між собою трикутників на цьому малюнку.

47.7. Доведіть, що центр кола, яке дотикається до сторін кута, лежить на бісектрисі цього кута.

47.8. Накресліть кут градусної міри 110°. За допомогою циркуля, косинця і транспортира впишіть у нього коло довільного радіуса, тобто побудуйте коло, яке дотикається до сторін даного кута.

47.9. Накресліть кут градусної міри 70°. За допомогою циркуля, косинця і транспортира впишіть у нього коло довільного радіуса.

47.10. У трикутнику центр вписаного кола лежить на медіані. Доведіть, що це рівнобедрений трикутник.

47.11. У трикутнику центр вписаного кола лежить на висоті. Доведіть, що цей трикутник є рівнобедреним.

4

47.12. У $\triangle ABC$ вписано коло, яке дотикається до сторін AB, AC і BC у точках P, F і M відповідно. Знайдіть AP, PB, BM, MC, CF і FA, якщо $AB = 8$ см, $BC = 6$ см, $AC = 12$ см.

47.13. Знайдіть довжини сторін трикутника, якщо точки дотику кола, вписаного в цей трикутник, ділять його сторони на відрізки, три з яких дорівнюють 4 см, 6 см і 8 см.

47.14. Коло, вписане в рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки 3 см і 4 см, починаючи від основи. Знайдіть периметр трикутника.

47.15. Коло, вписане в рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки 5 см і 7 см, починаючи від вершини, що протилежна основі. Знайдіть периметр трикутника.

Вправи для повторення

47.16. Доведіть, що висоти, проведені до бічних сторін гострокутного рівнобедреного трикутника, між собою рівні.

47.17. Гострі кути прямокутного трикутника відносяться як 2 : 3. Знайдіть кут між бісектрисою і висотою, проведеними з вершини прямого кута.

Життєва математика

47.18. Яка швидкість поїзда (у км/год), якщо діаметр його колеса дорівнює 120 см і воно робить 360 обертів за хвилину? (Прийміть $\pi \approx 3$.)

Цікаві задачі — поміркуй одначе

47.19. Квадрат розрізали на вісім квадратів. Чи обов'язково п'ять з них рівні між собою?

§ 48. Коло, описане навколо трикутника

Серединний перпендикуляр і його властивість

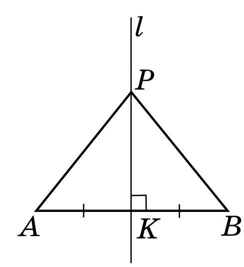
Серединним перпендикуляром до відрізка **називають пряму, що проходить через середину відрізка перпендикулярно до нього.**

На малюнку 48.1 пряма l – серединний перпендикуляр до відрізка AB.

Теорема 1 (**властивість серединного перпендикуляра до відрізка**). **Кожна точка серединного перпендикуляра до відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка.**

Доведення. Нехай пряма l – серединний перпендикуляр до відрізка AB, K – середина цього відрізка (мал. 48.1). Розглянемо довільну точку P серединного перпендикуляра й доведемо, що $PA = PB$.

Якщо точка P збігається з K, то рівність $PA = PB$ очевидна. Якщо точка P відмінна від K, то прямокутні трикутники PKA і PKB рівні між собою за двома катетами. Тому $PA = PB$. Теорему доведено. ■



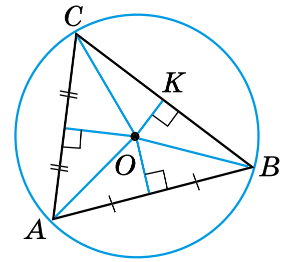
Мал. 48.1

Коло, описане навколо трикутника, та його існування

Коло **називають** ***описаним навколо трикутника*****, якщо воно проходить через усі вершини цього трикутника.**

При цьому трикутник називають *вписаним у коло*.

Теорема 2 (**про коло, описане навколо трикутника**). **Навколо будь-якого трикутника можна описати коло.**



Мал. 48.2

Доведення. Розглянемо $\triangle ABC$. Нехай серединні перпендикуляри до сторін AB і AC цього трикутника перетинаються в точці O (мал. 48.2). Доведемо, що точка O є центром описаного навколо трикутника кола.

1) Точка O лежить на серединному перпендикулярі до AB, тому вона рівновіддалена від вершин A і B, тобто $OA = OB$.

2) Аналогічно $OA = OC$, оскільки точка O лежить на серединному перпендикулярі до AC.

3) Маємо: $OA = OB = OC$. Тому коло із центром у точці O проходить через вершини A, B і C трикутника ABC, а відрізки OA, OB і OC є його радіусами. Отже, це коло є описаним навколо трикутника ABC.

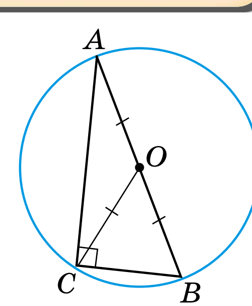
Теорему доведено. ■

Н **Наслідок 1. Серединні перпендикуляри до сторін трикутника перетинаються в одній точці.**

Доведення. Проведемо з точки O перпендикуляр OK до сторони BC (мал. 48.2). Цей перпендикуляр є висотою рівнобедреного трикутника OBC, що проведена до основи BC. Тому він також є і медіаною. Відрізок OK лежить на серединному перпендикулярі до сторони BC. Отже, усі три серединні перпендикуляри трикутника ABC проходять через точку O, тобто перетинаються в одній точці.

Наслідок доведено. ■

Н **Наслідок 2. Центром кола, описаного навколо трикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів до його сторін.**



Мал. 48.3

Приклад. Довести, що центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи, а радіус цього кола дорівнює половині гіпотенузи.

Доведення. Нехай $\triangle ABC$ – прямокутний ($\angle C = 90°$), CO – його медіана (мал. 48.3).

1) Оскільки медіана прямокутного трикутника, що проведена до гіпотенузи, дорівнює по-

ловині гіпотенузи (див. § 40, властивість 5), то $CO = \dfrac{AB}{2}$. Але $AO = OB$. Тому $AO = BO = CO$.

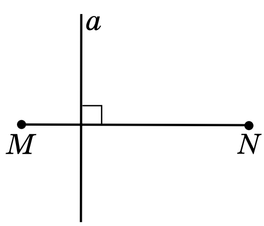
2) Отже, точка O рівновіддалена від вершин трикутника ABC. Тому коло, центром якого є точка O, а радіусом – OA, проходить через усі вершини трикутника ABC. Отже, коло, центром якого є середина гіпотенузи, а радіус дорівнює половині гіпотенузи, є описаним навколо прямокутного трикутника ABC. ■

Що називають серединним перпендикуляром до відрізка? ○ Сформулюйте та доведіть властивість серединного перпендикуляра до відрізка. ○ Яке коло називають описаним навколо трикутника? ○ Сформулюйте та доведіть теорему про коло, описане навколо трикутника, та наслідок 1 з неї. ○ Яка саме точка є центром кола, описаного навколо трикутника?

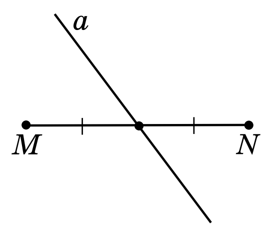
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

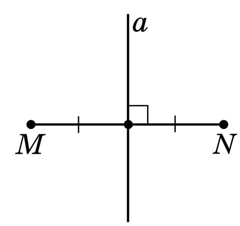
48.1. (*Усно.*) На яких з малюнків 48.4–48.6 пряма a є серединним перпендикуляром до відрізка MN?



Мал. 48.4

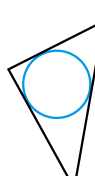


Мал. 48.5

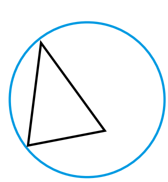


Мал. 48.6

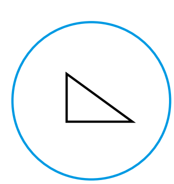
48.2. На якому з малюнків 48.7–48.10 зображено коло, описане навколо трикутника?



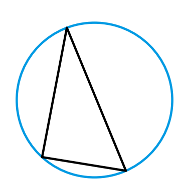
Мал. 48.7



Мал. 48.8



Мал. 48.9



Мал. 48.10

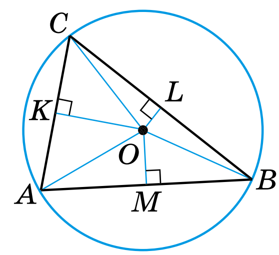
2

48.3. 1) Накресліть відрізок MN, довжина якого 5,4 см. За допомогою лінійки з поділками й косинця проведіть серединний перпендикуляр до відрізка MN.

2) Позначте деяку точку P, що належить серединному перпендикуляру, і переконайтеся, що $PM = PN$.

48.4. 1) Накресліть відрізок AB завдовжки 4,6 см. За допомогою лінійки з поділками й косинця проведіть серединний перпендикуляр до відрізка AB.
2) Позначте деяку точку C, що належить серединному перпендикуляру, і переконайтеся, що $CA = CB$.

48.5. На малюнку 48.11 точка O – центр кола, описаного навколо різностороннього трикутника ABC. Знайдіть усі пари рівних між собою трикутників на цьому малюнку.



Мал. 48.11

48.6. Скільки кіл можна провести через:
1) одну точку;
2) дві точки;
3) три точки, що не лежать на одній прямій?

48.7. 1) Накресліть гострокутний трикутник. За допомогою креслярських інструментів опишіть навколо нього коло.
2) Де лежатиме центр цього кола (поза трикутником, усередині трикутника, на одній з його сторін)?

48.8. Накресліть трикутник, два кути якого дорівнюють 60° і 70°. За допомогою креслярських інструментів опишіть навколо нього коло.

48.9. 1) Накресліть тупокутний трикутник. За допомогою креслярських інструментів опишіть навколо нього коло.
2) Де лежатиме центр цього кола (поза трикутником, усередині трикутника, на одній з його сторін)?

48.10. Накресліть рівнобедрений трикутник з кутом 120° при вершині. За допомогою креслярських інструментів опишіть навколо нього коло.

48.11. У трикутнику центр описаного кола лежить на медіані. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.

48.12. У трикутнику центр описаного кола лежить на висоті. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.

48.13. Доведіть, що радіус кола, описаного навколо рівностороннього трикутника, удвічі більший за радіус кола, вписаного в нього.

Вправи для повторення

48.14. LM – діаметр кола, хорди KL і KM – рівні між собою. Знайдіть кути трикутника KLM.

48.15. I – точка перетину бісектрис AM і BN рівнобедреного трикутника ABC з основою AB. Доведіть, що $IN = IM$.

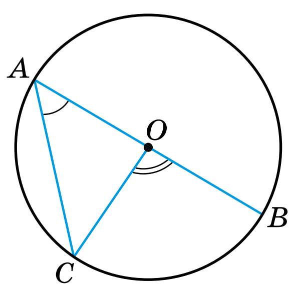
Життєва математика

48.16. Площа земельної ділянки, що має форму прямокутника, дорівнює 9 га, ширина ділянки дорівнює 150 м. Знайдіть довжину огорожі навколо цієї ділянки.

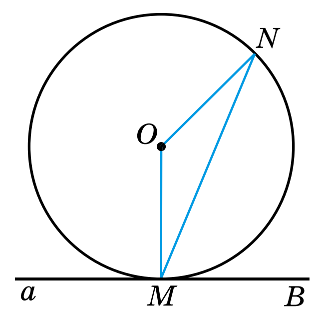
Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

48.17. Накресліть коло, радіус якого 3 см. Проведіть у цьому колі діаметр і хорду.

48.18. Точка O – центр кола (мал. 48.12). Знайдіть:
1) $\angle COB$, якщо $\angle CAO = 50°$;
2) $\angle CAO$, якщо $\angle COB = 110°$.



Мал. 48.12



Мал. 48.13

48.19. Точка O – центр кола, а точка M – точка дотику прямої a з колом (мал. 48.13). Знайдіть:
1) $\angle NMB$, якщо $\angle MON = 140°$;
2) $\angle MON$, якщо $\angle BMN = 65°$.

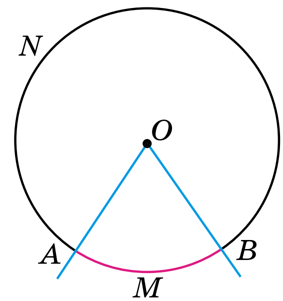
Цікаві задачі – поміркуй одначе

48.20. Відрізок 32 см завдовжки поділено двома точками на три не рівних між собою відрізки. Відстань між серединами крайніх відрізків дорівнює 20 см. Знайдіть довжину середнього відрізка.

§ 49. Центральні та вписані кути

Центральний кут. Градусна міра дуги

Центральним кутом **називають кут з вершиною в центрі кола.**



Мал. 49.1

На малюнку 49.1 $\angle AOB$ – центральний кут, сторони якого перетинають коло в точках A і B. Точки A і B розбивають коло на дві дуги. Частину кола, яка лежить усередині кута, називають *дугою кола*, що відповідає цьому центральному куту.

Якщо центральний кут менший від розгорнутого,	Якщо центральний кут більший за розгорнутий,	Розгорнутому куту
то дуга, що йому відповідає, є меншою за півколо (її виділено червоним кольором на мал. 49.1).	то дуга, що йому відповідає, є більшою за півколо.	відповідає дуга, що є півколом.

Дугу позначають символом $\smile$, який записують перед назвою дуги або над нею. Щоб уточнити, про яку саме з двох дуг, на які центральний кут поділив коло, ідеться, на кожній з них позначають довільну точку, відмінну від кінців дуги. Наприклад, M і N (мал. 49.1). Тоді ці дуги можна записати так:

$$\smile AMB \text{ (або } \overset{\frown}{AMB}\text{) та } \smile ANB \text{ (або } \overset{\frown}{ANB}\text{).}$$

Якщо зрозуміло, про яку саме дугу йдеться, то для її позначення вказують лише кінці дуги, наприклад $\smile AB$ (або $\overset{\frown}{AB}$).

Дугу кола можна вимірювати у градусах.

Градусною мірою дуги кола **називають градусну міру відповідного центрального кута.**

Наприклад, якщо $\angle AOB = 70°$, то $\overset{\frown}{AMB} = 70°$ (мал. 49.1).

Очевидно, що градусна міра дуги, яка є півколом, дорівнює 180°, а дуги, що є колом, – 360°. На малюнку 49.1:

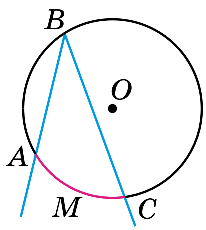
$$\overset{\frown}{ANB} = 360^\circ - 70^\circ = 290^\circ.$$

Вписаний кут

Вписаним кутом **називають кут, вершина якого належить колу, а сторони перетинають це коло.**

На малюнку 49.2 сторони вписаного кута ABC перетинають коло в точках A і C. Кажуть, що цей кут *спирається на дугу* AMC.

Точки перетину сторін вписаного кута з колом ділять коло на дві дуги. З них тією, на яку спирається вписаний кут, буде дуга, що не містить його вершини. Наприклад, на малюнку 49.2 сторони вписаного кута ABC поділили коло на дві дуги: $\overset{\frown}{ABC}$ і $\overset{\frown}{AMC}$. Оскільки $\overset{\frown}{AMC}$ не містить вершини кута (точки B), то вона і є дугою, на яку спирається вписаний кут ABC. Цю дугу виділено червоним кольором.



Мал. 49.2

Теорема про вписаний кут і наслідки з неї

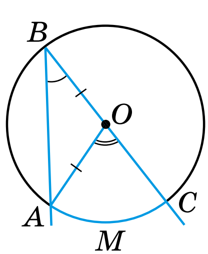
Теорема (про вписаний кут). **Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.**

Доведення. Нехай $\angle ABC$ є вписаним у коло із центром O та спирається на дугу AC (мал. 49.2). Доведемо, що $\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AMC}$.

Розглянемо три можливі випадки розташування центра кола відносно даного вписаного кута.

1) Нехай центр кола – точка O – лежить на одній зі сторін кута, наприклад BC (мал. 49.3). Центральний кут AOC є зовнішнім кутом трикутника AOB. Тоді, за властивістю зовнішнього кута, $\angle AOC = \angle ABO + \angle OAB$. Але $\triangle AOB$ – рівнобедрений ($AO = OB$ як радіуси), тому $\angle ABO = \angle OAB$. Отже, $\angle AOC = 2\angle ABO$, тобто $\angle ABC = \angle ABO = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AMC}$. Але ж $\angle AOC = \overset{\frown}{AMC}$.

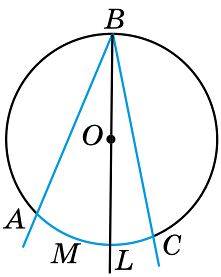
Отже, $\angle ABC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AOC}$.



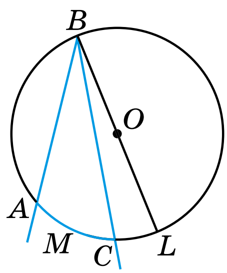
Мал. 49.3

2) Нехай центр кола лежить усередині вписаного кута (мал. 49.4). Проведемо промінь BO, що перетинає коло в точці L. Тоді $\angle ABC = \angle ABL + \angle LBC = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AL} + \frac{1}{2}\overset{\smile}{LC} = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AL} + \overset{\smile}{LC}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AMC}$.

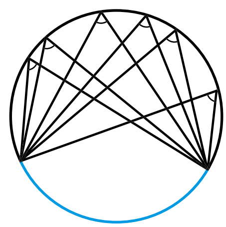
3) Нехай центр кола лежить зовні вписаного кута (мал. 49.5). Тоді $\angle ABC = \angle ABL - \angle CBL = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AL} - \frac{1}{2}\overset{\smile}{LC} = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AL} - \overset{\smile}{LC}) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AMC}$. ■

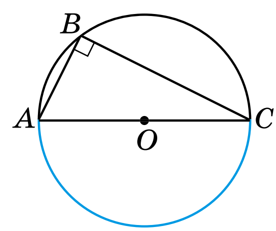


Мал. 49.4



Мал. 49.5


Мал. 49.6



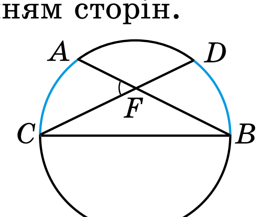
Мал. 49.7

Наслідок 1. Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, між собою рівні (мал. 49.6).

Наслідок 2. Вписаний кут, що спирається на діаметр, – прямий (мал. 49.7).

Приклад 1. Довести, що кут з вершиною всередині кола вимірюється півсумою двох дуг, з яких одна міститься між сторонами кута, а друга – між продовженням сторін.

Доведення. Розглянемо $\angle AFC$, вершина якого міститься всередині кола (мал. 49.8). Доведемо, що $\angle AFC = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AC} + \overset{\smile}{BD})$.



Мал. 49.8

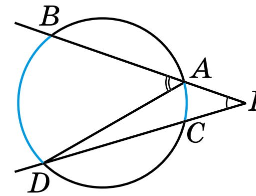
$\angle AFC$ – зовнішній для трикутника BCF.

Маємо:

$$\angle AFC = \angle FBC + \angle FCB = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AC} + \frac{1}{2}\overset{\smile}{BD} = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AC} + \overset{\smile}{BD}). \ ■$$

Приклад 2. Довести, що кут між двома січними, які перетинаються зовні кола, вимірюється піврізницею більшої і меншої дуг, які містяться між його сторонами.

Доведення. Розглянемо $\angle BFD$, вершина якого лежить зовні кола, а FB і FD – січні кола (мал. 49.9). Доведемо, що $\angle DFB = \frac{1}{2}(\smile BD - \smile AC)$.



Мал. 49.9

1) $\angle BAD$ – зовнішній кут трикутника ADF.

Маємо: $\angle DAB = \angle ADC + \angle DFB$; тобто $\frac{1}{2}\smile BD = \frac{1}{2}\smile AC + \angle DFB$.

2) Тому $\angle DFB = \frac{1}{2}\smile BD - \frac{1}{2}\smile AC = \frac{1}{2}(\smile BD - \smile AC)$. ■

А ще раніше...

Доведення теореми про вписаний кут зустрічається ще в «Началах» Евкліда. Але ще раніше цей факт, як припущення, уперше висловив Гіппократ Хіоський (V ст. до н. е.).

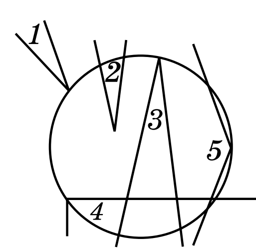
Те, що вписаний кут, який спирається на діаметр, є прямим, знали вавилоняни 4000 років тому, а перше доведення цього факту приписують Фалесу Мілетському.

Який кут називають центральним? ○ Що називають градусною мірою дуги кола? ○ Який кут називають вписаним? ○ Сформулюйте та доведіть теорему про вписаний кут.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

49.1. (*Усно.*) Які з кутів на малюнку 49.10 є вписаними в коло?



Мал. 49.10

49.2. Визначте градусну міру кута, вписаного в коло, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює:
1) 70°; 2) 190°.

49.3. Визначте градусну міру центрального кута, якщо градусна міра відповідного йому вписаного кута дорівнює:
1) 20°; 2) 100°.

49.4. Точки A і B належать колу й лежать по один бік від хорди CD. Знайдіть $\angle CAD$, якщо $\angle CBD = 55°$.

2

49.5. Точки A і B належать колу й лежать по різні боки від хорди MN. Доведіть, що $\angle MAN + \angle MBN = 180°$.

49.6. Точки M і N належать колу й лежать по різні боки від хорди AB. Знайдіть $\angle AMB$, якщо $\angle ANB = 70°$.

49.7. Точка P кола і його центр O лежать по різні боки від хорди CD. Знайдіть $\angle COD$, якщо $\angle CPD = 126°$.

49.8. Точка A кола і його центр O лежать по різні боки від хорди LK. Знайдіть $\angle LAK$, якщо $\angle LOK = 128°$.

49.9. Хорда розбиває коло на дві дуги у відношенні 1 : 2. Знайдіть міри вписаних кутів, що спираються на ці дуги.

3

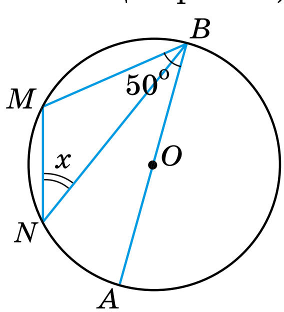
49.10. Хорда AB дорівнює радіусу кола. Точка C кола і його центр лежать по один бік від хорди AB. Знайдіть $\angle ACB$.

49.11. Хорди AD і BC перетинаються в точці F, $\angle ABC = 20°$, $\angle BCD = 80°$. Знайдіть градусну міру кута AFB.

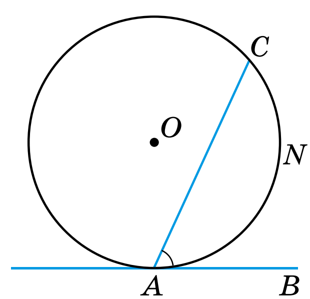
49.12. Хорди AB і CD перетинаються в точці M, $\angle ABC = 35°$, $\angle BAD = 55°$. Доведіть, що хорди AB і CD взаємно перпендикулярні.

4

49.13. O – центр кола, $\angle MBA = 50°$ (мал. 49.11). Знайдіть x.



Мал. 49.11



Мал. 49.12

49.14. Доведіть, що кут між дотичною і хордою, що виходить з точки дотику, дорівнює половині дуги, яка лежить між сторонами кута, тобто $\angle CAB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CNA}$ (мал. 49.12).

49.15. Рівнобедрений трикутник ABC вписано в коло із центром у точці O, $\angle AOB = 80°$. Знайдіть кути трикутника ABC. Скільки розв'язків має задача?

49.16. Рівнобедрений трикутник MNK вписано в коло із центром у точці O, $\angle MOK = 100°$. Знайдіть кути трикутника MNK. Скільки розв'язків має задача?

49.17. Коло поділено трьома точками на частини, які відносяться як 1 : 2 : 6, і точки поділу сполучено між собою. Знайдіть кути утвореного трикутника.

Вправи для повторення

49.18. Дано кут 30°. Коло радіуса 5 см дотикається до сторони кута і має центр на його іншій стороні. Обчисліть відстань від центра кола до вершини кута.

49.19. Випишіть у порядку зростання внутрішні кути трикутника ABC, якщо $AB = 5$ см, $BC = 9$ см, $AC = 6$ см.

Життєва математика

49.20. Щоб витягти з колодязя відро води, потрібно зробити 12 обертів коловорота. Знайдіть глибину колодязя, якщо діаметр вала дорівнює 32 см. Для спрощення обчислень уважайте, що $\pi \approx 3$.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

49.21. Накресліть відрізок MN завдовжки 6 см.
1) Узявши точки M і N за центри, проведіть два кола, одне з яких (із центром у точці M) радіуса 4 см, а інше (із центром у точці N) радіуса 2 см.
2) Скільки спільних точок мають ці кола?

49.22. Накресліть відрізок AB завдовжки 5 см.
1) Узявши точки A і B за центри, проведіть два кола, одне з яких (із центром у точці A) радіуса 3 см, а інше (із центром у точці B) радіуса 4 см.
2) Скільки спільних точок мають ці кола?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

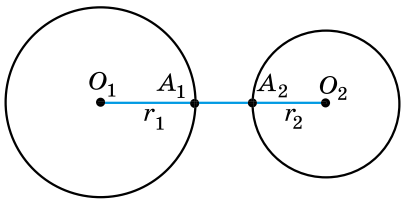
49.23. У кожній клітинці прямокутної дошки розміром 2025 × 2027 клітинок сидить жук. За сигналом усі жуки переповзають на сусідні (по горизонталі або вертикалі) клітинки. Чи обов'язково при цьому залишиться вільна клітинка?

§ 50. Взаємне розміщення двох кіл

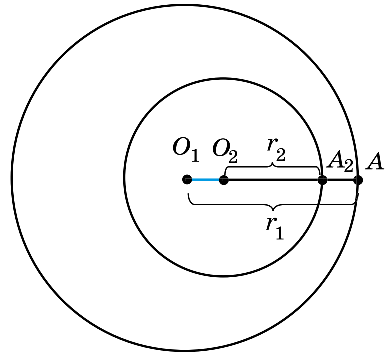
Розглянемо взаємне розміщення двох кіл із центрами в точках O_1 і O_2 та радіусами r_1 і r_2 відповідно.

Кола, які не перетинаються

Два кола можуть не перетинатися, тобто не мати спільних точок (мал. 50.1 і 50.2). Можливі два випадки їхнього розміщення:



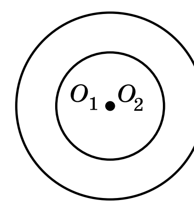
Мал. 50.1



Мал. 50.2

1. На малюнку 50.1 відстань між центрами кіл більша за суму радіусів: $O_1O_2 = O_1A_1 + A_1A_2 + A_2O_2 = r_1 + A_1A_2 + r_2 > r_1 + r_2$. Отже, $O_1O_2 > r_1 + r_2$.

2. На малюнку 50.2 $O_1A_1 = O_1O_2 + O_2A_2 + A_2A_1$; $r_1 = O_1O_2 + r_2 + A_2A_1$. Тому $O_1O_2 = (r_1 - r_2) - A_2A_1 < r_1 - r_2$. Отже, $O_1O_2 < r_1 - r_2$, де $r_1 > r_2$, тобто відстань між центрами кіл менша від різниці радіусів.

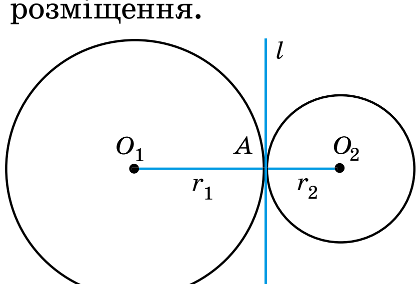


Мал. 50.3

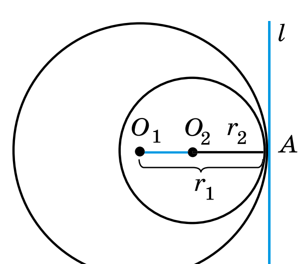
Два кола називають ***концентричними***, якщо вони мають спільний центр (мал. 50.3). У цьому випадку $O_1O_2 = 0$. Очевидно, що концентричними може бути будь-яка кількість кіл.

Дотик двох кіл

Два кола можуть мати одну спільну точку (мал. 50.4 і 50.5). У такому разі кажуть, що кола *дотикаються*, а спільну точку називають *точкою дотику кіл*. Можливі два випадки такого розміщення.



Мал. 50.4



Мал. 50.5

1. Кола мають зовнішній дотик. Дотик двох кіл називають *зовнішнім*, якщо центри кіл лежать по різні боки від точки дотику (мал. 50.4). У цьому випадку:

1) $O_1O_2 = O_1A + AO_2 = r_1 + r_2$ (відстань між центрами кіл дорівнює сумі їхніх радіусів);
2) у точці A існує спільна дотична l до двох кіл;
3) $l \perp O_1O_2$.

2. Кола мають внутрішній дотик. Дотик двох кіл називають *внутрішнім*, якщо центри кіл лежать по один бік від точки дотику (мал. 50.5). У цьому випадку:
1) $O_1O_2 = O_1A - O_2A = r_1 - r_2$, де $r_1 > r_2$ (відстань між центрами кіл дорівнює різниці їхніх радіусів);
2) у точці A існує спільна дотична l до двох кіл;
3) $l \perp O_1O_2$.

Приклад 1. Два кола мають зовнішній дотик. Відстань між їхніми центрами 10 см. Визначити радіуси кіл, якщо один із радіусів на 2 см більший за інший.

Розв'язання. Нехай кола із центрами в точках O_1 і O_2 дотикаються в точці A (мал. 50.4).

1) За умовою $O_1O_2 = 10$ см. Позначимо $AO_2 = x$ см, тоді $AO_1 = (x + 2)$ см.

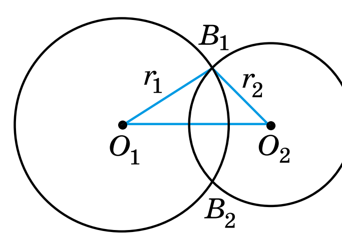
2) Оскільки $O_1O_2 = AO_1 + AO_2$, то маємо рівняння $x + (x + 2) = 10$, звідки $x = 4$ (см).

3) Отже, $AO_2 = 4$ см; $AO_1 = 4 + 2 = 6$ (см).

Відповідь: 6 см; 4 см.

Перетин двох кіл

Два кола можуть мати дві спільні точки (мал. 50.6), тобто кола *перетинаються*. У цьому випадку відстань між центрами кіл менша від суми їхніх радіусів, але більша за різницю їхніх радіусів. Дійсно, за нерівністю трикутника і наслідком з неї для трикутника $O_1B_1O_2$ маємо:



Мал. 50.6

$r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$, де $r_1 \geqslant r_2$.

Встановлення взаємного розміщення двох кіл

Приклад 2. Відстань між центрами двох кіл $O_1O_2 = 10$ см. Визначити взаємне розміщення цих кіл, якщо:

1) $r_1 = 6$ см, $r_2 = 4$ см;
2) $r_1 = 8$ см, $r_2 = 4$ см;
3) $r_1 = 5$ см, $r_2 = 3$ см.

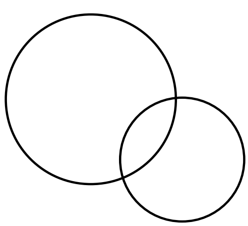
Розв'язання. 1) Оскільки 10 = 6 + 4, тобто $O_1O_2 = r_1 + r_2$, то кола дотикаються (зовнішній дотик кіл);
2) оскільки 8 – 4 < 10 < 8 + 4, тобто $r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$, то кола перетинаються;
3) оскільки 10 > 5 + 3, тобто $O_1O_2 > r_1 + r_2$, то кола не перетинаються.
Відповідь: 1) дотикаються; 2) перетинаються; 3) не перетинаються.

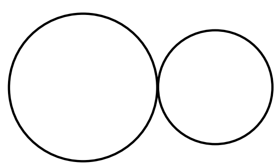
Що означає: два кола не перетинаються? Що означає: кола дотикаються? Який дотик кіл називають зовнішнім, а який – внутрішнім? Що означає: два кола перетинаються?

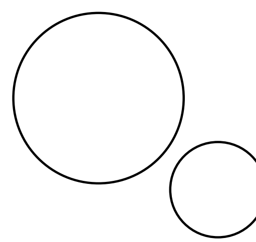
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

50.1. Що можна сказати про взаємне розміщення кіл на малюнках 50.7–50.9?


Мал. 50.7


Мал. 50.8


Мал. 50.9

50.2. Накресліть два кола, радіуси яких дорівнюють 3 см і 2 см, так, щоб вони:
1) мали внутрішній дотик; 2) перетиналися;
3) були концентричними.

50.3. Накресліть два кола, радіуси яких дорівнюють 2 см і 1,5 см, так, щоб вони:
1) мали зовнішній дотик; 2) не перетиналися.

2

50.4. Накресліть відрізок 4 см завдовжки. Побудуйте два кола, що мають зовнішній дотик, центрами яких є кінці цього відрізка.

50.5. Накресліть відрізок 2 см завдовжки. Побудуйте два кола, що мають внутрішній дотик, центрами яких є кінці цього відрізка.

50.6. Радіуси двох кіл дорівнюють 7 см і 5 см. Знайдіть відстань між їхніми центрами, якщо кола мають:
1) внутрішній дотик; 2) зовнішній дотик.

50.7. Радіуси двох кіл дорівнюють 3 см і 8 см. Знайдіть відстань між їхніми центрами, якщо кола мають:
1) зовнішній дотик; 2) внутрішній дотик.

3 **50.8.** Два кола мають внутрішній дотик. Відстань між їхніми центрами дорівнює 12 дм. Знайдіть радіуси кіл, якщо вони відносяться як 2 : 5.

50.9. Два кола мають зовнішній дотик. Відстань між їхніми центрами дорівнює 15 см. Знайдіть радіуси кіл, якщо вони відносяться як 2 : 3.

50.10. Відстань між центрами двох кіл дорівнює 12 см. Визначте взаємне розміщення цих кіл, якщо їхні радіуси дорівнюють:
1) 9 см і 3 см; 2) 5 см і 2 см;
3) 13 см і 1 см; 4) 9 см і 7 см.

50.11. Відстань між центрами двох кіл дорівнює 14 см. Визначте взаємне розміщення цих кіл, якщо їхні радіуси дорівнюють:
1) 7 см і 5 см; 2) 16 см і 2 см;
3) 10 см і 5 см; 4) 7 см і 7 см.

50.12. Два кола перетинаються в точках A і B. Точки O_1 і O_2 – центри цих кіл. Доведіть, що $O_1O_2 \perp AB$.

50.13. Два кола перетинаються в точках C і D. Точки O_1 і O_2 – центри кіл. Доведіть, що промінь O_1O_2 – бісектриса кута CO_1D.

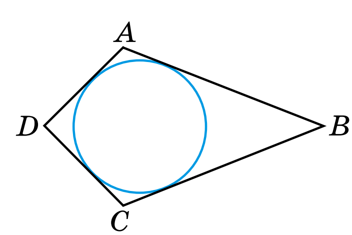
4 **50.14.** Три кола попарно мають зовнішній дотик. Відрізки, що сполучають їхні центри, утворюють трикутник зі сторонами 5 см, 7 см і 8 см. Знайдіть радіуси цих кіл.

50.15. Три кола попарно дотикаються зовні. Радіус одного з кіл дорівнює 6 см, а відрізок, що сполучає центри двох інших кіл, дорівнює 14 см. Знайдіть периметр трикутника, вершинами якого є центри цих кіл.

Вправи для повторення

50.16. У прямокутному трикутнику ABC гіпотенуза AB дорівнює 20 см, $\angle B = 60°$. Довжину якого з катетів можна знайти? Знайдіть її.

50.17. На малюнку 50.10 коло вписано в чотирикутник $ABCD$ (дотикається до всіх його сторін). Доведіть, що $AB + CD = AD + BC$.



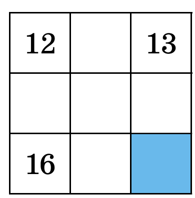
Мал. 50.10

Життєва математика

50.18. Приватна підприємниця має три магазини, розміщені в точках A, B і C, які не лежать на одній прямій. Вона хоче побудувати склад так, щоб відстань від нього до всіх магазинів була однаковою. Де має бути розміщений цей склад?

Цікаві задачі — поміркуй одначе

50.19. Прямокутник поділено на дев'ять прямокутників (мал. 50.11). Периметри трьох з них відомі, і їх вказано на малюнку. Знайдіть периметр зафарбованого прямокутника.



Мал. 50.11

§ 51. Основні задачі на побудову та їх розв'язування

Задачі на побудову в курсі геометрії

Вивчаючи курс геометрії, ви неодноразово виконували різні геометричні побудови: проводили прямі, відкладали відрізки, що дорівнюють даним, будували кути тощо. При цьому використовували лінійку з поділками, транспортир, косинець, циркуль. Тепер розглянемо побудови фігур, які можна виконати за допомогою лише двох інструментів: лінійки без поділок і циркуля. Цими інструментами користувалися ще в Давній Греції, тому їх прийнято вважати класичними інструментами.

Що можна зробити за допомогою двох цих інструментів? Лінійка дає змогу провести довільну пряму, побудувати пряму, що проходить через дану точку, і пряму, що проходить через дві дані точки. За допомогою циркуля можна провести коло довільного радіуса, коло із центром у даній точці та радіусом, що дорівнює даному відрізку. У деяких випадках замість кола потрібна буде деяка його частина (дуга кола). Зауважимо, що жодних інших побудов у задачах на побудову виконувати не дозволяється. Наприклад, за допомогою лінійки (навіть з поділками) не дозволяється відкладати відрізок заданої довжини, не можна використовувати косинець для побудови перпендикулярних прямих тощо.

Розв'язати задачу на побудову означає вказати послідовність найпростіших побудов, після виконання яких отримаємо задану фігуру; далі – довести, що побудована фігура має властивості, передбачені умовою, тобто є шуканою фігурою.

Іноді для найскладніших задач потрібно виконати аналіз, тобто провести міркування, на основі яких і буде розв'язано задачу.

Далі розглянемо найпростіші задачі на побудову.

Побудова відрізка, що дорівнює заданому

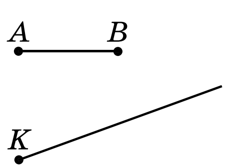
Приклад 1. На даному промені від його початку відкласти відрізок, що дорівнює заданому.

Розв'язання. Зобразимо фігури, які дано в умові задачі: відрізок AB і промінь з початком у точці K (мал. 51.1).

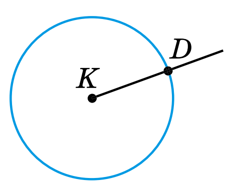
1) Побудуємо циркулем коло із центром у точці K, радіус якого дорівнює AB (мал. 51.2). Це коло перетне промінь у деякій точці D.

2) Очевидно, що $KD = AB$.

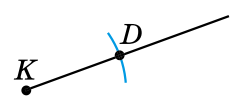
3) Тому KD – шуканий відрізок.



Мал. 51.1



Мал. 51.2



Мал. 51.3

Замість кола можна було провести ту його частину (деяку дугу), яка б мала перетин з променем (мал. 51.3). Цю дугу ще називають *засічкою*.

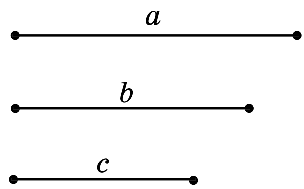
Побудова трикутника за трьома сторонами

Приклад 2. Побудувати трикутник із заданими сторонами a, b і c.

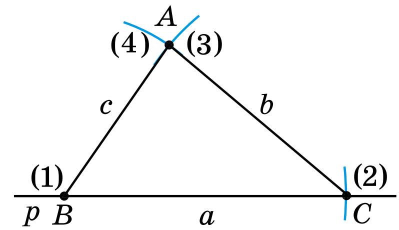
Розв'язання. Нехай задано три відрізки a, b і c (мал. 51.4).

1) За допомогою лінійки проведемо довільну пряму p і позначимо на ній довільну точку B ((1) на мал. 51.5).

2) За допомогою циркуля відкладемо на прямій p відрізок $BC = a$ (дуга (2) на мал. 51.5).



Мал. 51.4



Мал. 51.5

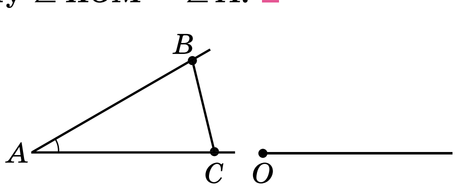
3) Розхилом циркуля, що дорівнює b, опишемо дугу (3) кола із центром у точці C (мал. 51.5).
4) Розхилом циркуля, що дорівнює c, опишемо дугу (4) кола із центром у точці B (мал. 51.5).
5) Точка A – точка перетину дуг (3) і (4). $\triangle ABC$ – шуканий.
Доведення цього факту є очевидним, оскільки сторони трикутника ABC дорівнюють заданим відрізкам a, b і c: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. ■

Зауваження. Якби побудовані дуги (3) і (4) не перетнулися, то трикутник побудувати було б неможливо. За нерівністю трикутника: кожна зі сторін має бути меншою від суми двох інших.

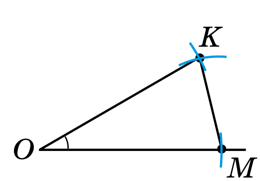
Побудова кута, що дорівнює заданому

Приклад 3. Від даного променя відкласти заданий кут.

Розв'язання. Нехай дано кут A і промінь з початком у точці O (мал. 51.6). Потрібно побудувати кут, що дорівнює куту A, так, щоб одна з його сторін збігалася з даним променем.
1) Позначимо на сторонах даного кута A дві довільні точки B і C (мал. 51.6).
2) Побудуємо трикутник OKM, що дорівнює трикутнику ABC, так, щоб $AB = OK$, $AC = OM$, $BC = KM$ (мал. 51.7).
3) Тоді $\angle KOM = \angle BAC$ (як відповідні кути рівних трикутників).
4) Отже, $\angle KOM$ – шуканий.
Доведення цього випливає з побудови, оскільки $\triangle OKM = \triangle ABC$, а тому $\angle KOM = \angle A$. ■



Мал. 51.6



Мал. 51.7

Побудова бісектриси заданого кута

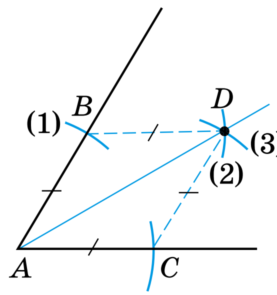
Приклад 4. Побудувати бісектрису заданого кута.

Розв'язання. Нехай дано $\angle A$, потрібно побудувати його бісектрису (мал. 51.8).

1) Проведемо дугу кола довільного радіуса із центром у точці A (дуга (1) на мал. 51.8), яка перетинає сторони кута в точках B і C.

2) З точок B і C опишемо дуги таким самим радіусом (дуги (2) і (3)) у внутрішній області кута до їхнього перетину. Отримаємо точку D.

3) Проведемо промінь AD. Промінь AD – шукана бісектриса кута A.



Мал. 51.8

Доведення. $\triangle ABD = \triangle ACD$ (за трьома сторонами), тому $\angle BAD = \angle CAD$ (як відповідні кути рівних трикутників), отже, AD – бісектриса кута A. ■

Поділ заданого відрізка навпіл

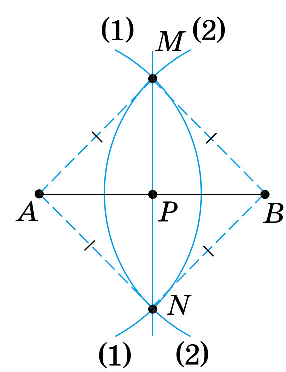
Приклад 5. Поділити заданий відрізок навпіл.

Розв'язання. Нехай AB – заданий відрізок, який потрібно поділити навпіл, тобто побудувати його середину.

1) З точки A радіусом циркуля, більшим за половину відрізка AB, опишемо дугу (1) (мал. 51.9).

2) З точки B таким самим радіусом циркуля опишемо дугу (2) до перетину з дугою (1) у точках M і N.

3) Через точки M і N проведемо пряму MN. Пряма MN перетинає відрізок AB в точці P. P – шукана точка.



Мал. 51.9

Доведення. $\triangle AMN = \triangle BMN$ (за трьома сторонами). Тому $\angle AMP = \angle BMP$, а MP – бісектриса рівнобедреного трикутника AMB з основою AB, тому вона є також медіаною. Отже, P – середина AB. ■

Зауважимо, що пряма MN є серединним перпендикуляром до відрізка AB.

Побудова прямої, перпендикулярної до заданої

Приклад 6. Через дану точку M провести пряму, перпендикулярну до заданої прямої a.

Розв'язання. Задача має два випадки.

1. *Нехай точка M належить прямій a.*

1) На даній прямій a довільним радіусом циркуля відкладемо від точки M два рівних відрізки MK і ML (дуги (1) на мал. 51.10).

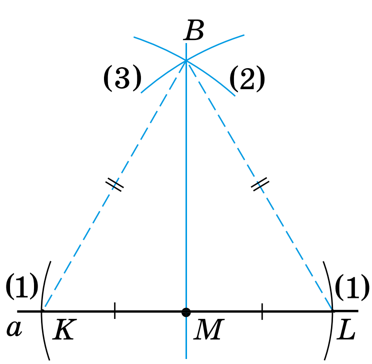
2) З точок K і L радіусом, що дорівнює KL, опишемо дуги (2) і (3) до їхнього перетину. Отримаємо точку B.

3) Проведемо пряму BM. Пряма BM – шукана.

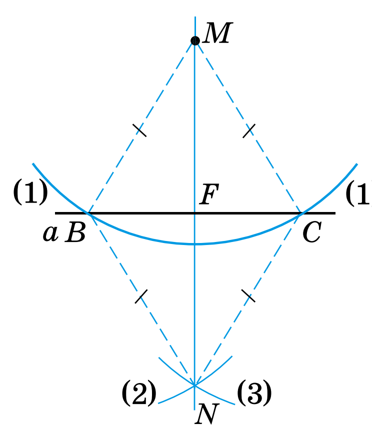
Доведення. $KL = KB = LB$, отже, BM – медіана рівностороннього трикутника BKL, тому вона є також і висотою. Отже, $BM \perp a$.

2. *Нехай точка M не належить прямій a.*

1) З точки M довільним радіусом циркуля (більшим за відстань від точки M до прямої a) проведемо дугу (1), яка перетинає пряму a в точках B і C (мал. 51.11).



Мал. 51.10



Мал. 51.11

2) З точок B і C тим самим радіусом циркуля опишемо дуги (2) і (3) до їхнього перетину в точці N по інший бік від точки M.

3) Проведемо пряму MN. Пряма MN – шукана пряма.

Доведення. Нехай точка F – точка перетину прямих BC і MN. $\triangle BMN = \triangle CMN$ (за трьома сторонами). Тому $\angle BMN = \angle CMN$. MF – бісектриса рівнобедреного трикутника BMC, проведена до його основи. Тому MF є також і висотою. Отже, $MF \perp BC$, а тому $MN \perp a$. ■

Примітка. У задачах цього параграфа для задання умов задачі (наприклад, довжини відрізка чи градусної міри кута) використовуємо лінійку з поділками і транспортир, а для розв'язування задачі – лише лінійку без поділок і циркуль.

Які інструменти використовують для розв'язування задач на побудову? ○ Які побудови можна виконати за допомогою лінійки без поділок? ○ Які побудови можна виконати за допомогою циркуля? ○ Що означає розв'язати задачу на побудову? ○ Як побудувати відрізок, що дорівнює заданому? ○ Як побудувати трикутник за трьома сторонами? ○ Як побудувати кут, що дорівнює заданому? ○ Як побудувати бісектрису заданого кута? Як поділити заданий відрізок навпіл? ○ Як побудувати пряму, перпендикулярну до заданої?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

51.1. Проведіть довільну пряму та відкладіть на ній відрізок, що дорівнює відрізку на малюнку 51.12.

51.2. Проведіть довільний промінь і відкладіть від його початку відрізок, що дорівнює відрізку на малюнку 51.13.

Мал. 51.12

Мал. 51.13

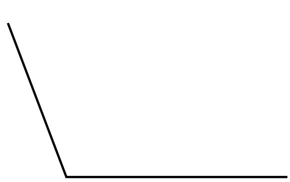
Мал. 51.14

51.3. Проведіть довільну пряму m, виберіть на ній точку M і опишіть коло із центром у точці M, радіус якого дорівнює відрізку, зображеному на малюнку 51.14. У скількох точках коло перетнуло пряму?

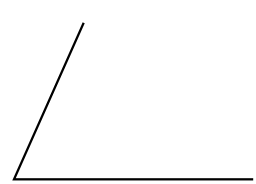
51.4. Накресліть довільний відрізок MN. Побудуйте коло із центром у точці M, радіус якого дорівнює MN.

51.5. Побудуйте кут, що дорівнює заданому (мал. 51.15).

51.6. Побудуйте кут, що дорівнює заданому (мал. 51.16).



Мал. 51.15



Мал. 51.16

51.7. Побудуйте за допомогою транспортира кут, що дорівнює 70°, та його бісектрису – без допомоги транспортира.

51.8. Побудуйте за допомогою транспортира кут, що дорівнює 110°, та його бісектрису – без допомоги транспортира.

51.9. Побудуйте відрізок, що дорівнює заданому (мал. 51.17), та поділіть його навпіл.

51.10. Побудуйте відрізок, що дорівнює заданому (мал. 51.18), та поділіть його навпіл.

Мал. 51.17

Мал. 51.18

51.11. Накресліть пряму b та позначте точку M, що їй не належить. Проведіть пряму MN перпендикулярно до прямої b.

51.12. Накресліть пряму m та позначте точку P, що їй належить. Проведіть пряму PK перпендикулярно до прямої m.

51.13. Побудуйте прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 5 см і 3 см.

51.14. Накресліть гострокутний $\triangle ABC$ та побудуйте його медіану CP.

51.15. Накресліть прямокутний $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$). Побудуйте його медіану CM та бісектрису AK.

51.16. Накресліть прямокутний $\triangle KLM$ ($\angle K = 90°$). Побудуйте його бісектрису KP та медіану LT.

51.17. Накресліть довільний відрізок. Побудуйте відрізок, що дорівнює $\frac{3}{4}$ від побудованого відрізка.

51.18. Накресліть довільний відрізок. Побудуйте відрізок, що дорівнює $\frac{1}{4}$ від побудованого відрізка.

51.19. Побудуйте трикутник зі сторонами $a = 8$ см, $b = 7$ см, $c = 5$ см.

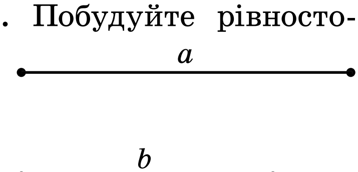
51.20. Побудуйте $\triangle ABC$, якщо $AB = 4$ см, $BC = 6$ см, $CA = 7$ см.

51.21. Накресліть довільний $\triangle ABC$ і побудуйте $\triangle ABD$ такий, що дорівнює трикутнику ABC.

51.22. Накресліть довільний трикутник і побудуйте трикутник, що йому дорівнює.

51.23. Накресліть довільний відрізок AB. Побудуйте рівносторонній $\triangle ABC$.

51.24. Побудуйте рівнобедрений трикутник, у якого основа дорівнює відрізку a, а бічна сторона – відрізку b (мал. 51.19).



Мал. 51.19

51.25. Побудуйте $\triangle DEF$, якщо $DE = 6$ см, $\angle D = 40°$, $\angle E = 80°$.

51.26. Побудуйте $\triangle NPT$, якщо $NP = 4$ см, $\angle N = 50°$, $\angle P = 100°$.

3 **51.27.** На даній прямій a знайдіть точки, віддалені від заданої точки A цієї прямої:
1) на 4 см;
2) на відстань, більшу за 4 см;
3) на відстань, меншу ніж 4 см.

51.28. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною і радіусом описаного кола.

51.29. Побудуйте $\triangle ABC$, якщо $AB = 3$ см, $AC = 5$ см, $\angle A = 105°$.

51.30. Побудуйте $\triangle KLM$, якщо $KL = 6$ см, $KM = 4$ см, $\angle K = 80°$.

51.31. Побудуйте рівнобедрений трикутник, основа якого 4 см, а кут при основі 70°.

51.32. Побудуйте рівносторонній трикутник зі стороною 5 см і впишіть у нього коло.

51.33. Побудуйте довільний трикутник та опишіть навколо нього коло.

51.34. Побудуйте рівнобедрений трикутник, у якого основа дорівнює 6 см, а висота, проведена до неї, – 4 см.

51.35. Побудуйте коло, радіус якого 4 см, позначте на цьому колі деяку точку A і проведіть через неї дотичну до кола – пряму b.

51.36. Побудуйте рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 4 см, а кут при вершині – 80°.

51.37. Побудуйте рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 6 см, а кут при вершині – 100°.

51.38. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і гіпотенузою.

51.39. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і бісектрисою прямого кута.

51.40. Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з них.

51.41. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і медіаною, проведеною до другого катета.

51.42. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і медіаною, проведеною до нього.

51.43. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і радіусом описаного кола.

51.44. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і бісектрисою, проведеною з вершини цього кута.

4 **51.45.** Побудуйте $\triangle ABC$, якщо $AB = 4$ см, $\angle A = 40°$, $\angle C = 105°$.

51.46. Не користуючись транспортиром, побудуйте кути 30° і 60°.

51.47. Не користуючись транспортиром, побудуйте кут, що дорівнює 15°.

51.48. Побудуйте без транспортира $\triangle ABC$, у якого:
1) $AB = 5$ см, $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$;
2) $AB = BC = 4$ см, $\angle B = 150°$.

51.49. Побудуйте без транспортира $\triangle KMP$, у якого:
1) $KM = 4$ см, $\angle K = 30°$, $\angle M = 45°$;
2) $KM = MP = 5$ см, $\angle M = 120°$.

51.50. Побудуйте рівносторонній трикутник за його медіаною.

51.51. Побудуйте трикутник за двома нерівними сторонами і радіусом описаного кола. Скільки розв'язків має задача?

Вправи для повторення

51.52. Один з кутів трикутника дорівнює 15°, а два інших – відносяться як 7 : 8. Знайдіть найменший із зовнішніх кутів трикутника.

51.53. Доведіть, що в рівних між собою трикутниках бісектриси, проведені з вершин відповідних кутів, однакової довжини.

51.54. Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює 30°, а гіпотенуза – 60 см. Знайдіть відрізки, на які ділить гіпотенузу висота, проведена до неї.

Життєва математика

51.55. 1) Щоб залити один квадратний метр ковзанки, потрібно 40 л води. Скільки потрібно буде води, щоб залити ковзанку круглої форми діаметром 30 м?
2) Дізнайтеся, скільки коштує 1 м^3 води, та обчисліть суму, яку повинна буде сплатити муніципальна влада за використану воду.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

51.56. Розв'яжіть задачу та прочитайте прізвище першого президента незалежної України.

Промінь BK проходить між сторонами кута ABC. Знайдіть $\angle ABK$ і $\angle KBC$, якщо $\angle ABC = 120°$ і де:		
Умова	$\angle ABK$	$\angle KBC$
$\angle ABK$ на 20° менший від $\angle KBC$	А	В
$\angle ABK$ утричі більший за $\angle KBC$	У	К
$\angle ABK : \angle KBC = 3 : 5$	Р	Ч

30°	45°	50°	70°	75°	90°	30°

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 10 (§§45–51)

Кожне завдання має по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1. Знайдіть радіус кола, діаметр якого дорівнює 8 см.

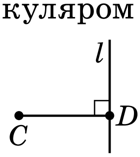
А. 2 см **Б.** 4 см **В.** 16 см **Г.** 8 см

2. Знайдіть градусну міру центрального кута, якщо градусна міра відповідного йому вписаного кута дорівнює 40°.

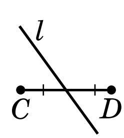
А. 20° **Б.** 40° **В.** 80° **Г.** 120°

3. Укажіть малюнок, на якому пряма l є серединним перпендикуляром до відрізка CD.

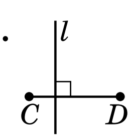
А.



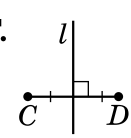
Б.



В.



Г.



4. Радіус кола дорівнює 4 см. Як розміщені пряма a і коло, якщо відстань від центра кола до прямої дорівнює 3 см?

А. Пряма перетинає коло у двох точках
Б. Пряма є дотичною до кола
В. Пряма не має з колом спільних точок
Г. Неможливо визначити

5. Точка O – центр кола, MN – його хорда. Знайдіть $\angle MON$, якщо $\angle OMN = 70°$.

А. 20° **Б.** 40° **В.** 60° **Г.** 70°

6. Кола, радіуси яких 6 см і 2 см, мають внутрішній дотик. Знайдіть відстань між їхніми центрами.

А. 2 см **Б.** 4 см **В.** 6 см **Г.** 8 см

3 **7.** Точка O – центр кола, AB – його діаметр, BC – хорда, $\angle COA = 50°$. Знайдіть $\angle BCO$.

А. 25° **Б.** 35° **В.** 50° **Г.** 60°

8. Два кола мають зовнішній дотик, а відстань між їхніми центрами дорівнює 14 см. Знайдіть радіуси цих кіл, якщо радіус одного з них на 4 см більший за радіус другого.

А. 8 см і 4 см **Б.** 9 см і 5 см
В. 10 см і 6 см **Г.** 11 см і 7 см

9. Хорди MN і KL перетинаються в точці A, $\angle MKL = 30°$, $\angle KLN = 70°$. Знайдіть градусну міру кута KAM.

А. 30° **Б.** 70° **В.** 80° **Г.** 100°

4 **10.** З точки M, що лежить поза колом, проведено до кола дві дотичні MA і MB, де A і B – точки дотику, $\angle MBA = 60°$. Знайдіть відстань від точки M до центра кола, якщо радіус кола дорівнює 10 см.

А. 10 см **Б.** 15 см **В.** 20 см **Г.** 25 см

11. Центр кола, описаного навколо трикутника, збігається із серединою сторони у трикутнику, що є...

А. прямокутним **Б.** гострокутним

В. тупокутним **Г.** рівностороннім

12. Три кола, радіуси яких 3 см, 4 см і 5 см, попарно дотикаються зовні. Знайдіть периметр трикутника, вершинами якого є центри цих кіл.

А. 22 см **Б.** 23 см **В.** 24 см **Г.** 25 см

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами.

3 **13.** Радіуси двох кіл дорівнюють r_1 і r_2, а відстань між їхніми центрами – 10 см. Установіть відповідність між радіусами кіл r_1 і r_2 (1–3) та взаємним положенням цих кіл (А–Г).

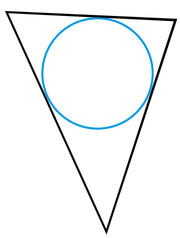
Радіуси кіл	*Взаємне положення кіл*
1. $r_1 = 4$ см, $r_2 = 7$ см	**А.** Зовнішній дотик
2. $r_1 = 8$ см, $r_2 = 2$ см	**Б.** Внутрішній дотик
3. $r_1 = 5$ см, $r_2 = 3$ см	**В.** Кола перетинаються
	Г. Кола не мають спільних точок

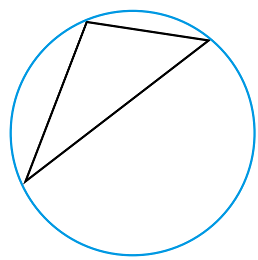
ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 45–51

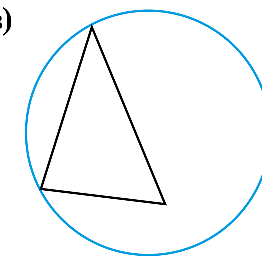
1. Знайдіть діаметр кола, якщо його радіус дорівнює 26 мм.

2. Знайдіть градусну міру кута, вписаного в коло, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює 70°.

3. На якому з малюнків зображено коло, описане навколо трикутника, а на якому – вписане у трикутник?

а) 

б) 

в) 

4. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 4 см. Проведіть у ньому діаметр MN і хорду KL. Побудуйте за допомогою косинця дотичну до кола, що проходить через точку M.

5. Точка O – центр кола, AB – його хорда. Знайдіть $\angle OAB$, якщо $\angle AOB = 136°$.

6. Накресліть відрізок FP завдовжки 5 см. За допомогою лінійки з поділками й косинця проведіть серединний перпендикуляр до відрізка FP.

7. Два кола мають зовнішній дотик. Відстань між їхніми центрами дорівнює 20 см. Знайдіть радіуси кіл, якщо один з них утричі більший за інший.

8. Побудуйте рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 55 мм, а кут при вершині – 50°.

9. Коло, вписане в рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки 5 см і 2 см завдовжки, починаючи від вершини, яка протилежна основі. Знайдіть периметр трикутника.

Додаткові вправи

10. З точки A, що лежить поза колом, проведено до нього дві дотичні AB і AC, де B і C – точки дотику, $\angle BAC = 60°$. Знайдіть радіус кола, якщо відстань від точки A до центра кола дорівнює 8 см.

11. Не користуючись транспортиром, побудуйте кут, що дорівнює 120°.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 10

До § 45

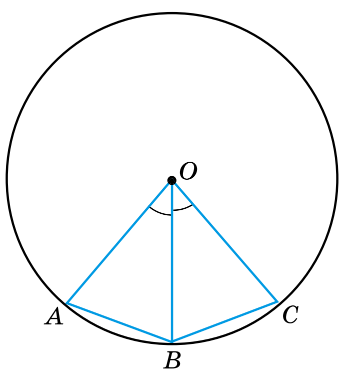
1 **1.** Накресліть коло. Проведіть у ньому радіус, діаметр і хорду.

2 **2.** Дано коло із центром у точці O. Скільки спільних точок має коло з:

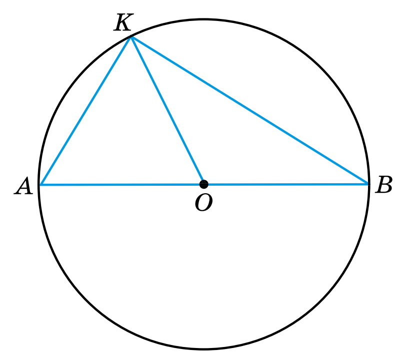
1) променем OK;

2) прямою OK?

3. У колі із центром O проведено хорди AB і BC (мал. 1). Відомо, що $\angle AOB = \angle BOC$. Доведіть, що $AB = BC$.



Мал. 1



Мал. 2

3 **4.** У колі із центром O проведено діаметр AB і хорди AK і KB (мал. 2). Знайдіть кути трикутника AKB, якщо $\angle KOB = 130°$.

5. Усі радіуси кола продовжили зовні кола на їхню довжину. Яку лінію утворять їхні кінці?

6. Розділіть хорду навпіл за допомогою лише косинця, якщо дано центр кола.

7. Знайдіть градусну міру кута між двома хордами, що виходять з однієї точки й дорівнюють радіусу.

4 **8.** AB – діаметр кола, K – деяка точка кола. Знайдіть кути трикутника ABK, якщо найменший його кут у 4 рази менший від середнього за градусною мірою кута.

9. У колі через середину радіуса OA перпендикулярно до нього проведено хорду MN. Знайдіть кути трикутника MON.

* **10.** Хорда перетинає діаметр під кутом 30° і ділить його на два відрізки 7 см і 1 см завдовжки. Знайдіть відстань від центра кола до цієї хорди.

До § 46

2 **11.** Накресліть коло, радіус якого 2,5 см. Позначте на ньому точку L. Проведіть за допомогою косинця січну LK та дотичну LM до кола.

12. Нехай OK – відстань від центра кола O до прямої p, а r – радіус кола. Яким є взаємне розміщення прямої та кола, якщо:

1) $OK = 12$ см, $r = 14$ см; 2) $r = 7$ см, $OK = 70$ мм;
3) $OK = 2$ дм, $r = 18$ см; 4) $r = 32$ мм, $OK = 0,3$ дм?

3 **13.** Чи перетинаються дотичні до кола, що проходять через кінці його діаметра?

14. Пряма в точці A дотикається до кола із центром O. На дотичній по різні боки від точки A відкладено рівні відрізки AM і AN. Доведіть, що $OM = ON$.

4 **15.** Радіус кола ділить навпіл хорду, яка не є діаметром. Доведіть, що дотична, проведена через кінець даного радіуса, паралельна даній хорді.

До § 47

2 **16.** Накресліть тупокутний трикутник. За допомогою транспортира, циркуля та лінійки побудуйте коло, вписане в цей трикутник.

3 **17.** Накресліть кут 80°. За допомогою циркуля, косинця, транспортира та лінійки з поділками впишіть у цей кут коло так, щоб точка дотику до сторін кута містилася на відстані 2 см від його вершини.

4 **18.** Центр кола, вписаного у трикутник, лежить на перетині двох медіан трикутника. Доведіть, що трикутник рівносторонній.

19. Вписане в рівнобедрений трикутник коло ділить бічну сторону у відношенні 2 : 3, починаючи від основи. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 70 см.

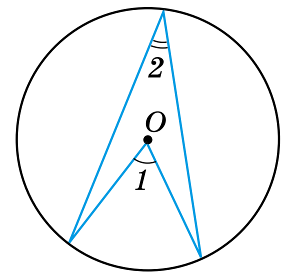
До § 48

2 **20.** Накресліть прямокутний трикутник. За допомогою креслярських інструментів опишіть навколо нього коло.

3 **21.** Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику центр описаного кола належить прямій, що містить висоту трикутника, проведену до основи.

22. Доведіть, що центр кола, описаного навколо рівностороннього трикутника, збігається із центром кола, вписаного в цей трикутник.

До § 49



Мал. 3

23. На малюнку 3 точка O – центр кола.
1) $\angle 1 = 40°$. Знайдіть $\angle 2$.
2) $\angle 2 = 25°$. Знайдіть $\angle 1$.

24. На малюнку 3 точка O – центр кола. Знайдіть $\angle 2$, якщо:
1) $\angle 1 - \angle 2 = 15°$;
2) $\angle 1 + \angle 2 = 54°$.

25. Гострокутний трикутник ABC вписано в коло із центром у точці O. Знайдіть $\angle BOC$, якщо $\angle A = \alpha$.

26. У коло радіуса 2 см вписано кут ABC, що дорівнює 30°. Знайдіть довжину хорди AC.

27. Продовження бісектриси кута A трикутника ABC перетинає коло, описане навколо трикутника, у точці K. Доведіть, що $\breve{BK} = \breve{CK}$.

28. Коло поділено чотирма точками на частини, які відносяться як 1 : 2 : 3 : 4, і точки поділу сполучено між собою відрізками. Визначте кути утвореного чотирикутника.

29. Знайдіть геометричне місце точок, з яких даний відрізок MN видно під заданим кутом α.

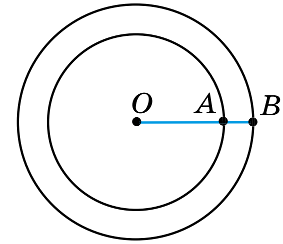
До § 50

30. Накресліть відрізок 4 см завдовжки. Побудуйте два кола, центрами яких є кінці заданого відрізка, такі, що:
1) не перетинаються; 2) перетинаються.

31. Діаметр більшого з концентричних кіл ділиться меншим колом на три частини, що дорівнюють 3 см, 8 см і 3 см. Знайдіть радіуси кіл.

32. На малюнку 4 зображено концентричні кола, радіуси яких відносяться як 10 : 7. Знайдіть ці радіуси, якщо $AB = 12$ см.

33. За якого розміщення двох кіл до них можна провести лише три спільні дотичні?



Мал. 4

34. Відстань між центрами двох кіл, що дотикаються, дорівнює 16 см. Знайдіть радіуси цих кіл, якщо вони відносяться як 5 : 3. Розгляньте всі можливі випадки.

До § 51

35. Накресліть довільний кут A і побудуйте коло із центром у його вершині, радіус якого дорівнює відрізку, зображеному на малюнку 5. Чи перетинає коло кожну зі сторін кута?

36. Побудуйте відрізок, довжина якого вдвічі більша за довжину відрізка на малюнку 5.

Мал. 5

37. Накресліть за допомогою транспортира кут, градусна міра якого дорівнює 80°. Побудуйте (без транспортира) кут, що дорівнює заданому, і його бісектрису.

38. Накресліть довільний трикутник і проведіть його бісектриси.

39. Накресліть гострокутний трикутник і проведіть його медіани. Упевніться в тому, що медіани перетнулися в одній точці.

40. Накресліть довільний тупий кут. Побудуйте кут, що дорівнює:

1) $\frac{1}{4}$ від накресленого кута;

2) $\frac{3}{4}$ від накресленого кута.

41. За двома даними кутами трикутника побудуйте кут, що дорівнює його третьому куту.

42. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник за його гіпотенузою.

43. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і гострим кутом.

44. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою a та радіусом описаного кола R ($a < 2R$). Скільки розв'язків має задача?

45. Побудуйте трикутник за двома сторонами та кутом, що лежить проти меншої з них.

46. Побудуйте рівнобедрений трикутник за кутом між бічними сторонами і бісектрисою, проведеною з вершини кута при основі.

47. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і сумою другого катета та гіпотенузи.

Головне в темі 10

- ✓ ***Коло*** – геометрична фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від заданої точки.
- ✓ ***Хорда*** – відрізок, що сполучає дві точки кола.
- ✓ ***Діаметр*** – хорда, що проходить через центр кола.
- ✓ ***Круг*** – коло разом з його внутрішньою областю.
- ✓ ***Центр, радіус, діаметр, хорда круга*** – відповідно центр, радіус, діаметр, хорда кола, яке є межею даного круга.

ВЛАСТИВОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ КОЛА

Діаметр є найбільшою з хорд.

Діаметр з будь-якої точки кола видно під прямим кутом.

Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл.

Діаметр кола, що проходить через середину хорди, яка не є діаметром, перпендикулярний до цієї хорди.

ДОТИЧНА ДО КОЛА

- ✓ ***Дотична*** до кола – пряма, яка має з колом лише одну спільну точку (це ***точка дотику***).

ВЛАСТИВІСТЬ ДОТИЧНОЇ

Дотична до кола є перпендикулярною до радіуса, який проведений у точку дотику.

Відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола, рівні між собою.

ВЛАСТИВІСТЬ БІСЕКТРИСИ КУТА

Будь-яка точка бісектриси кута рівновіддалена від сторін цього кута.

- ✓ ***Коло, вписане у трикутник,*** – коло, яке дотикається до всіх сторін цього трикутника.

  У будь-який трикутник можна вписати коло.

  Центр кола, вписаного у трикутник, – точка перетину бісектрис цього трикутника.

✓ ***Серединний перпендикуляр до відрізка*** – пряма, що проходить через середину відрізка перпендикулярно до нього.

ВЛАСТИВІСТЬ СЕРЕДИННОГО ПЕРПЕНДИКУЛЯРА ДО ВІДРІЗКА

Кожна точка серединного перпендикуляра до відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка.

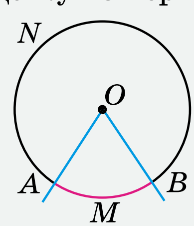
✓ ***Коло, описане навколо трикутника***, – коло, яке проходить через усі вершини цього трикутника.

Навколо будь-якого трикутника можна описати коло.

Центром кола, описаного навколо трикутника, є точка перетину серединних перпендикулярів до його сторін.

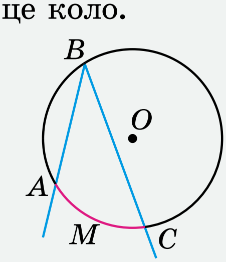
ВПИСАНІ ТА ЦЕНТРАЛЬНІ КУТИ

Центральний кут – це кут з вершиною в центрі кола.



Градусна міра дуги кола – це градусна міра відповідного центрального кута.

Вписаний кут – це кут, вершина якого належить колу, а сторони перетинають це коло.



Теорема (про вписаний кут). **Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.**

Наслідок 1. **Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, між собою рівні.**

Наслідок 2. **Вписаний кут, що спирається на діаметр, – прямий.**

ТЕМА 11

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ

У ЦІЙ ТЕМІ ВИ:

- **ознайомитеся** з лінійними рівняннями з двома змінними, системами двох лінійних рівнянь з двома змінними;
- **навчитеся** розв'язувати системи лінійних рівнянь з двома змінними; текстові задачі за допомогою систем лінійних рівнянь; будувати графіки лінійних рівнянь з двома змінними.

§ 52. Лінійне рівняння з двома змінними

Рівняння з двома змінними та його розв'язок

У попередніх параграфах ми розглядали рівняння з однією змінною. Проте в алгебрі розглядають і рівняння з кількома змінними. Зокрема, розглянемо рівняння з двома змінними.

Приклад 1. Сума одного числа з квадратом іншого дорівнює 17. Якщо перше число позначити через x, а друге – через y, то співвідношення між ними можна записати у вигляді рівності $x + y^2 = 17$, яка містить дві змінні x і y. Такі рівності називають ***рівняннями з двома змінними*** (або *рівняннями з двома невідомими*).

Якщо $x = 1$, $y = 4$, то рівняння $x + y^2 = 17$ перетворюється на правильну числову рівність. У такому випадку кажуть, що пара значень змінних $x = 1$, $y = 4$ є *розв'язком* рівняння $x + y^2 = 17$. Або скорочено: пара чисел (1; 4) є розв'язком рівняння.

Розв'язком рівняння з двома змінними **називають пару значень змінних, яка перетворює рівняння у правильну числову рівність.**

Розв'язками рівняння $x + y^2 = 17$ також є пари (–8; 5); (8; 3); (16; –1). Для такого скороченого запису розв'язків рівняння важливо знати, що пара чисел має бути *впорядкованою*.

Якщо рівняння містить змінні x і y, → **то на першому місці записують значення змінної x, а на другому – значення змінної y.**

Щоб знайти розв'язок рівняння з двома змінними, можна підставити в рівняння довільне значення однієї змінної і, розв'язавши отримане рівняння, знайти відповідне їй значення другої змінної.

Знайдемо так ще кілька розв'язків рівняння $x + y^2 = 17$. Нехай $y = -2$, тоді $x + (-2)^2 = 17$, звідки $x = 13$; нехай $y = 6$, тоді $x + 6^2 = 17$, звідки $x = -19$.

Маємо ще два розв'язки рівняння: $(13; -2)$ і $(-19; 6)$.

Лінійне рівняння з двома змінними

Лінійним рівнянням з двома змінними **називають рівняння вигляду $ax + by = c$, де x і y – змінні.**
Числа a, b і c називають ***коефіцієнтами*** **рівняння.**

Рівняння з двома змінними, які мають одні й ті самі розв'язки, називають ***рівносильними***. Рівняння, які не мають розв'язків, також є рівносильними.

Рівняння з двома змінними мають ті самі *властивості*, що й рівняння з однією змінною:
1) **якщо в рівнянні розкрити дужки або звести подібні доданки, то одержимо рівняння, рівносильне даному;**
2) **якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини в іншу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному;**
3) **якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.**

Приклад 2. Розглянемо рівняння $7x + 3y + 2 = 5(y - 1)$. Якщо в ньому розкрити дужки, потім перенести доданки, що містять змінні, в одну частину рівняння, а ті, що їх не містять, – у другу, далі звести подібні доданки, отримаємо рівняння $7x - 2y = -7$, рівносильне рівнянню $7x + 3y + 2 = 5(y - 1)$.

Використовуючи властивості рівнянь з двома змінними, можна знаходити їхні розв'язки і в інший спосіб.

Приклад 3. Розглянемо рівняння $3x + 5y = 2$. Використовуючи властивості рівносильності рівнянь, *виразимо* в цьому рівнянні *одну змінну через іншу*. Наприклад, змінну y через змінну x. Для цього спочатку $3x$ перенесемо у праву частину рівняння: $5y = -3x + 2$, потім обидві частини поділимо на 5 і одержимо $y = -0{,}6x + 0{,}4$. Це рівняння рівносильне рівнянню $3x + 5y = 2$. Тепер, маючи формулу $y = -0{,}6x + 0{,}4$, можна знайти скільки завгодно розв'язків рівняння $3x + 5y = 2$. Для цього достатньо взяти довільне значення змінної x і обчислити відповідне йому значення змінної y. Пари таких значень змінних x і y занесемо в таблицю:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	3,4	2,8	2,2	1,6	1	0,4	–0,2	–0,8	–1,4	–2	–2,6

Пари чисел, записані у стовпчиках таблиці, є розв'язками рівняння $3x + 5y = 2$. Це рівняння має безліч розв'язків.

Наведіть приклад рівняння з двома змінними. Що називають розв'язком рівняння з двома змінними? Сформулюйте означення лінійного рівняння з двома змінними. Наведіть приклад лінійного рівняння з двома змінними. Які рівняння з двома змінними називають рівносильними? Які властивості мають рівняння з двома змінними?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

52.1. (*Усно.*) Укажіть рівняння, що є рівняннями з двома змінними:

1) $x^2 - 3xy = 5$;
2) $4x^2 - 5x - 1 = 0$;
3) $3x + 2y = 5$;
4) $x + y + z = 8$;
5) $x + 2x^2 = y - 3y^2$;
6) $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3$.

52.2. (*Усно.*) Чи є лінійним рівняння з двома змінними:

1) $4x - 5y = 9$;
2) $3x^2 - 4y = 5$;
3) $2x + 11y = 0$;
4) $\frac{x+2}{y-1} = 7$;
5) $0x + 3y = 12$;
6) $13x + 2y^2 = 3$?

52.3. Укажіть рівняння з двома змінними. Які з них є лінійними:

1) $3x - 2y = 5$;
2) $2x^2 - 3y^2 = 1$;
3) $(x - 2)(y + 1) = 5$;
4) $4x - 0y = 8$;
5) $xyz = 12$;
6) $\frac{1}{7}x + \frac{1}{8}y = \frac{1}{9}$?

52.4. (*Усно.*) Чи є пара чисел розв'язком рівняння $x - y = 0$:
1) (4; 4); 2) (–1; 1); 3) (0; 0)?

52.5. Чи є пара чисел $x = 2$, $y = 3$ розв'язком рівняння $x + y = 5$? Знайдіть ще три розв'язки цього рівняння.

52.6. Які з пар чисел (10; 1), (1; 10), (7; 2), (7; –2), (9; 0) є розв'язками рівняння $x - y = 9$?

52.7. Які з пар чисел (2; 1), (2; –1), (0; 5), (1; 3), (–1; 5) є розв'язками рівняння $2x + y = 5$?

2

52.8. Розв'язком яких рівнянь є пара чисел (–1; 3):
1) $2x - 17y = 53$; 2) $3x^2 + y^2 = 12$;
3) $(x - 3)(y + 2) = -20$; 4) $0x + 4y = -12$;
5) $0x + 0y = 0$; 6) $x^2 + 1 = y^2 - 7$?

52.9. Розв'язком яких рівнянь є пара чисел $x = 2$, $y = -1$:
1) $3x + y = 5$; 2) $x^2 + y^2 = 3$;
3) $2x + 0y = 4$; 4) $x(y + 3) = 14$;
5) $0x + 0y = 7$; 6) $\frac{1}{2}x + y = 0$?

52.10. Знайдіть три будь-яких розв'язки рівняння:
1) $x + y = -3$; 2) $x - 2y = 5$.

52.11. Знайдіть три будь-яких розв'язки рівняння:
1) $x - y = 2$; 2) $x + 3y = 0$.

52.12. Складіть лінійне рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел $x = 3$, $y = -2$.

52.13. Складіть лінійне рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел (–2; 0).

52.14. Виразіть з рівняння $5x + y = 7$ змінну y через змінну x.

52.15. Виразіть з рівняння $x - 3y = 9$ змінну x через змінну y.

3

52.16. З лінійного рівняння $3x - 2y = 12$ виразіть:
1) змінну y через змінну x;
2) змінну x через змінну y.

52.17. Виразивши в рівнянні змінну y через змінну x, знайдіть два будь-яких розв'язки рівняння:
1) $x + y = 29$; 2) $5x + y = 7$;
3) $3x - 2y = 15$; 4) $6y - x = 5$.

52.18. Виразивши в рівнянні змінну y через змінну x або змінну x через змінну y, знайдіть три будь-яких розв'язки рівняння:
1) $x - 2y = -8$; 2) $7x - y = 9$;
3) $3x + 2y = 6$; 4) $5x - 7y = 12$.

52.19. Пара чисел $(-5; p)$ є розв'язком рівняння $2x - y = -13$. Знайдіть p.

52.20. Пара чисел $(n; -1)$ є розв'язком рівняння $3x + 5y = 4$. Знайдіть n.

52.21. Знайдіть m, якщо пара чисел $(-1; -3)$ є розв'язком рівняння:
1) $8x + 9y = m$; 2) $mx - 2y = -9$.

52.22. Для якого значення d пара чисел $(2; -1)$ є розв'язком рівняння:
1) $7x - 5y = d$; 2) $3x + dy = 8$?

52.23. Знайдіть два деяких розв'язки рівняння

$$2(x - y) = 3(x + y) + 4.$$

52.24. Серед розв'язків рівняння $x + 3y = 20$ знайдіть пару рівних між собою чисел.

52.25. Знайдіть p, якщо:
1) пара $(p; p)$ є розв'язком рівняння $4x - 9y = -10$;
2) пара $(p; -p)$ є розв'язком рівняння $17x + 12y = 105$.

4 **52.26.** Знайдіть усі пари натуральних чисел, які є розв'язками рівняння:
1) $2x + y = -7$; 2) $3x + 2y = 5$;
3) $x + 7y = 15$; 4) $xy = 7$.

Вправи для повторення

52.27. Функцію задано формулою $y = \dfrac{2x+1}{x-6}$. Заповніть у зошиті таблицю, обчисливши відповідні значення функції:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y								

52.28. Спростіть вираз і знайдіть його значення:
1) $(x - 10)^2 - x(x + 80)$, якщо $x = -0{,}83$;
2) $(5m + 3)^2 - (5m - 3)^2$, якщо $m = -\dfrac{17}{60}$.

52.29. Відомо, що $a + b = -1$, $ab = -6$. Знайдіть значення виразів:
1) $a^2b + ab^2$;
2) $a^2 + b^2$;
3) $(a - b)^2$;
4) $a^3 + b^3$.

Життєва математика

52.30. Роздрібна ціна підручника для 7 класу становить 180 грн, що на 20 % вище за оптову ціну. Скільки коштуватимуть 28 таких підручників, придбаних для 7 класу, за оптовою ціною?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

52.31. Побудуйте графік лінійної функції:
1) $y = x + 3$; 2) $y = -2x + 1$;
3) $y = 0{,}6x + 2$; 4) $y = -2$.

Цікаві задачі — поміркуй одначе

52.32. Дано два трицифрових числа, сума яких ділиться на 37. Ці числа записали в рядок одне за одним. Доведіть, що отримане в такий спосіб шестицифрове число також ділиться на 37.

§ 53. Графік лінійного рівняння з двома змінними

Графік рівняння з двома змінними

Кожну пару чисел, що є розв'язком рівняння з двома змінними x і y, можна позначити на координатній площині точкою, абсциса якої – значення x, а ордината – значення y. Усі такі точки утворюють *графік рівняння з двома змінними*.

Графіком рівняння з двома змінними **x і y називають фігуру, що складається з усіх точок координатної площини, координати яких є розв'язками цього рівняння.**

Графік рівняння $ax + by = c$, у якому хоча б один з коефіцієнтів a або b відмінний від нуля

З'ясуємо, як виглядає графік лінійного рівняння з двома змінними.

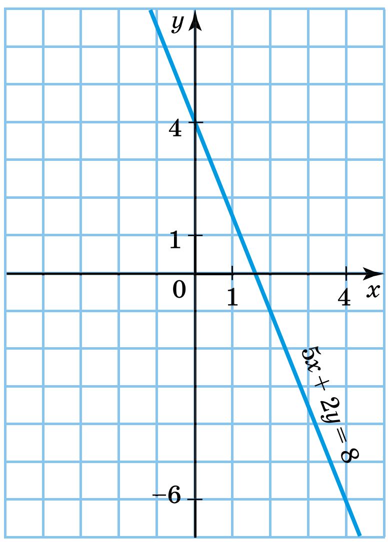
Приклад 1. Побудувати графік лінійного рівняння з двома змінними $5x + 2y = 8$.

Розв'язання. Виразимо змінну y через змінну x, маємо: $2y = -5x + 8$. Отже, $y = -2{,}5x + 4$.

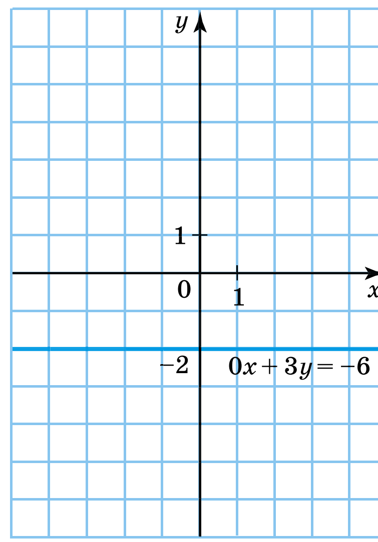
Формула $y = -2{,}5x + 4$ задає лінійну функцію, графіком якої є пряма. Для побудови графіка складемо таблицю значень x і y для двох його точок:

x	0	4
y	4	–6

Графік функції $y = -2{,}5x + 4$ зображено на малюнку 53.1. Оскільки рівняння $5x + 2y = 8$ та $y = -2{,}5x + 4$ є рівносильними, то побудована пряма є також і графіком рівняння $5x + 2y = 8$.



Мал. 53.1



Мал. 53.2

Приклад 2. Побудувати графік лінійного рівняння з двома змінними $0x + 3y = -6$.

Розв'язання. Рівняння $0x + 3y = -6$ рівносильне рівнянню $y = -2$. Це лінійна функція, графіком якої є пряма, паралельна осі x, що проходить через точку $(0; -2)$. Цю пряму зображено на малюнку 53.2. Вона також є графіком рівняння $0x + 3y = -6$.

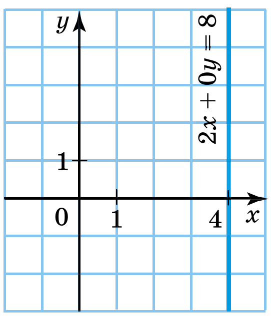
За допомогою аналогічних міркувань можна показати, що графіком будь-якого лінійного рівняння з двома змінними $ax + by = c$, де $b \neq 0$, є пряма.

Розглянемо випадок, коли $b = 0$.

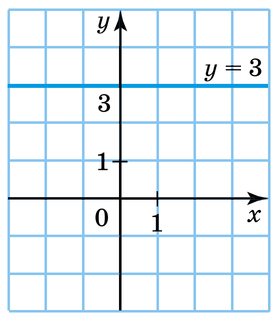
Приклад 3. Побудувати графік рівняння $2x + 0y = 8$.

Розв'язання. Розв'язком даного рівняння є кожна пара чисел вигляду $(4; y)$, де y – будь-яке число. Наприклад, $(4; -2)$, $(4; 0)$, $(4; 3)$, $(4; 7{,}5)$ – теж розв'язки даного рівняння. Графік рівняння складається з усіх точок, абсциси яких дорівнюють 4, а ординати – будь-які числа. Такі точки утворюють пряму, яка проходить через точку (4; 0) паралельно осі y. Цю пряму зображено на малюнку 53.3.

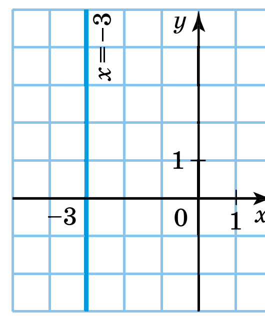
Графіком рівняння $ax + by = c$, у якому хоча б один з коефіцієнтів a або b відмінний від нуля, є пряма.



Мал. 53.3



Мал. 53.4



Мал. 53.5

Приклад 4. На малюнку 53.4 зображено графік рівняння $0x + 1{,}7y = 5{,}1$, тобто це графік рівняння $y = 3$, а на малюнку 53.5 – графік рівняння $\frac{1}{3}x + 0y = -1$, тобто $x = -3$.

1) **Щоб побудувати графік рівняння $y = m$, достатньо позначити на осі y точку $(0;\ m)$ та провести через неї пряму паралельно осі x.**
2) **Щоб побудувати графік рівняння $x = n$, достатньо позначити на осі x точку $(n;\ 0)$ та провести через неї пряму паралельно осі y.**

Графік рівняння $0x + 0y = c$

Розглянемо випадок, коли в лінійному рівнянні $ax + by = c$ обидва коефіцієнти a і b дорівнюють нулю.

Приклад 5. Нехай $a = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$. Тоді маємо рівняння $0x + 0y = c$, наприклад $0x + 0y = 2$. Це рівняння не має розв'язків, отже, його графік не містить жодної точки, а тому не існує.

Приклад 6. Нехай $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. Тоді маємо рівняння $0x + 0y = 0$. Будь-яка пара чисел є розв'язком цього рівняння, а його графіком – усі точки координатної площини.

Що називають графіком рівняння з двома змінними x і y? ○ Яка фігура є графіком рівняння $ax + by = c$, у якому хоча б один з коефіцієнтів a або b відмінний від нуля? ○ Як побудувати графік рівняння $y = m$, де m – число; графік рівняння $x = n$, де n – число?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

53.1. (*Усно.*) Чи належить графіку рівняння $x + y = 6$ точка:
1) $(5; 1)$; 2) $(4; -2)$; 3) $(1; 6)$; 4) $(6; 0)$?

53.2. Які з точок $A(4; 0)$, $B(1; 3)$, $C(3; -1)$, $D(0; 4)$, $E(5; 1)$ належать графіку рівняння $x - y = 4$?

2

53.3. Чи проходить графік рівняння $7x + 5y = 25$ через точку:
1) $(7; -4)$; 2) $(5; -2)$; 3) $(-1,4; 7)$; 4) $(35; -44)$?

53.4. Графіки яких рівнянь проходять через точку $P(-2; 3)$:
1) $7x + 9y = 15$; 2) $17y - 4x = 59$;
3) $0x + 5y = 15$; 4) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}y = -1$;
5) $0x + 0y = 5$; 6) $1,7x + 1,2y = 0,2$?

53.5. Доведіть, що графіки рівнянь $5x - 8y = -66$, $0x + 3y = 21$ та $7y - 4x = 57$ проходять через точку $M(-2; 7)$.

53.6. Назвіть дві довільні точки, які належать графіку рівняння $2x - 5y = 20$.

53.7. Знайдіть дві точки, які належать графіку рівняння $3x + 2y = 12$, і дві точки, які йому не належать.

53.8. Побудуйте графік рівняння:
1) $x - y = 5$; 2) $0,5x + y = 3$;
3) $x + 3y = 0$; 4) $0,2x - 0,4y = 2$.

53.9. Побудуйте графік рівняння:
1) $x + y = 6$; 2) $y - 2x = 0$;
3) $x - 0,5y = 4$; 4) $2x + 3y = 5$.

53.10. Запишіть яке-небудь лінійне рівняння з двома змінними, графік якого проходить через точку $P(1; -3)$.

3

53.11. На графіку рівняння $2x + 3y = 7$ вибрано точку з абсцисою -4. Знайдіть ординату цієї точки.

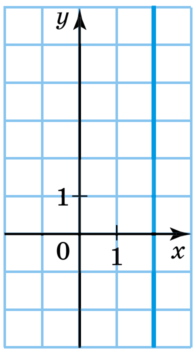
53.12. На графіку рівняння $5x - 7y = 16$ взято точку з ординатою -2. Яка абсциса цієї точки?

53.13. Побудуйте графік рівняння:
1) $0x + 2,5y = 12,5$; 2) $7x + 0y = -14$;
3) $1,9x = 5,7$; 4) $3y = -7,5$.

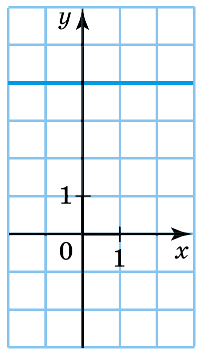
53.14. Побудуйте графік рівняння:

1) $3x + 0y = -12$; 2) $0x - 1{,}2y = 3{,}6$;
3) $1{,}8y = 7{,}2$; 4) $4x = 6$.

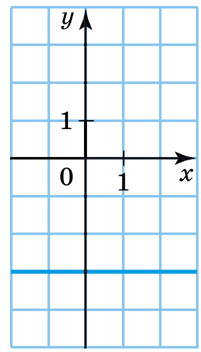
53.15. Запишіть рівняння, графіки яких зображено на малюнках 53.6–53.9.



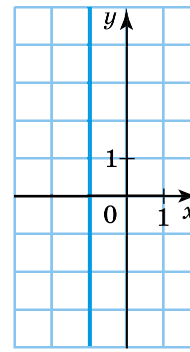
Мал. 53.6



Мал. 53.7



Мал. 53.8



Мал. 53.9

53.16. За якого значення m графік рівняння:

1) $5x + 7y = m$ проходить через початок координат;
2) $mx + 2y = 14$ проходить через точку $(2; -3)$;
3) $3x - 4y = m + 2$ проходить через точку $(-1; 5)$?

53.17. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків рівнянь з осями координат:

1) $x + 7y = -21$; 2) $5x - 3y = 15$.

53.18. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків рівнянь з осями координат:

1) $3x + y = 18$; 2) $-7x - 2y = 28$.

53.19. Побудуйте графік рівняння:

1) $2(x + y) - 3y = 1$; 2) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = \frac{1}{6}$.

53.20. Побудуйте графік рівняння:

1) $5(x - y) - 4(x + y) = -7$; 2) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$.

4

53.21. Не виконуючи побудови, визначте, через які координатні кути проходить графік рівняння:

1) $2x - 6y = 0$; 2) $3x + y = 0$;
3) $1{,}9x = 190$; 4) $-8y = 720$.

53.22. Побудуйте в одній системі координат графіки рівнянь $2x + 3y = 6$ і $4x + 6y = 8$. Чи перетинаються ці графіки?

53.23. Побудуйте графік рівняння $\frac{x-3}{5} + \frac{y+4}{3} = \frac{7}{15}$.

Вправи для повторення

53.24. Пряму пропорційність задано формулою $y = -\frac{1}{4}x$. Знайдіть:

1) значення y, якщо $x = -8$; 0; 12; 20;
2) значення x, якщо $y = -2$; 3; 10.

53.25. Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $64a^2 - (8a - 1)^2 + 14a$;
2) $m^2 + 4n^2 - (m + 2n)^2 - 12mn$;
3) $2m(m - 5) - (m - 5)^2$;
4) $(x - 3)(x + 5) - (x + 1)^2$.

53.26. Автомобіль та автобус одночасно виїхали назустріч один одному з пунктів A і B, відстань між якими 240 км. Швидкість автомобіля на 20 км/год більша за швидкість автобуса. Знайдіть швидкість автобуса та швидкість автомобіля, якщо вони зустрілися через 2 год після виїзду, при цьому автомобіль зробив на шляху півгодинну зупинку.

Життєва математика

53.27. Маса новонародженої дитини в середньому має становити 3 кг 300 г. Якщо батько дитини є курцем, то її маса буде на 125 г меншою від середньої, якщо ж курить мати, – меншою на 300 г. Визначте, скільки відсотків маси втрачає дитина при народженні, якщо:

1) курить її батько; 2) курить її мати.

Відповідь округліть до цілих відсотків.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

53.28. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = 0{,}5x + 2$ і $y = 5 - x$. За графіком знайдіть координати точки їхнього перетину.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

53.29. Доведіть, що для будь-якого значення x значення виразу $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$ є числом додатним.

§ 54. Система двох лінійних рівнянь з двома змінними та її розв'язок. Розв'язування систем лінійних рівнянь з двома змінними графічно

Поняття про систему рівнянь з двома змінними та її розв'язок

Приклад 1. За набір фарб і набір пензлів разом заплатили 96 грн, причому набір фарб був на 16 грн дорожчий за набір пензлів. Скільки коштує набір фарб і скільки – набір пензлів?

Розв'язання. Цю задачу можна розв'язати арифметичним способом (по діях) або за допомогою рівняння з однією змінною. А ще її можна розв'язати за допомогою лінійних рівнянь з двома змінними.

Якщо вартість набору фарб позначити через x грн, а набору пензлів – через y грн, то, враховуючи, що вони разом коштують 96 грн, отримаємо рівняння: $x + y = 96$.

Оскільки набір фарб дорожчий за набір пензлів на 16 грн, то маємо ще одне рівняння: $x - y = 16$.

Отримали два рівняння з двома змінними, які є математичною моделлю задачі.

Щоб розв'язати задачу, потрібно знайти такі значення змінних x і y, які б одночасно перетворювали у правильну рівність кожне з отриманих рівнянь, тобто знайти спільний розв'язок цих рівнянь.

Якщо є кілька рівнянь, для яких потрібно знайти спільний розв'язок, то кажуть, що ці рівняння утворюють ***систему рівнянь***. Записують систему рівнянь за допомогою фігурної дужки. Складену за умовою даної задачі ***систему лінійних рівнянь з двома змінними*** записують так:

$$\begin{cases} x + y = 96, \\ x - y = 16. \end{cases}$$

Розв'язком кожного з рівнянь системи є пара значень змінних $x = 56$, $y = 40$. Її називають *розв'язком системи рівнянь*.

Розв'язком системи рівнянь з двома змінними **називають пару значень змінних, яка є розв'язком кожного з рівнянь системи.**

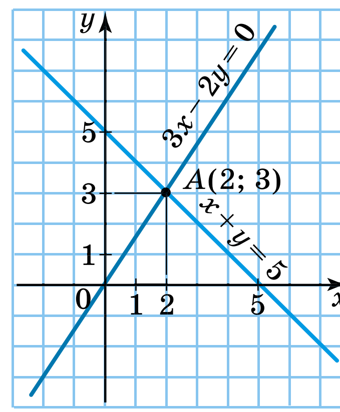
Розв'язати систему рівнянь **означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.**

Графічний спосіб розв'язування системи лінійних рівнянь з двома змінними

Для розв'язування системи лінійних рівнянь з двома змінними можна використовувати графіки рівнянь. Такий спосіб розв'язування систем рівнянь називають ***графічним***. Розглянемо його на прикладі.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 5, \\ 3x - 2y = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Побудуємо в одній координатній площині графіки обох рівнянь (мал. 54.1). Координати кожної точки прямої, що є графіком рівняння $x + y = 5$, є розв'язками першого рівняння системи. Аналогічно координати кожної точки прямої $3x - 2y = 0$ є розв'язками другого рівняння системи. Координати точки перетину цих прямих є розв'язками і першого, і другого рівняння, тобто є розв'язком кожного з рівнянь, отже, і розв'язком даної системи рівнянь. Оскільки графіки перетинаються лише в точці (2; 3), то система має єдиний розв'язок $x = 2$, $y = 3$. Перевіркою (підстановкою в кожне з рівнянь системи) впевнюємося, що ця пара чисел дійсно є розв'язком даної системи. Цей розв'язок можна записати ще так: (2; 3), де на першому місці – значення змінної x, а на другому – значення змінної y.



Мал. 54.1

Відповідь: (2; 3).

Зауважимо, що графічний спосіб зазвичай дає змогу знаходити розв'язки лише наближено. У прикладі 2 перевіркою ми переконалися, що пара (2; 3) є точним розв'язком.

Розглянемо системи двох лінійних рівнянь з двома змінними, у кожному з яких хоча б один з коефіцієнтів при змінних x і y відмінний від нуля. Графіками обох рівнянь системи є прямі. Тому якщо ці прямі перетинаються, то система має єдиний розв'язок; якщо прямі не перетинаються (паралельні), то система не має розв'язків; якщо прямі збігаються, то система має безліч розв'язків.

Отже,

щоб розв'язати систему рівнянь графічно, доцільно дотримуватися такої послідовності дій:

1) побудувати графіки рівнянь системи в одній координатній площині;

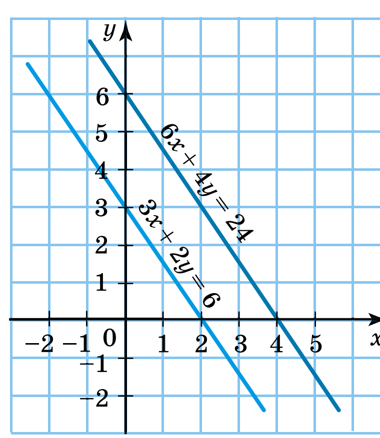
2) знайти координати точки перетину графіків або впевнитися, що вони не перетинаються (є паралельними) або збігаються;

3) якщо координати точки перетину є цілими числами, то виконати перевірку; якщо – ні, то розв'язок системи визначити наближено;

4) записати розв'язок у відповідь.

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ 6x + 4y = 24. \end{cases}$

Розв'язання. 1-й спосіб. Побудуємо графіки рівнянь в одній координатній площині (мал. 54.2). Графіки рівнянь є паралельними прямими, отже, не мають спільної точки, тому система розв'язків не має.



Мал. 54.2

Оскільки малюнок не дає потрібної точності, пересвідчитися, що система не має розв'язків, можна і в інший спосіб.

2-й спосіб. Поділивши обидві частини другого рівняння на 2, матимемо:

$\begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ 3x + 2y = 12. \end{cases}$

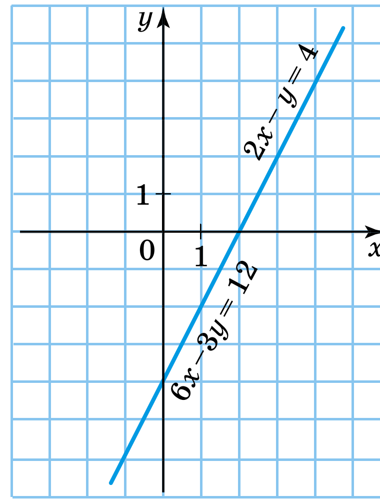
Очевидно, що не існує таких значень змінних x і y, для яких би одночасно виконувалися рівності $3x + 2y = 6$ і $3x + 2y = 12$. Отже, система рівнянь розв'язків не має.

Відповідь: немає розв'язків.

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ 6x - 3y = 12. \end{cases}$$

Розв'язання. 1-й спосіб. Побудуємо графіки рівнянь в одній координатній площині (мал. 54.3). Графіки рівнянь збігаються, тому дана система має безліч розв'язків. Будь-яка пара чисел, що є розв'язком першого рівняння, є розв'язком і другого. Щоб записати до системи відповідь, виразимо y через x з першого рівняння: $y = 2x - 4$. Так, будь-яка пара чисел вигляду $(x;\ 2x - 4)$, де x – довільне число, є розв'язком даної системи.



Мал. 54.3

2-й спосіб. Поділивши обидві частини другого рівняння на 3, матимемо:

$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ 2x - y = 4. \end{cases}$$

Очевидно, що маємо два однакових рівняння, отже, їхні графіки збігаються. Далі міркуємо так само, як у *1-му способі*.

Відповідь: $(x;\ 2x - 4)$, де x – довільне число.

А ще раніше...

Китайські математики вміли розв'язувати системи лінійних рівнянь ще дві тисячі років тому. Вони винайшли загальний метод розв'язування таких систем, причому не тільки з двома, а й з більшою кількістю рівнянь і змінних.

А давньогрецький математик Діофант (бл. III ст. до н. е.) розв'язував і деякі системи нелінійних рівнянь з двома змінними. Тому надалі рівняння з кількома змінними, для яких потрібно знайти розв'язки в натуральних числах (натуральні розв'язки рівняння), стали називати **діофантовими** рівняннями.

- Що називають розв'язком системи рівнянь з двома змінними?
- Що означає розв'язати систему рівнянь?
- Скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь з двома змінними?
- Як розв'язати систему двох лінійних рівнянь з двома змінними графічно?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

54.1. (*Усно.*) Яка з даних систем є системою двох лінійних рівнянь з двома змінними:

1) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y^2 = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 7x - 4y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - y = 9, \\ xy = 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 2, \\ x - y = -9 \end{cases}$?

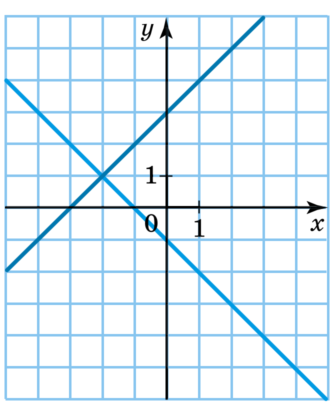
54.2. (*Усно.*) Чи є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 1 \end{cases}$ пара чисел:

1) (3; 4); 2) (4; 3); 3) (6; 1)?

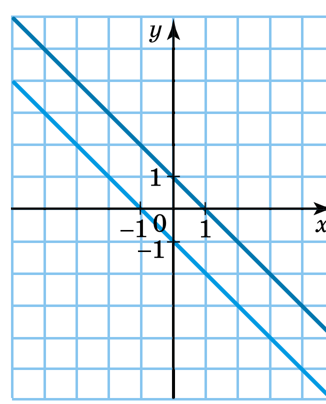
54.3. Яка з наведених пар чисел є розв'язком системи $\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1? \end{cases}$

1) (5; 0); 2) (2; 3); 3) (3; 2).

54.4. (*Усно.*) Скільки розв'язків має система, графіки рівнянь якої зображено на малюнку 54.4? На малюнку 54.5?



Мал. 54.4



Мал. 54.5

2

54.5. (*Усно.*) Чи є пара чисел (–2; 1) розв'язком системи:

1) $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 3x - 7y = -13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + 7y = -3, \\ 9x - 11y = 29; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x = 5 - 9y, \\ 7y - 12x = 31? \end{cases}$

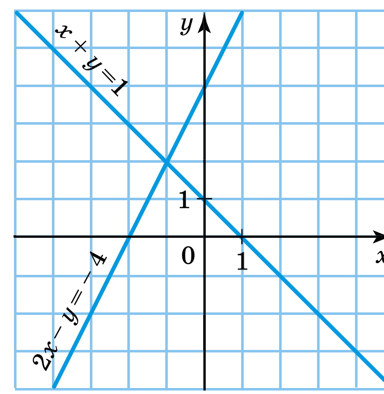
54.6. Яка з пар (3; –4), (7; 2), (4; –3) є розв'язком системи:

1) $\begin{cases} 2x - 3y = 17, \\ 5x + 2y = 14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 7y = 0, \\ 3x + 5y = 31? \end{cases}$

54.7. Складіть систему лінійних рівнянь з двома змінними, розв'язком якої є пара чисел:

1) (1; –3); 2) (4; 5).

54.8. Знайдіть координати точки перетину прямих, які зображено на малюнку 54.6. Запишіть відповідну цим прямим систему рівнянь. Перевірте розв'язок, підставивши координати знайденої точки в кожне з рівнянь.



Мал. 54.6

54.9. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = -x, \\ y = 4 + x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 2x, \\ y = 3 + x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x + 2y = -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ x - y = 4. \end{cases}$

54.10. Розв'яжіть систему рівнянь графічно:

1) $\begin{cases} y = x, \\ y = 6 - x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = -2x, \\ y = 4 - x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x - 2y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x + y = 7, \\ x + y = 3. \end{cases}$

3

54.11. Пара (2; –5) – розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} 2x + by = 5, \\ ax - 6y = 13. \end{cases}$

Знайдіть a і b.

54.12. Знайдіть a і b, якщо пара (10; –2) є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} ax - 5y = 17, \\ 3x + by = 9. \end{cases}$

54.13. Розв'яжіть систему рівнянь графічно:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ 3x - y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 7y = 12, \\ 3x - 2y = -7. \end{cases}$

54.14. Розв’яжіть систему рівнянь графічно:

1) $\begin{cases} 2x - 3y = -10, \\ 6x - y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 5y = -4, \\ 7x - 2y = 25. \end{cases}$

54.15. З’ясуйте, чи має система розв’язки і скільки:

1) $\begin{cases} 2x - y = 5, \\ 3x + y = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0,5x - y = 4, \\ -x + 2y = -8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 5y = 7, \\ y = -0,2x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$

54.16. Чи має система розв’язки і скільки:

1) $\begin{cases} x + y = 7, \\ 3x - y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 2x - 4y = 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 2y, \\ 1,5x - 3y = 0? \end{cases}$

54.17. Розв’яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} 2x + y = -3, \\ x + 5y = 4. \end{cases}$ Перевірте, чи є одержаний розв’язок точним. Чи є розв’язком даної системи пара чисел $\left(-2\frac{1}{9};\ 1\frac{2}{9}\right)$?

54.18. Розв’яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} x + 3y = 7, \\ 3x - y = 4. \end{cases}$ Перевірте, чи є одержаний розв’язок точним. Чи є розв’язком даної системи пара чисел (1,9; 1,7)?

4

54.19. Не виконуючи побудови, доведіть, що система рівнянь $\begin{cases} x - 7y = 8, \\ -4x + 28y = -31 \end{cases}$ не має розв’язків.

54.20. Не виконуючи побудови, доведіть, що система рівнянь $\begin{cases} 2x + 5y = 18, \\ -3x - 7,5y = -27 \end{cases}$ має безліч розв’язків.

54.21. Знайдіть які-небудь розв’язки системи $\begin{cases} 3x + y = 5, \\ -9x - 3y = -15. \end{cases}$ Скільки всього розв’язків вона має? Розв’яжіть її.

54.22. Розв’яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ -6x + 4y = -10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 3y = -4, \\ 3x + 9y = 12. \end{cases}$

54.23. До рівняння $x + 3y = 5$ доберіть друге рівняння так, щоб одержана система рівнянь мала:
1) лише один розв'язок;
2) безліч розв'язків.

54.24. До рівняння $2x - y = 7$ доберіть друге рівняння так, щоб одержана система рівнянь не мала розв'язків.

Вправи для повторення

54.25. Які з точок $A(4; -2)$, $B(0; 0)$, $C(-1; -5)$, $D(1; 2)$ належать графіку прямої пропорційності:
1) $y = -0{,}5x$;
2) $y = 5x$?

54.26. Спростіть вираз:
1) $7m(m - 3) - 3(m - 2)(m + 2)$;
2) $(1 - 2x)(2x + 1) - (3x - 1)^2$;
3) $(2x + 3y)^2 - (x + 3y)(2x - y)$;
4) $(4a - 5b)(5b + 4a) - (2a - 5b)^2$.

54.27. Доведіть, що вираз $-x^2 + 8x - 17$ для будь-яких значень x набуває лише від'ємних значень. Якого найбільшого значення набуває цей вираз і для якого значення x?

Життєва математика

54.28. Тариф на послуги таксі в одній з компаній-перевізників формується так: пасажир сплачує по 6 грн за кожний кілометр шляху та додатково 30 грн за приїзд машини. Задайте формулою залежність витрат p (у грн) на одну поїздку від довжини шляху s (у км).

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

54.29. Виразіть з рівняння змінну y через x або x через y:
1) $x - 4y = -5$; 2) $8x - y = 1$;
3) $2x - 3y = 5$; 4) $3x + 5y = -10$.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

54.30. Припустимо, що вираз $(4 - 3x)^{2025}$ записано у вигляді многочлена. Знайдіть суму коефіцієнтів цього многочлена.

§ 55. Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки

Поняття про спосіб підстановки

Графічний спосіб розв'язування систем рівнянь є досить громіздким і до того ж не завжди допомагає знайти точні розв'язки. Розглянемо інші (не графічні) способи розв'язування систем лінійних рівнянь з двома змінними, їх називають *аналітичними*. Почнемо зі ***способу підстановки***.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ -3x + 4y = -10. \end{cases}$ (1)

Розв'язання. З першого рівняння виразимо змінну y через змінну x: $y = 3 - 2x$.

Підставимо вираз $3 - 2x$ у друге рівняння замість y. Маємо:

$$\begin{cases} y = 3 - 2x, \\ -3x + 4(3 - 2x) = -10. \end{cases} \qquad (2)$$

Тепер друге рівняння системи (2) містить лише змінну x. Розв'яжемо його: $-3x + 12 - 8x = -10;$

$-11x = -22;$

$x = 2.$

Підставимо число 2 замість x у рівність $y = 3 - 2x$. Одержимо відповідне значення y: $y = 3 - 2 \cdot 2;$

$y = -1.$

Пара $(2; -1)$ є розв'язком кожного з рівнянь системи (2), отже, є розв'язком системи (2). Ця пара є розв'язком кожного з рівнянь системи (1) і тому є розв'язком системи (1).

Відповідь: $(2; -1)$.

Рівносильні системи рівнянь

Системи рівнянь з двома змінними, які мають одні й ті самі розв'язки, називають *рівносильними*. Системи, які не мають розв'язків, також вважають рівносильними.

Розв'язуючи систему (1) способом підстановки, ми замінили її рівносильною їй системою (2), друге рівняння якої містило лише одну змінну.

Алгоритм розв'язування системи лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки

Послідовність дій, якої слід дотримуватися, розв'язуючи систему лінійних рівнянь з двома змінними *способом підстановки*, розглянемо на прикладі системи $\begin{cases} 3x - 7y = 1, \\ 4x + 9y = 38. \end{cases}$

	Дія	*Результат*
1	Виразити з якого-небудь рівняння системи одну змінну через другу (наприклад, з першого)	$3x = 1 + 7y,$ $x = \dfrac{1+7y}{3}$
2	Одержаний для цієї змінної вираз підставити у друге рівняння системи	$4 \cdot \dfrac{1+7y}{3} + 9y = 38$
3	Розв'язати одержане рівняння з однією змінною, тобто знайти значення цієї змінної	$4(1 + 7y) + 3 \cdot 9y = 3 \cdot 38,$ $4 + 28y + 27y = 114,$ $55y = 110,$ $y = 2$
4	Знайти відповідне їй значення другої змінної	$x = \dfrac{1 + 7 \cdot 2}{3},$ $x = 5$
5	Записати відповідь	*Відповідь*: (5; 2)

Спосіб підстановки зручно застосовувати тоді, коли хоча б один з коефіцієнтів при змінних x або y дорівнює 1 або –1. Саме змінну з таким коефіцієнтом доцільно виразити через іншу.

Способом підстановки можна розв'язати й інші системи.

Приклад 2. Розв'язати систему $\begin{cases} 4(y + 3) - 3(x - 1) = 40, \\ \dfrac{x+2}{3} + \dfrac{y-4}{2} = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

Розв'язання. У першому рівнянні системи розкриємо дужки, а обидві частини другого рівняння помножимо на 6. Матимемо:

$$\begin{cases} 4y + 12 - 3x + 3 = 40, \\ 2(x + 2) + 3(y - 4) = -2. \end{cases}$$

Спростивши кожне з рівнянь системи, зведемо її до вигляду:

$$\begin{cases} -3x + 4y = 25, \\ 2x + 3y = 6. \end{cases}$$

Далі застосуємо спосіб підстановки. Виразимо з першого рівняння y через x: $y = \dfrac{25 + 3x}{4}$. Підставивши цей вираз у друге рівняння і розв'язавши його, одержимо, що $x = -3$.

Далі знайдемо відповідне йому значення y: $y = \dfrac{25 + 3 \cdot (-3)}{4}$, тобто $y = 4$.

Відповідь: $(-3; 4)$.

Якої послідовності дій слід дотримуватися, розв'язуючи систему двох лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

55.1. (*Усно.*) У якій з рівностей 1–3 правильно виконано підстановку для розв'язування системи рівнянь $\begin{cases} x = 7y - 5, \\ 2x + 3y = 9? \end{cases}$

1) $2x + 3(7y - 5) = 9$;
2) $2 + (7y - 5) + 3y = 9$;
3) $2(7y - 5) + 3y = 9$.

55.2. Яка з рівностей є правильно застосованою підстановкою для розв'язування системи рівнянь $\begin{cases} y = 4x + 3, \\ 7x + 2y = 9? \end{cases}$

1) $7(4x + 3) + 2y = 9$;
2) $7x + 2 - (4x + 3) = 9$;
3) $7x + 2(4x + 3) = 9$.

2

55.3. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

1) $\begin{cases} 7x = 21, \\ 2x - 3y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x - y = 17, \\ -2y = 10. \end{cases}$

55.4. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x = y + 2, \\ 4x - 8y = 20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x - 3, \\ 5x + 2y = 29. \end{cases}$

55.5. Знайдіть розв'язок системи рівнянь:

1) $\begin{cases} -4x = 8, \\ 5x - 2y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x + 5, \\ 7x + 3y = -5. \end{cases}$

55.6. Знайдіть розв'язок системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x + y = 7, \\ 2x + y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = -2, \\ x - 2y = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x = 0, \\ 4x + y = 15; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5x + 2y = 2, \\ x - 2y = 10; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x - 3y = 7, \\ 2x - 3y = -3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 5x - 3y = -19, \\ 2x + y = -1. \end{cases}$

55.7. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ 3x + y = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 0, \\ x - 2y = 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y - x = -5, \\ 2x + y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ x + 2y = 2. \end{cases}$

55.8. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь $x + y = 4$ і $2x + 3y = 9$.

55.9. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь $x - y = 3$ і $3x + 2y = 14$.

3

55.10. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ 2x - 7y = 29; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8x - 5y = 41, \\ 4x + 3y = -7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2a - 5b = 0, \\ -7a + 4b = 27; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 10m - 2n = 39, \\ 9m + 4n = 38. \end{cases}$

55.11. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 4x + 3y = 0, \\ 5x - 7y = -43; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 9y = -59, \\ 5x - 4y = 38; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3p - 7q = 0, \\ 2p + 9q = 41; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6a - 7b = 51, \\ 2a + 3b = -15. \end{cases}$

55.12. Знайдіть розв'язок системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 7(x - 3) + 8 = 4 + 5x, \\ 4(x - y) - 7y = 6{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4(x + y) - 3y = 2, \\ 9(x - 2y) - 6x = -11. \end{cases}$

55.13. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 4(x + y) - 8y = -4, \\ 7(y + 1) - (y + 3) = 19; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8(x + y) - 12y = 6, \\ 6(3x - y) + 18x = 13. \end{cases}$

55.14. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \frac{1}{8}(x-y)=9, \\ \frac{1}{3}(x+y)=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0,2(2x+y)=3, \\ 0,7(x-4y)=-1,05. \end{cases}$

55.15. Знайдіть розв'язки системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 0,4(x+y)=12, \\ 0,6(x-y)=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{1}{7}(2x+y)=13, \\ \frac{1}{3}(x-3y)=14. \end{cases}$

4

55.16. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \frac{x+1}{5}+\frac{y-1}{3}=1, \\ \frac{x+2}{6}+\frac{y+2}{3}=2. \end{cases}$

55.17. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \frac{x-4}{2}+\frac{y+11}{4}=1, \\ \frac{x+7}{3}+\frac{y-4}{7}=2. \end{cases}$

55.18. Доведіть, що графіки рівнянь $2x - 3y = 4$ і $4x - 6y = 9$ є паралельними прямими.

55.19. Графік функції $y = kx + l$ проходить через точки $M(9; 1)$ і $N(-6; -4)$. Знайдіть k і l.

55.20. Графіком функції $y = kx + l$ є пряма, що проходить через точки $A(-2; -4)$ і $B(4; 11)$. Задайте цю функцію формулою.

55.21. Для яких значень m система рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x+y=8, \\ 4x+my=10 \end{cases}$ не має розв'язків;

2) $\begin{cases} x-3y=5, \\ mx-12y=20 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

Вправи для повторення

55.22. Побудуйте графік функції, заданої формулою $y = \frac{2}{3}x$. За допомогою графіка знайдіть:

1) значення y, якщо $x = -6$; 0; 3;

2) значення x, для яких $y = -2$; 0; 4.

55.23. Розкладіть на множники многочлен:
1) $9m^2 + 12m^5 - 18m^3$; 2) $3x^4y^2 - 9x^2y^3 + 12x^3y$;
3) $a^6 - 6 - 2a^2 + 3a^4$; 4) $pq - 6p + p^2 - 6q$.

55.24. Доведіть, що рівняння не має розв'язків:
1) $x^2 + 4 = 0$; 2) $x^2 - 6x + 13 = 0$;
3) $4x^2 - 12x + 16 = 0$; 4) $x^2 + x + 2 = 0$.

Життєва математика

55.25. Під час чищення зубів мати витрачає воду економно (доки чистить зуби, кран закручує), а батько цього не робить. За показниками лічильника води діти встановили, що мати витрачає щоранку 1,5 л води, а батько – вдвічі більше.
1) На скільки літрів води щомісяця більше витрачає батько, ніж мати?
2) *Практична діяльність.* Дізнайтеся, скільки коштує 1 м^3 води у вашій місцевості, та визначте, скільки коштів може заощадити ця родина за місяць (30 днів), якщо батько під час чищення зубів також буде економно витрачати воду.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

55.26. Якщо добуток чотирьох послідовних натуральних чисел збільшити на 1, то він дорівнюватиме квадрату деякого натурального числа. Доведіть це.

§ 56. Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання

Поняття про спосіб додавання

Тепер розглянемо ще один аналітичний спосіб розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними – ***спосіб додавання***. Розв'язуючи систему способом додавання, ми переходимо до рівносильної їй системи, одне з рівнянь якої міститиме тільки одну змінну.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x + 5y = 1, \\ 4x - 5y = -22. \end{cases}$ (1)

Розв'язання. У цій системі коефіцієнти при змінній y є протилежними числами. Знайдемо суму лівих частин рівнянь системи і суму правих їхніх частин. Зрозуміло, що ці суми будуть між собою рівними. Сума лівих частин містить подібні доданки, тому в результаті додавання отримаємо рівняння з однією змінною: $7x = -21$.

Додавання рівнянь системи, яке ми застосували, називають *почленним додаванням*. Замінимо одне з рівнянь системи (1), наприклад перше, рівнянням $7x = -21$. Матимемо систему:

$$\begin{cases} 7x = -21, \\ 4x - 5y = -22. \end{cases} \qquad (2)$$

З першого рівняння системи (2) маємо: $x = -3$. Підставивши це значення у друге рівняння системи (2), одержимо, що $y = 2$. Отже, пара чисел $(-3; 2)$ є розв'язком системи (2).

Переконаємося, що ця пара чисел є не тільки розв'язком системи (2), а й розв'язком системи (1). Для цього в кожне з рівнянь системи (1) підставимо замість x число -3, а замість y – число 2. Тоді в лівій частині першого рівняння одержимо $3 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = 1$, отже, значення лівої та правої частин збігаються, тому пара $(-3; 2)$ є розв'язком першого рівняння. У лівій частині другого рівняння одержимо $4 \cdot (-3) - 5 \cdot 2 = -22$, тобто значення лівої частини рівняння дорівнює значенню правої його частини. Отже, пара $(-3; 2)$ є розв'язком і другого рівняння системи. Оскільки пара чисел $(-3; 2)$ є розв'язком кожного з рівнянь системи (1), то вона є розв'язком системи (1).

Отже, системи (1) і (2) мають один і той самий розв'язок, тому є рівносильними.

Відповідь: $(-3; 2)$.

Алгоритм розв'язування системи лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання

Способом додавання зручно розв'язувати системи, у рівняннях яких коефіцієнти при одній і тій самій змінній є протилежними числами.

Зауважимо, що будь-яку систему лінійних рівнянь з двома змінними можна звести до вигляду, зручного для застосування способу додавання. Розглянемо це на прикладі.

Приклад 2. Розв'язати систему $\begin{cases} 5x + 2y = 10, \\ 7x + 4y = 8. \end{cases}$

Розв'язання. Рівняння цієї системи не містять протилежних коефіцієнтів при однакових змінних, що не є зручним для способу додавання. Але якщо помножити обидві частини першого рівняння на число -2, то коефіцієнти при змінній y в обох рівняннях стануть протилежними. Після цього можна почленно додати рівняння системи. Запишемо це розв'язання:

$$\left\{\begin{array}{l} 5x + 2y = 10, \\ 7x + 4y = 8; \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} \left\{\begin{array}{r} -10x - 4y = -20, \\ 7x + 4y = 8; \end{array}\right| + \\ \hline -3x = -12, \\ x = 4. \end{array}$$

Підставимо знайдене значення x у друге рівняння системи, щоб знайти y. Отримаємо: $7 \cdot 4 + 4y = 8$, звідки $y = -5$.

Остаточно маємо: $\left\{\begin{array}{l} x = 4, \\ y = -5. \end{array}\right.$

Відповідь: $(4; -5)$.

Послідовність дій, якої слід дотримуватися, розв'язуючи систему лінійних рівнянь з двома змінними *способом додавання*, розглянемо на прикладі системи

$$\left\{\begin{array}{l} 7x - 4y = 2, \\ 5x + 3y = 19. \end{array}\right.$$

	Дія	*Результат*
1	Помножити за потреби обидві частини одного чи обох рівнянь системи на такі числа, щоб коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами	$\left\{\begin{array}{l} 7x - 4y = 2, \\ 5x + 3y = 19; \end{array}\right. \left\vert\begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot 4 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} 21x - 12y = 6, \\ 20x + 12y = 76 \end{array}\right.$
2	Додати почленно рівняння системи	$41x = 82$
3	Розв'язати одержане рівняння з однією змінною	$x = 2$
4	Підставити знайдене значення змінної в одне з рівнянь початкової системи і знайти відповідне їй значення іншої змінної	$7 \cdot 2 - 4y = 2,$ $-4y = -12,$ $y = 3$
5	Записати відповідь	*Відповідь*: $(2; 3)$.

Якої послідовності дій слід дотримуватися, розв'язуючи систему двох лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

56.1. (*Усно.*) Яке рівняння одержимо, якщо почленно додамо рівняння системи:

1) $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ 3x - y = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + 3y = 9, \\ -4x + y = 1? \end{cases}$

56.2. (*Усно.*) На яке число потрібно помножити обидві частини першого рівняння системи, щоб у рівняннях коефіцієнти при змінній y стали протилежними:

1) $\begin{cases} 2x + y = 8, \\ 3x - 2y = 10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + 7y = 5, \\ 3x + 21y = 7? \end{cases}$

56.3. На яке число потрібно помножити обидві частини першого рівняння, щоб у рівняннях коефіцієнти при змінній x стали протилежними:

1) $\begin{cases} x - 4y = 9, \\ -2x + 7y = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 7y = 19, \\ 12x - 8y = 4? \end{cases}$

56.4. (*Усно.*) Назвіть спосіб (підстановки чи додавання), яким зручніше розв'язувати систему:

1) $\begin{cases} 3x + y = 9, \\ 17x + 19y = 15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + 7y = 8, \\ 10x - 7y = 17; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x + 15y = 27, \\ 12x + 17y = 49; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 10, \\ 2015x + 2016y = 2017. \end{cases}$

56.5. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 2x - y = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x + 3y = 7, \\ -4x - y = -5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - 8y = 7, \\ -2x + 7y = 5. \end{cases}$

56.6. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 2y = 8, \\ -3x + 5y = -1. \end{cases}$

56.7. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 4x + 3y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x + 2y = 5, \\ 7x - 3y = 45. \end{cases}$

56.8. Знайдіть розв'язок системи рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} 4x + y = 7, \\ 5x + y = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 2x - 4y = -9. \end{cases}$

56.9. Знайдіть розв'язок системи рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ 3x - 5y = 20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - y = 5, \\ 2x + 7y = 11. \end{cases}$

56.10. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} x - y = 3, \\ 2x + 3y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x + y = 2, \\ 5x - 4y = 25. \end{cases}$

56.11. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 7x + 2y = -3, \\ -14x + 3y = 20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 5y = 19, \\ 7x - 10y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x + 5y = 7, \\ 2x - 3y = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + 9y = -1, \\ 7x + 36y = -8. \end{cases}$

56.12. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ -9x + 7y = 23; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + 2y = 2, \\ 5x - 4y = 9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x + 3y = 1, \\ 15x - 7y = 51; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4m + 5b = 5, \\ 7m + 20b = 11. \end{cases}$

3

56.13. Знайдіть розв'язок системи способом додавання:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 3x + 5y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2a - 3b = 7, \\ 3a + 4b = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 10m - 6n = 18, \\ 15m + 7n = 59; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 14x - 8y = -6, \\ 21x + 10y = 2. \end{cases}$

56.14. Знайдіть розв'язок системи способом додавання:

1) $\begin{cases} 3x + 4y = 10, \\ 5x - 7y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 15x - 3y = -15, \\ 20x - 7y = -41. \end{cases}$

56.15. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 5(x - 2) = 2y - 1, \\ 3(x + 3) = 12(y + 3); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4(a + 2b) - 5a = 0,4, \\ 7(3a - 4b) + 3b = 5,9. \end{cases}$

56.16. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 7(x+3) = 3y+1, \\ 4(2-x) = 5(y+1)+1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4(m-2n) - 7m = 9{,}6, \\ 5(4m+3n) + 8n = -18{,}5. \end{cases}$

4 **56.17.** Складіть рівняння прямої, графік якої проходить через точки:

1) $A(4; -4)$ і $B(12; -1)$; 2) $M(-3; 6)$ і $N(9; -2)$.

56.18. Графік лінійної функції проходить через точки $(-4; 5)$ і $(12; 1)$. Задайте цю функцію формулою.

56.19. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{2-x}{6} + \dfrac{y+4}{3} = 2\dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{x+4}{12} - \dfrac{2-y}{6} = \dfrac{5}{12}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-1)^2 + y = (x+2)^2 - 23, \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 = x^2 + (y+7)^2. \end{cases}$

56.20. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{4} - \dfrac{y-4}{8} = 1\dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{x-4}{6} + \dfrac{y+2}{9} = -\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-1)(y+2) = x(y-1), \\ x(y+3) = (x+1)(y-2). \end{cases}$

56.21. З'ясуйте, чи має система рівнянь розв'язки і скільки:

1) $\begin{cases} 3x - y = 2, \\ -6x + 2y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -4x + 3y = 7, \\ -8x + 6y = 14. \end{cases}$

Вправи для повторення

56.22. Чи належать графіку функції $y = -4{,}5x + 1$ точки: $A(-2; 10)$, $B(0; -1)$, $C(4; 17)$, $D(10; -44)$?

56.23. Пара чисел $(-2; -3)$ є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} ax - 2y = 8, \\ bx - ay = 7. \end{cases}$$

Знайдіть a і b.

56.24. Які одночлени потрібно вписати у клітинки, щоб утворилася тотожність:

1) $(7m - \square)^2 = \square - \square + 25a^8$;
2) $(\square + \square)^2 = 36p^4 + \square + 121b^2$;
3) $(3p + \square)^2 = \square + 24p^2m^7 + \square$;
4) $(\square - \square)^2 = \square - 32mn^2 + 16n^4$?

Життєва математика

56.25. 1) Визначте масу складників у салаті «Вітамінний», маса якого 400 г, якщо моркви там у 4 рази менше від загальної маси салату, селери – стільки само, скільки й моркви, яблук – на 60 г більше, ніж селери, горіхів – у 5 разів менше, ніж моркви, лимонного соку – в 2 рази менше, ніж горіхів, і ще салат містить один зубчик часнику.
2) *Практичне завдання.* Дізнайтеся рецепти інших корисних і простих у приготуванні салатів, спробуйте їх приготувати та додайте до свого раціону.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

56.26. Чи існують такі цілі числа x і y, для яких справджується рівність $x^2 + 2018 = y^2$?

§ 57. Розв'язування задач за допомогою систем лінійних рівнянь

Задача, математичною моделлю якої є система рівнянь

Ми вже розглядали задачі, які можна розв'язати за допомогою рівнянь. Математичною моделлю задачі може бути не тільки рівняння, а й система рівнянь. Зазвичай це стосується тих задач, де невідомими є значення двох або більше величин.

Приклад 1. За 7 шоколадних батончиків і 2 плитки шоколаду заплатили 85 грн. Скільки коштує батончик і скільки – плитка шоколаду, якщо відомо, що три батончики дорожчі за одну плитку на 3 грн?

Розв'язання. Нехай батончик коштує x грн, а плитка шоколаду – y грн. Тоді сім батончиків коштують $7x$ грн, а дві плитки шоколаду – $2y$ грн. Оскільки разом за таку кількість батончиків і плиток шоколаду заплатили 85 грн, маємо рівняння:
$7x + 2y = 85$.
Вартість трьох батончиків становить $3x$ грн, і вони дорожчі за плитку шоколаду на 3 грн. Тому одержимо ще одне рівняння:
$3x - y = 3$.
Щоб відповісти на запитання задачі, ми маємо знайти такі значення x і y, які задовольняли б обидва рівняння, тобто задовольняли систему рівнянь:

$$\begin{cases} 7x + 2y = 85, \\ 3x - y = 3. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, одержимо, що $x = 7$, $y = 18$. Отже, вартість шоколадного батончика – 7 грн, а вартість плитки шоколаду – 18 грн.

Відповідь: 7 грн; 18 грн.

Зауважимо, що цю задачу, як і деякі інші із цього параграфа, можна розв'язати й за допомогою рівняння з однією змінною. Але часто скласти систему рівнянь до задачі простіше, ніж скласти до неї рівняння з однією змінною.

Алгоритм розв'язування текстової задачі за допомогою системи рівнянь

Розв'язуючи задачу за допомогою системи рівнянь, слід дотримуватися такої послідовності дій:

1) *позначити деякі дві невідомі величини змінними (наприклад, x і y)*;
2) *за умовою задачі скласти систему рівнянь*;
3) *розв'язати одержану систему*;
4) *проаналізувати знайдені значення змінних відповідно до умови задачі, дати відповідь на запитання задачі*;
5) *записати відповідь*.

Приклад 2. За 2 год проти течії і 5 год за течією моторний човен долає 120 км. За 2 год за течією і 1 год проти течії цей самий човен долає 51 км. Знайти власну швидкість човна і швидкість течії.

Розв'язання. Нехай власна швидкість човна x км/год, а швидкість течії – y км/год. Тоді швидкість човна за течією річки дорівнює $(x + y)$ км/год, а швидкість човна проти течії – $(x - y)$ км/год. За 5 год руху за течією човен долає $5(x + y)$ км, за 2 год проти течії – $2(x - y)$ км, а разом це становить 120 км. Маємо рівняння: $5(x + y) + 2(x - y) = 120$.

Міркуючи аналогічно, за умовою задачі можна скласти ще одне рівняння: $2(x + y) + (x - y) = 51$.

Маємо систему рівнянь: $\begin{cases} 5(x + y) + 2(x - y) = 120, \\ 2(x + y) + (x - y) = 51. \end{cases}$

Розв'язавши її, одержимо: $\begin{cases} x = 16{,}5, \\ y = 1{,}5. \end{cases}$

Отже, власна швидкість човна – 16,5 км/год, а швидкість течії – 1,5 км/год.

Відповідь: 16,5 км/год; 1,5 км/год.

Якої послідовності дій слід дотримуватися, розв'язуючи задачу за допомогою системи рівнянь?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

2

57.1. У легкоатлетичній секції тренуються 32 спортсмени, причому дівчат серед них на 4 більше, ніж хлопців. Скільки дівчат і скільки хлопців тренується в цій секції?

57.2. За дві години кухар наліпив 260 пельменів, причому за першу годину – на 20 пельменів менше, ніж за другу. Скільки пельменів наліпив кухар за першу годину і скільки – за другу?

57.3. За олівець і три зошити заплатили 32 грн, а за три олівці і зошит – 24 грн. Скільки коштує один олівець і скільки – один зошит?

57.4. За 2 год пішки і 1 год на велосипеді туристка подолала 18 км, а за 1 год пішки і 2 год на велосипеді – 27 км. З якою швидкістю туристка рухалася пішки і з якою – на велосипеді?

57.5. У касі крамниці після переобліку залишилося 12 монет по 50 коп. і по 1 грн, усього на суму 8 грн. Скільки монет по 50 коп. і скільки по 1 грн залишилося в касі?

57.6. Було придбано 16 зошитів у клітинку і лінійку, усього на суму 328 грн. Зошит у клітинку коштує 22 грн, а в лінійку – 18 грн. Скільки зошитів у клітинку і скільки зошитів у лінійку було придбано?

57.7. За 3 футбольних і 2 волейбольних м'ячі заплатили 1088 грн. Скільки коштує футбольний м'яч і скільки волейбольний, якщо два волейбольних м'ячі на 192 грн дорожчі за один футбольний?

57.8. 2 акумулятори і 3 батарейки разом коштують 252 грн. Скільки коштує один акумулятор і скільки одна батарейка, якщо акумулятор коштує стільки само, скільки 3 батарейки?

57.9. Основа рівнобедреного трикутника на 2 см більша за його бічну сторону. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 26 см.

57.10. Довжина прямокутника на 8 м більша за ширину. Знайдіть довжину і ширину прямокутника, якщо його периметр дорівнює 56 м.

3 **57.11.** Човен за 3 год руху за течією і 2 год руху проти течії долає 92 км. За 9 год руху за течією човен долає відстань у 5 разів більшу, ніж за 2 год руху озером. Знайдіть власну швидкість човна та швидкість течії.

57.12. Човен рухався 2 год за течією і 5 год проти течії, подолавши за цей час 110 км. Швидкість човна проти течії становить 70 % від швидкості човна за течією. Знайдіть власну швидкість човна та швидкість течії.

57.13. З пунктів A і B, відстань між якими 168 км, одночасно вирушають велосипедистка й мотоцикліст. Якщо вони будуть рухатися назустріч одне одному, то зустрінуться через 3 год. А якщо рухатимуться в одному напрямку, то мотоцикліст наздожене велосипедистку через 6 год. Знайдіть швидкість кожного з них.

57.14. Сума двох чисел дорівнює 62. Знайдіть кожне із чисел, якщо 70 % від одного і 60 % від іншого разом становлять 39,6.

57.15. 20 % від одного числа на 2,4 більше за 10 % від іншого. Знайдіть ці числа, якщо їхня сума дорівнює 72.

57.16. Матері разом з донькою 42 роки. Через рік мати стане втричі старшою за доньку. Скільки років кожній з них зараз?

57.17. Розв'яжіть систему рівнянь. Складіть задачу, яка б розв'язувалася за допомогою цієї системи:

1) $\begin{cases} x + y = 17, \\ x - y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 3y = 15, \\ x - y = 1. \end{cases}$

57.18. Розв'яжіть систему рівнянь. Складіть задачу, яка б розв'язувалася за допомогою цієї системи:

1) $\begin{cases} x - y = 8, \\ x + y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y = 18, \\ 3x - y = 2. \end{cases}$

57.19. У ящику і кошику разом 95 яблук. Якщо кількість яблук у ящику зменшити вдвічі, а кількість яблук у кошику збільшити на 25, то яблук у ящику і кошику стане порівну. Скільки яблук у ящику і скільки – у кошику?

57.20. Сума двох чисел дорівнює 45. Знайдіть ці числа, якщо 60 % від першого з них дорівнюють 75 % від другого.

57.21. Знайдіть два числа, якщо їхня сума дорівнює 200, а $\frac{11}{24}$ від одного з них дорівнюють $\frac{3}{8}$ від іншого.

57.22. Змішали два види цукерок вартістю 60 грн і 75 грн за кілограм. Після цього утворилося 20 кг суміші вартістю 66 грн за кілограм. По скільки кілограмів цукерок кожного виду взяли для суміші?

57.23. З двох сортів печива вартістю 40 грн і 55 грн за кілограм утворили 25 кг суміші вартістю 49 грн за кілограм. По скільки кілограмів печива кожного виду взяли?

4 **57.24.** У двох бідонах разом було 75 л олії. Після того як половину олії з першого бідона перелили у другий, там олії стало в 4 рази більше, ніж у першому. По скільки літрів олії було в кожному бідоні спочатку?

57.25. На двох полицях разом 57 книжок. Після того як з першої полиці переставили 5 книжок на другу, там їх стало вдвічі більше, ніж на першій. По скільки книжок було на кожній полиці спочатку?

57.26. За 5 світильників і 4 ліхтарики заплатили 896 грн. Після того як світильники подешевшали на 15 %, а ліхтарики подорожчали на 10 %, один світильник і один ліхтарик разом стали коштувати 196 грн. Якою була початкова вартість світильника і якою – ліхтарика?

57.27. Два кондитерських цехи за день мали разом виготовити 300 тортів. Коли перший цех виконав 55 % свого завдання, а другий – 60 % свого, виявилося, що перший цех виготовив на 27 тортів більше, ніж другий. По скільки тортів мав виготовити кожен цех?

57.28. Якщо чисельник даного дробу збільшити на 7, то дріб дорівнюватиме $\frac{2}{3}$. Якщо знаменник даного дробу збільшити на 2, то дріб дорівнюватиме 0,25. Знайдіть цей дріб.

57.29. Якщо чисельник дробу зменшити на 2, то дріб дорівнюватиме 0,5. Натомість, якщо знаменник дробу збільшити на 11, то дріб дорівнюватиме $\frac{1}{3}$. Знайдіть цей дріб.

57.30. Скільки грамів кожного з 2-відсоткового і 6-відсоткового розчинів солі потрібно взяти, щоб отримати 200 г 5-відсоткового розчину?

57.31. В одному сплаві міститься 9 % цинку, а у другому – 24 %. По скільки грамів кожного сплаву потрібно взяти, щоб одержати зливок масою 260 г, що містить 15 % цинку?

57.32. Чотири роки тому батько був у 8 разів старший за сина, а через 20 років батько стане вдвічі старший за сина. Скільки років кожному з них зараз?

57.33. Якщо суму цифр двоцифрового числа збільшити в 5 разів, то вона дорівнюватиме самому числу. А якщо його цифри поміняти місцями, то воно збільшиться на 9. Знайдіть це число.

Вправи для повторення

57.34. Розкладіть на множники многочлен:
1) $m^2 + 10m + 25$; 2) $c^2 - 8c + 16$;
3) $p^2 - 0{,}36$; 4) $-49a^2 + b^2$.

57.35. Спростіть вираз:
1) $2x(3x - 4x^3) - (x + 3x^2)^2$;
2) $2p^2(2p^2 - 6pm) - (2p^2 - 3mp)^2$.

57.36. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} -3x, & \text{якщо } x < -1, \\ 3, & \text{якщо } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x + 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$

Життєва математика

57.37. Діти 11–15 років на кожний кілограм своєї маси мають щоденно вживати 2,6 г білків, 2,3 г жирів, 10,4 г вуглеводів. Ураховуючи власну масу тіла, визначте, скільки жирів, білків і вуглеводів ви маєте щоденно вживати.

Цікаві задачі – поміркуй одначе

57.38. *Задача Ньютона.* Трава на галявині росте рівномірно щільно й швидко. Відомо, що 70 корів з'їли б її за 24 дні, а 30 корів – за 60 днів. Скільки корів з'їли б усю траву за 96 днів?

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 11 (§§ 52–57)

Завдання 1–12 мають по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Яке з рівнянь є лінійним рівнянням з двома змінними?
А. $2x^2 - 3x = 7$ **Б.** $2x^2 - 3y = 7$
В. $2x - 3y = 7$ **Г.** $2x - 3y^3 = 7$

2. Укажіть точку, що належить графіку рівняння $x + y = 6$.
А. (2; 3) **Б.** (2; 4) **В.** (3; 4) **Г.** (−2; −4)

3. Укажіть пару чисел, що є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x - y = 7, \\ x + y = 1. \end{cases}$
А. (4; 3) **Б.** (−4; 3) **В.** (−4; −3) **Г.** (4; −3)

2

4. Розв'язком якого рівняння є пара чисел (2; −1)?
А. $x + 3y = 5$ **Б.** $3x + y = 5$
В. $2x + y = 5$ **Г.** $x + y = 3$

5. Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь $\begin{cases} 3x - y = 5, \\ 4x + 3y = 11. \end{cases}$
А. (2; 1) **Б.** (1; 2)
В. (3; 1) **Г.** (1; 3)

6. Розв'яжіть способом додавання систему рівнянь $\begin{cases} 4x - 7y = 11, \\ 3x + 7y = -4. \end{cases}$
А. (1; 1) **Б.** (−1; 1)
В. (−1; −1) **Г.** (1; −1)

3

7. Серед розв'язків рівняння $x + 2y = -18$ знайдіть пару рівних між собою чисел.
А. (6; 6) **Б.** (−6; −6) **В.** (0; 0) **Г.** (−9; −9)

8. Для якого значення m графік рівняння $mx + 3y = 5$ проходить через точку (−2; 3)?
А. 2 **Б.** −2 **В.** 7 **Г.** −7

9. З пунктів A і B, відстань між якими 60 км, вирушили одночасно пішохід і велосипедистка. Якщо вони рухатимуться назустріч одне одному, то зустрінуться через 3 год, а якщо вони рухатимуться в одному напрямку, то велосипедистка наздожене пішохода через 5 год. Знайдіть швидкість пішохода.
А. 3 км/год **Б.** 4 км/год
В. 4,5 км/год **Г.** 5 км/год

4 **10.** Скільки є пар натуральних чисел, які є розв'язками рівняння $2x + y = 9$?

А. Три **Б.** Чотири **В.** П'ять **Г.** Безліч

11. Графік функції $y = kx + b$ проходить через точки $(1; -4)$ і $(-2; 13)$. Знайдіть k.

А. 7 **Б.** 3 **В.** -3 **Г.** -5

12. Для якого значення a система рівнянь $\begin{cases} 2x - 3y = 8, \\ ax - 6y = 16 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

А. 4 **Б.** 2 **В.** 0 **Г.** -4

У завданні 13 потрібно встановити відповідність між інформацією, позначеною цифрами та буквами. Одна відповідь зайва.

3 **13.** Установіть відповідність між графіком рівняння (1–3) та точками перетину графіка з осями координат (А–Г).

Графік рівняння	*Точки перетину графіка з осями координат*
1. $2x - 5y = 10$	**А.** $(-4; 0)$, $(0; 3)$
2. $5x + 3y = 15$	**Б.** $(5; 0)$, $(0; 3)$
3. $-3x + 4y = 12$	**В.** $(5; 0)$, $(0; -2)$
	Г. $(3; 0)$, $(0; 5)$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 52–57

1 **1.** Яке з рівнянь є лінійним рівнянням з двома змінними:
1) $2x + 3y = 9$;
2) $2x + 3y^2 = 9$?

2. Чи є розв'язком рівняння $2x + y = 7$ пара чисел:
1) $(3; -5)$;
2) $(4; -1)$?

3. Чи є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x + y = 11, \\ x - y = 3 \end{cases}$ пара чисел:

1) $(6; 5)$; 2) $(7; 4)$?

2 **4.** Розв'яжіть графічним способом систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 3x, \\ 2x + y = -5. \end{cases}$$

5. Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь $\begin{cases} x - 3y = 5, \\ 2x + y = 3. \end{cases}$

6. Розв'яжіть способом додавання систему рівнянь $\begin{cases} 5x + 3y = 3, \\ 4x - 3y = 24. \end{cases}$

3 **7.** Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2(x + 3) = 7y - 5, \\ 6(x - 3) - 5(y + 1) = -24. \end{cases}$

4 **8.** За 8 зошитів і 3 блокноти заплатили 93 грн. Після того як зошит подорожчав на 15 %, а блокнот подешевшав на 10 %, за один зошит і один блокнот заплатили 20,4 грн. Якими були початкові ціни зошита і блокнота?

Додаткові вправи

4 **9.** Побудуйте графік рівняння $\frac{x+2}{4} + \frac{y-3}{6} = -\frac{1}{12}$.

10. Графік функції $y = kx + b$ проходить через точки $(3; -4)$ і $(-12; -9)$. Знайдіть k і b.

11. Для якого значення a система рівнянь $\begin{cases} 7x - ay = 5, \\ 21x + 6y = 15 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ ТЕМИ 11

До § 52

1 **1.** Чи є пара чисел $(7; 1)$ розв'язком рівняння $x - y = 6$? Знайдіть ще чотири розв'язки цього рівняння.

2 **2.** Знайдіть два будь-яких розв'язки рівняння:

1) $2x + y = 4$; 2) $x - 3y = 7$.

3 **3.** Виразіть:

1) змінну y через змінну x з рівняння $7x - y = 18$;
2) змінну x через змінну y з рівняння $3x + 9y = 0$;
3) змінну y через змінну x з рівняння $13x - 2y = 6$;
4) змінну x через змінну y з рівняння $8x + 15y = 24$.

4. Замініть «зірочки» числами так, щоб кожна з пар $(*; 3)$; $(6; *)$; $(*; -3)$; $(15; *)$ була розв'язком рівняння $x - 3y = 9$.

4 **5.** Доведіть, що рівняння з двома змінними не має розв'язків:

1) $x^2 + y^2 = -4$; 2) $|x| + y^2 + 1 = 0$;
3) $-|x| - |y| = 5$; 4) $2x^4 + 3|y| = -2$.

6. Знайдіть усі пари цілих чисел, які є розв'язками рівняння $|x| + |y| = 2$.

До § 53

2 **7.** Побудуйте графік рівняння:

1) $x - y = 1$;
2) $1{,}5x + y = 7$;
3) $x - 4y = 5$;
4) $0{,}1x + 0{,}2y = 0{,}8$.

3 **8.** Побудуйте в одній координатній площині графіки рівнянь $x + y = 5$ і $7x - 4y = 2$. Знайдіть координати точки їхнього перетину. Переконайтеся, що знайдена пара є розв'язком кожного з рівнянь.

9. Ордината деякої точки прямої, що є графіком рівняння $-9x + 5y = 27$, дорівнює нулю. Знайдіть абсцису цієї точки.

4 **10.** Побудуйте графік рівняння:

1) $|x| + y = 0$;
2) $|x| + x - y = 0$.

11. Побудуйте ту частину графіка рівняння $2x + y = 6$, яка міститься в першій координатній чверті.

До § 54

1 **12.** Чи є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x - y = 0, \\ x + y = 8 \end{cases}$ пара чисел:

1) $x = 5$, $y = 5$;
2) $x = 4$, $y = 4$?

2 **13.** Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = -4x, \\ 2x - y = -6; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 5x + y = 3, \\ x + 2y = -3. \end{cases}$

3 **14.** Розв'яжіть систему рівнянь графічно:

1) $\begin{cases} 0x + 3y = 6, \\ 3x - 2y = 2; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 7{,}1x = -14{,}2, \\ 2x + 7y = 17. \end{cases}$

4 **15.** Для якого значення a система рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ 6x + ay = 15 \end{cases}$ має безліч розв'язків;

2) $\begin{cases} 3x - 2y = 7, \\ -6x + 4y = a \end{cases}$ не має розв'язків?

До § 55

2 **16.** Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

1) $\begin{cases} x = y - 7, \\ 2x - y = -6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 3x - 5y = 21; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - 4y = -19, \\ x + 7y = 27; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x + 7y = -3, \\ 8x - y = -17. \end{cases}$

3 **17.** Не виконуючи побудови, знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь:

1) $2x + 3y = 0$ і $4x - 5y = -22$;

2) $4x - 7y = 34$ і $2x + 7y = -4$.

18. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3(y - x) - 4 = -7y, \\ 5(x + y) + 9 = 8x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + y = 5, \\ x - \dfrac{y}{3} = 3. \end{cases}$

4 **19.** Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{2x - 1}{3} + \dfrac{y + 7}{2} = 5, \\ \dfrac{3x - 1}{5} + \dfrac{2y + 1}{3} = \dfrac{6x + 8y}{15}. \end{cases}$

20. Розв'яжіть рівняння з двома змінними:

1) $|x - y| + (x + 2y - 1)^2 = 0$;

2) $|x + y - 6| + x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$.

До § 56

2 **21.** Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 3x - y = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + y = 6, \\ 5x + 9y = 14; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 9y = -7, \\ 3x - 7y = 13; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x - 5y = 2, \\ 7x + 15y = 51. \end{cases}$

3 **22.** Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} 7x + 2y = 3, \\ 4x + 3y = -2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x + 12y = 53, \\ 5x - 18y = -2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x + 7y = -5, \\ 6x + 9y = -6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5(a - 3b) + 6a = 7, \\ 0,5(a + 6b) - 1,5b = 2,5. \end{cases}$

4 **23.** З'ясуйте кількість розв'язків системи рівнянь $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 4x + ay = 6 \end{cases}$ залежно від коефіцієнта a.

До § 54–56

2 **24.** Розв'яжіть систему рівнянь трьома способами (графічним, підстановки, додавання):

1) $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ x + y = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ -x + 3y = 0. \end{cases}$

3 **25.** Знайдіть розв'язок системи рівнянь:

1) $\begin{cases} 2 - 5x = 3(1 - y), \\ 2(x + y) = 0,5x + 5,5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4(x + 7) - 9(y - 13) = 139, \\ 5(x - 1) + 4(3 - y) = -15. \end{cases}$

26. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3} - \dfrac{4y}{5} = 2\dfrac{4}{15}, \\ \dfrac{3x}{7} + \dfrac{2y}{5} = -\dfrac{13}{35}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{2x}{5} - \dfrac{y}{4} = \dfrac{23}{40}, \\ \dfrac{4x}{15} - \dfrac{3y}{5} = 1\dfrac{1}{30}. \end{cases}$

4 **27.** Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{3} + \dfrac{y-5}{3} = 2, \\ \dfrac{x+2}{2} - \dfrac{y-5}{6} = \dfrac{5}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{7} + \dfrac{2y+2}{5} = \dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{3x-2}{2} + \dfrac{y+4}{4} = 4. \end{cases}$

28. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x + y = -2, \\ -6x - 3y = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 3y = 5, \\ 2x - 6y = 7. \end{cases}$

29. Чи має розв'язок система рівнянь:

1) $\begin{cases} 4x + 3y = 1, \\ 7x + 5y = 2, \\ 3x + 2y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 4y = 10, \\ 4x + 7y = 1, \\ 5x + 6y = 4? \end{cases}$

30. Графік функції $y = kx + l$ перетинає вісь x у точці з абсцисою 4, а вісь y – у точці з ординатою –5.

1) Задайте функцію формулою.

2) З'ясуйте, чи проходить її графік через точку (–80; –105).

31. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3(x - 2y) + x(7 - 2y) = 2y(1 - x), \\ 4(x - y - 1) + 5(x + y - 1) = 32; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = (x + 3)^2 + (y + 1)^2, \\ (y - 2)^2 - (y + 2)^2 = (x + 6)^2 - (x - 1)^2. \end{cases}$

32. Для якого значення a система рівнянь $\begin{cases} 5x + 4y = 2, \\ 10x + 8y = a \end{cases}$

1) має безліч розв'язків;

2) не має розв'язків?

3) Чи існує таке значення a, для якого система має єдиний розв'язок?

33. Для якого значення b система рівнянь $\begin{cases} 12x - 9y = 15, \\ 4x + by = 5 \end{cases}$

1) має безліч розв'язків;

2) має єдиний розв'язок? Знайдіть цей розв'язок.

До § 57

2 **34.** За 3 год автобусом і 5 год поїздом турист подолав 450 км. Знайдіть швидкість автобуса і швидкість поїзда, якщо швидкість поїзда на 10 км/год більша за швидкість автобуса.

35. За 7 порцій млинців і 2 салати заплатили 468 грн. Скільки коштує одна порція млинців і скільки – один салат, якщо дві порції млинців на 27 грн дешевші за три салати?

3 **36.** Теплохід за 3 год за течією і 2 год проти течії долає 142 км. Цей самий теплохід за 4 год проти течії долає на 14 км більше, ніж за 3 год за течією. Знайдіть власну швидкість теплохода і швидкість течії.

37. Майстер і його учень повинні були виготовити 114 деталей. Після того як учень пропрацював 2 год, до роботи приєднався майстер, і вони разом закінчили роботу за 3 год. Скільки деталей за годину виготовляв майстер і скільки учень, якщо майстер за 2 год виготовляє стільки само деталей, скільки учень за 3 год?

4 **38.** Два ящики наповнено грушами. Якщо з другого ящика перекласти в перший 10 груш, то в обох ящиках груш стане порівну. Якщо з першого ящика перекласти у другий 44 груші, то груш у першому ящику залишиться в 4 рази менше, ніж у другому. Скільки груш у кожному ящику?

39. Різниця між половиною одного числа і 0,75 другого дорівнює 8. Якщо перше число зменшити на свою сьому частину, а друге збільшити на свою дев'яту частину, то їхня сума становитиме 100. Знайдіть ці числа.

40. Сума трьох чисел, з яких друге в 5 разів більше за перше, дорівнює 140. Якщо друге число збільшити на 15 %, третє зменшити на 10 %, а перше число не змінювати, то сума цих чисел становитиме 139,5. Знайдіть ці числа.

41. Периметр прямокутника на 154 см більший за одну з його сторін і на 140 см більший за другу. Знайдіть площу прямокутника.

42. Сума цифр деякого двоцифрового числа дорівнює 8. Якщо його цифри поміняти місцями, то одержимо число, що на 18 більше за дане. Знайдіть це число.

* **43.** У двох бідонах місткістю 20 л і 15 л вже є певна кількість молока. Якщо в більший бідон ущерть долити молока з меншого, то в меншому бідоні залишиться половина початкової кількості. Якщо в менший бідон долити вщерть молока з більшого, то в більшому залишиться $\frac{2}{3}$ від початкової кількості. По скільки літрів молока в кожному бідоні?

Головне в темі 11

РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ

Лінійним рівнянням з двома змінними називають рівняння вигляду $ax + by = c$, де x і y – змінні. Числа a, b і c називають *коефіцієнтами* рівняння.

Розв'язком рівняння з двома змінними називають пару значень змінних, яка перетворює рівняння у правильну числову рівність.

Рівняння з двома змінними мають ті самі **властивості**, що й рівняння з однією змінною:

1) якщо в рівнянні розкрити дужки або звести подібні доданки, то одержимо рівняння, рівносильне даному;

2) якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини в іншу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному;

3) якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

ГРАФІК ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ

Графіком рівняння з двома змінними x і y називають фігуру, що складається з усіх точок координатної площини, координати яких є розв'язками цього рівняння.

Графіком рівняння $ax + by = c$, у якому хоча б один з коефіцієнтів a або b відмінний від нуля, є пряма.

Щоб побудувати графік рівняння $y = m$, достатньо позначити на осі y точку $(0; m)$ та провести через неї пряму паралельно осі x.

Щоб побудувати графік рівняння $x = n$, достатньо позначити на осі x точку $(n; 0)$ та провести через неї пряму паралельно осі y.

СИСТЕМА ДВОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ

Розв'язком системи рівнянь з двома змінними називають пару значень змінних, яка є розв'язком кожного з рівнянь системи.

Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ДВОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ СПОСОБОМ ПІДСТАНОВКИ

1) Виразити з якого-небудь рівняння системи одну змінну через другу.

2) Одержаний для цієї змінної вираз підставити в друге рівняння системи.

3) Розв'язати отримане рівняння з однією змінною, тобто знайти значення цієї змінної.

4) Знайти відповідне їй значення другої змінної.

5) Записати відповідь.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ДВОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ СПОСОБОМ ДОДАВАННЯ

1) Помножити за потреби обидві частини одного чи обох рівнянь системи на такі числа, щоб коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами.

2) Додати почленно рівняння системи.

3) Розв'язати отримане рівняння з однією змінною.

4) Підставити знайдене значення змінної в одне з рівнянь даної системи та знайти відповідне їй значення іншої змінної.

5) Записати відповідь.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ СИСТЕМ РІВНЯНЬ

1) Позначити деякі дві невідомі величини змінними (наприклад, x і y).

2) За умовою задачі скласти систему рівнянь.

3) Розв'язати одержану систему.

4) Проаналізувати знайдені значення змінних відповідно до умови задачі, дати відповідь на запитання задачі.

5) Записати відповідь.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ЗА КУРС МАТЕМАТИКИ 7 КЛАСУ

1

1. Накресліть довільний відрізок MN та коло із центром у точці M, радіус якого дорівнює MN.

2. Виконайте дії:

1) p^4p^3; 2) $t^9 : t^5$.

3. Чи проходить графік рівняння $x - y = 5$ через точку:

1) $M(6; 2)$; 2) $N(4; -1)$?

2

4. Спростіть вираз:

1) $(x - 3)(x + 3) - x(x - 5)$;

2) $(a + 2)^2 + (a - 7)(a + 3)$.

5. Розкладіть на множники:

1) $14p^3 - 21p^2m$;

2) $3a^2 - 12b^2$.

6. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 24 см, а бічна сторона – 9 см. Знайдіть основу трикутника.

3

7. Один з кутів трикутника дорівнює 68°, а другий – на 14° більший за третій. Знайдіть невідомі кути трикутника.

8. Розв’яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ -4x + 3y = 16. \end{cases}$

4

9. З пункту A до пункту B вирушив пішохід. Через 1 год назустріч йому з пункту B виїхала велосипедистка. Відстань між пунктами A і B дорівнює 58 км, а швидкість велосипедистки на 10 км/год більша за швидкість пішохода. Знайдіть швидкість велосипедистки і швидкість пішохода, якщо вони зустрілися через 4 год після виходу пішохода.

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ З АЛГЕБРИ

Лінійні рівняння

1. Знайдіть усі цілі значення a, для яких корінь рівняння $(a + 2)x = 8$ є натуральним числом.

2. Перша цифра чотирицифрового числа дорівнює 7. Якщо цю цифру переставити на останнє місце, то одержимо число, менше від початкового на 1746. Знайдіть початкове число.

3. Не розв'язуючи рівняння $5(2024x + 2025) = 13$, доведіть, що його корінь не є цілим числом.

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $|x| + |x - 2| = 0$;
2) $|x - 3| + |6 - 2x| = 0$.

5. Скільки розв'язків, залежно від числа a (кажуть: *параметра* a), має рівняння:

1) $ax = 2$;
2) $ax = 0$?

6. Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння відносно змінної x:

1) $2x - a = 15$;
2) $7x - a = 2x + 4a - 9$;
3) $(a - 3)x = 7$;
4) $ax = a$;
5) $ax + 1 = x + a$;
6) $a(x - 2) = x(a + 3)$.

Розв'язання. 4) Якщо $a = 0$, то маємо рівняння $0x = 0$, тоді x – будь-яке число. Якщо $a \neq 0$, то, поділивши ліву і праву частини рівняння на a, одержимо $x = 1$.

Відповідь: якщо $a = 0$, то x – будь-яке число; якщо $a \neq 0$, то $x = 1$.

7. Для якого значення параметра a є рівносильними рівняння:

1) $7x + a = 5(x - a)$ і $7(x + a) = 4(10 - a)$;
2) $(a + 7)x = 18$ і $|x| = -1$?

8. Поїзд проїжджає повз нерухому пасажирку за 7 с, а вздовж платформи завдовжки 378 м – за 25 с. Знайдіть швидкість і довжину поїзда.

9. Поїзд проїжджає по мосту, який завдовжки 171 м, за 27 с, а повз пішохода, який рухається зі швидкістю 1 м/с назустріч поїзду, – за 9 с. Знайдіть швидкість поїзда та його довжину.

10. Через першу трубу басейн заповнюється водою за половину того часу, за який друга труба заповнить $\frac{2}{3}$ цього басейну. Через другу трубу окремо басейн заповнюється на 4 год довше, ніж через першу трубу. За який час заповнює басейн кожна труба окремо?

11. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них становить 25 % від другого.

12. Для ремонту двох кімнат придбали шпалери. На ремонт першої кімнати використали на 2 рулони більше, ніж половина придбаного, а на ремонт другої кімнати – $\frac{2}{3}$ від кількості рулонів, що використали на ремонт першої кімнати. Скільки рулонів шпалер було придбано, якщо після ремонту обох кімнат залишився невикористаним один рулон?

13. Сплав міді й цинку містить на 320 г більше міді, ніж цинку. Після того як від сплаву відокремили $\frac{6}{7}$ тієї маси міді та 60 % тієї маси цинку, що в ньому містилися, маса сплаву стала дорівнювати 100 г. Якою була початкова маса сплаву?

Цілі вирази

14. Рівність $(І + В + А + Н)^4 = ІВАН$ є правильною. Знайдіть число ІВАН, якщо різним буквам відповідають різні цифри.

15. На скільки відсотків збільшиться площа прямокутника, якщо його довжину збільшити на 15 %, а ширину – на 20 %?

16. Що більше: $\frac{10^{15}+1}{10^{16}+1}$ чи $\frac{10^{16}+1}{10^{17}+1}$?

17. Доведіть, що число $2017 \cdot 2019 + 1$ є квадратом деякого натурального числа. Якого саме?

18. Доведіть, що значення виразу $8n^3 - 8n$ для будь-якого натурального значення $n > 1$ кратне числу 24.

19. Подайте вираз $2m^2 + 2n^2$ у вигляді суми двох квадратів.

20. Який многочлен потрібно записати замість «зірочки», щоб

одержати тотожність:
1) $(x + 1) \cdot * = x^2 - 4x - 5$;
2) $(x^2 - x + 1) \cdot * = x^3 + 2x^2 - 2x + 3$?

21. Розкладіть на множники:
1) $a^2b^2 - 2ab^2 + b^2 + a^4 - 2a^2 + 1$;
2) $1 - 3t + 3t^2 - t^3$;
3) $x^6 - 3x^4 + 6x^2 - 4$;
4) $2(m + 3n) + (m - n)(m + n) - 8$;
5) $a^3 + a^2 - b^3 - b^2$;
6) $8x^3 + 4x^2 - 2$.

22. Чи може сума квадратів п'яти послідовних натуральних чисел бути квадратом натурального числа?

23. Спростіть вираз
$$(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)(2^{64} + 1).$$

24. Число b є середнім арифметичним чисел a і c. Доведіть, що $a^2 + ac + c^2$ є середнім арифметичним чисел $a^2 + ab + b^2$ і $b^2 + bc + c^2$.

25. *Задача Лагранжа*. Доведіть тотожність
$$(x^2 + y^2 + z^2)(m^2 + n^2 + p^2) - (xm + yn + zp)^2 =$$
$$= (xn - ym)^2 + (xp - zm)^2 + (yp - zn)^2.$$

26. Доведіть, що число $\overline{abcabc}$ є кратним числам 7, 11 і 13.

27. Доведіть, що значення виразу $555^{777} + 777^{555}$ є кратним числу 37.

28. Яке трицифрове число є і квадратом двоцифрового числа, і кубом одноцифрового числа?

29. Доведіть, що значення виразу $191^6 + 734^6 - 593^3$ ділиться на 10.

30. Доведіть, що значення виразу $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ для будь-якого натурального значення n є кратним числу 10.

31. Подайте вираз $2x(x^2 + 3y^2)$ у вигляді суми кубів двох многочленів.

32. Доведіть тотожність:
1) $(x - 2)(x - 1)x(x + 1) + 1 = (x^2 - x - 1)^2$;
2) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$.

33. Використовуючи результат попередньої задачі, доведіть, що число $2017 \cdot 2018 \cdot 2019 \cdot 2020 + 1$ є квадратом деякого натурального числа y. Знайдіть y.

34. Доведіть, що різниця кубів двох послідовних натуральних парних чисел при діленні на 48 дає в остачі 8.

35. Розкладіть на множники:

1) $y^5 + y + 1$;
2) $m^4 + m^2 + 1$;
3) $x^4 + 5x^2 + 9$;
4) $n^4 + 4$;
5) $x^4 + 2a^2x^2 - 4a^2b^2 - 4b^4$;
6) $m^3 - 2m - 1$;
7) $m^3 - 5m - 2$;
8) $x^4 - 2x^3y - 6x^2y^2 - 4xy^3 - y^4$.

36. Порівняйте 5^{15} і 3^{23}.

Функції

37. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2|x| + x$;
2) $y = |x| - 3x$;
3) $y = |2x| + 2x - 1$;
4) $y = 2x - |3x| + 3$.

38. Точка $A(a;\ b)$, де $a \neq 0$, $b \neq 0$, належить графіку функції $y = x^2$. Чи належить цьому графіку точка:

1) $B(-a;\ b)$;
2) $C(a;\ -b)$;
3) $D(-a;\ -b)$?

39. Точка $M(m;\ n)$, де $m \neq 0$, $n \neq 0$, належить графіку функції $y = x^3$. Чи належить цьому графіку точка:

1) $N(-m;\ n)$;
2) $K(m;\ -n)$;
3) $P(-m;\ -n)$?

40. Знайдіть точки перетину графіків функцій $y = -4|x| + 3$ та

$$y = \begin{cases} 2x + 1, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ -3x + 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Системи лінійних рівнянь

41. Василь може придбати без решти 7 рогаликів і 3 вертути або 3 рогалики і 4 вертути. Який відсоток становить ціна рогалика від ціни вертути?

42. Чи має розв'язки рівняння з двома змінними:

1) $x^2 + y^4 = -1$;
2) $|y| + x^2 = 0$;
3) $x^2 - |y| = 5$;
4) $5x^2 + y^8 + |x| = 0$?

43. У рівнянні $ax + by = 43$ коефіцієнти a і b – цілі числа. Чи може розв'язком цього рівняння бути пара чисел $(5;\ 10)$?

44. Скільки розв'язків має рівняння:

1) $(x + 1)^2 + y^2 = 0$;
2) $x^2 + y^2 + (y - 2)^2 = 0$;

3) $|x| + (y + 1)^2 = 0$; 4) $x((x - 3)^2 + (y + 4)^2) = 0$?

45. Сергій придбав кілька зошитів по 2 грн і кілька ручок по 2 грн 50 коп., заплативши за всю покупку 30 грн. Скільки зошитів придбав Сергій?

46. Побудуйте графік рівняння:

1) $(x + 1)(x - 2y) = 0$; 2) $x^2 - xy = 0$;
3) $(x^2 - 4)(y^2 + 4) = 0$; 4) $(|x| + 1)(|y| - 3) = 0$;
5) $|x| + x = y$; 6) $x = y|x|$.

47. Доведіть, що рівняння $x^2 - y^2 = 26$ не має розв'язків у цілих числах (тобто розв'язками не можуть бути цілі числа).

48. Чи перетинає графік рівняння $y + x^2 = 4$ вісь x; вісь y? Якщо так, то вкажіть координати точок перетину.

49. Знайдіть усі пари натуральних чисел, що задовольняють рівняння $11x + 8y = 104$.

50. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точки перетину графіка рівняння $(x - 3)(y + 5) = 0$:

1) з віссю x; 2) з віссю y.

51. Учень загадав два двоцифрових числа, кожне з яких починається цифрою 6, причому інші цифри кожного із чисел відмінні від числа 6. Якщо переставити місцями цифри в кожному із загаданих чисел, то значення їхнього добутку не зміниться. Які числа загадав учень?

52. Олесь народився у XX столітті. У 2009 році йому було стільки років, якою є сума цифр його року народження. У якому році народився Олесь?

53. За якого значення a прямі $3x + 4y = 5$ і $2x + 8y = a$ перетинаються в точці, що лежить на осі y?

54. Доберіть, якщо це можливо, таке значення m, для якого система рівнянь має єдиний розв'язок; не має розв'язків; має безліч розв'язків:

1) $\begin{cases} 2x - y = 7, \\ mx - y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ 1,5x + y = m; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} mx - 2y = 1, \\ 4x - 8y = 4. \end{cases}$

55. Для якого значення a система рівнянь $\begin{cases} 4x - 3y = 10, \\ 2x + 5y = -8, \\ a(x + y) = 7 \end{cases}$ має розв'язок?

56. Розв’яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x - y = 2, \\ y - z = 3, \\ z + x = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 7, \\ y + z = 5, \\ z + x = -4. \end{cases}$

57. У результаті множення многочлена $4x^3 - 2x^2 + 3x - 8$ на многочлен $ax^2 + bx + 1$ одержали многочлен, який не містить ані x^4, ані x^3. Знайдіть коефіцієнти a і b та многочлен, який одержали в добутку.

58. Розв’яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} (x-1)(y-4x) = 0, \\ x + y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-y)(x+1) = 0, \\ (y-2)(x+y-6) = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ 3x - y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0, \\ 3x - y = 3. \end{cases}$

Розв’язання. 4) Перше рівняння системи перепишемо так: $x^2 + 2xy + y^2 = 1$, тобто $(x + y)^2 = 1$. Звідки $x + y = 1$ або $x + y = -1$. Отже, розв’язування початкової системи рівнянь звелося до розв’язування двох систем:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 3x - y = 3 \end{cases} \text{ та } \begin{cases} x + y = -1, \\ 3x - y = 3. \end{cases}$$

Звідки $x = 1$, $y = 0$ та $x = 0{,}5$, $y = -1{,}5$.
Відповідь: $(1; 0)$; $(0{,}5; -1{,}5)$.

59. Розв’яжіть рівняння з двома змінними:
1) $(x - 2)^2 + (3x - y)^2 = 0$;
2) $(2x - y)^2 + x^2 + 8x + 16 = 0$;
3) $(7x + y - 3)^2 + x^2 + 2xy + y^2 = 0$;
4) $|x - y + 5| + x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$;
5) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$;
6) $x^2 - 2xy + 2y^2 + 6y + 9 = 0$.

60. Число b на 10 % більше за число a і на 30 % більше за число c. Знайдіть числа a, b і c, якщо a на 8 більше за c.

61. Через 4 роки відношення віку брата до віку сестри дорівнюватиме 7 : 5. Скільки років нині кожному з них, якщо 2 роки тому брат був удвічі старший за сестру?

62. Загадали деяке двоцифрове число. Якщо це число поділити на суму його цифр, то одержимо неповну частку, що дорівнює 4, та 6 в остачі. Якщо ж від цього числа відняти потроєну суму його цифр, то одержимо 16. Яке число загадали?

63. Кількість десятків деякого трицифрового числа вдвічі більша за кількість одиниць. Сума цифр цього числа дорівнює 13. Якщо поміняти місцями цифри сотень і одиниць, то одержимо число, яке на 495 менше від даного. Знайдіть дане число.

64. Якщо перше з двох даних чисел збільшити на 10 %, а друге – на 15 %, то їхня сума збільшиться на 13 %. Якщо перше з даних чисел зменшити на 5 %, а друге – на 10 %, то сума чисел зменшиться на 48. Знайдіть дані числа.

65. Для проведення ремонту придбали пісок і цемент. Першого дня використали $\frac{1}{5}$ від маси придбаного піску і $\frac{1}{4}$ від маси придбаного цементу, що разом становило 205 кг. Другого дня використали чверть тієї маси піску, яка залишилася, що на 37 кг більше за масу п’ятої частини цементу, яка залишилася після першого дня. Скільки піску і скільки цементу було придбано для ремонту?

66. Одна сторона трикутника втричі більша за другу. Периметр трикутника на 22 см більший за їхню півсуму і на 27 см більший за їхню піврізницю. Знайдіть сторони трикутника.

67. Якщо довжину прямокутника збільшити на 3 см, а ширину – на 2 см, то його площа збільшиться на 37 см^2. Якщо кожну сторону прямокутника зменшити на 1 см, то його площа зменшиться на 12 см^2. Знайдіть периметр прямокутника.

68. Зливок складається з двох металів, маси яких відносяться як 3 : 4. Інший зливок містить ті самі метали, але у відношенні 1 : 2. По скільки кілограмів від кожного зливка потрібно взяти, щоб одержати зливок масою 10 кг, у якому маси тих самих металів відносяться як 2 : 3?

69. Дорога від села до міста спочатку пролягає горизонтально, а потім угору. Турист проїхав на велосипеді горизонтальну її частину зі швидкістю 10 км/год, а вгору йшов пішки зі швидкістю 3 км/год і прибув до міста через 1 год 40 хв після виїзду із села. У зворотному напрямку шлях униз турист проїхав зі швидкістю 15 км/год, а горизонтальну ділянку – зі швидкістю 12 км/год і прибув до села через 58 хв після виїзду з міста. Знайдіть відстань між містом і селом.

70. В одному резервуарі – 490 л води, а в іншому – 560 л. Якщо перший резервуар ущерть долити водою з другого, то другий стане заповнений наполовину. Якщо другий резервуар ущерть долити з першого, то перший буде заповнений тільки на третину. Визначте місткість кожного з резервуарів.

71. Автобус і маршрутне таксі, які за розкладом вирушають назустріч один одному о 8 год з пунктів A і B, зазвичай зустрічаються о 8 год 12 хв. Але одного разу маршрутне таксі вирушило в рейс о 8 год 8 хв і зустрілося з автобусом о 8 год 17 хв. Знайдіть швидкість автобуса і швидкість маршрутного таксі, якщо відстань між A і B дорівнює 24 км.

72. З пункту M до пункту N о 7 год і о 7 год 30 хв виїхали два автобуси з однією і тією самою швидкістю. О 7 год 10 хв з пункту N до пункту M виїхала велосипедистка. Вона зустріла перший автобус о 7 год 40 хв, а другий – о 8 год 01 хв. Знайдіть швидкості велосипедистки та кожного з автобусів, якщо відстань між пунктами M і N дорівнює 37 км.

73. З міста в село, відстань між якими 24 км, вирушив турист. Через 1 год 20 хв услід за ним виїхав велосипедист, який через пів години наздогнав туриста. Після прибуття в село велосипедист, не зупиняючись, повернув назад і зустрівся з туристом через півтори години після першої зустрічі. Знайдіть швидкість туриста і швидкість велосипедиста.

74. З міста A в місто B о 9 год виїхали два автобуси. У той самий час з міста B у місто A виїхала велосипедистка. Один автобус трапився на її шляху о 10 год 20 хв, а інший – об 11 год. Знайдіть швидкості велосипедистки та кожного з автобусів, якщо швидкість одного автобуса становить $\frac{7}{12}$ від швидкості іншого, а відстань між містами – 120 км.

75. По колу, довжина якого 500 м, рухаються дві точки. Вони зустрічаються через кожні 10 с, якщо рухаються у протилежних напрямках, і через кожні 50 с, якщо – в одному. Знайдіть швидкість кожної з точок.

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ З ГЕОМЕТРІЇ

Елементарні геометричні фігури та їхні властивості

1. Дано відрізок AB. Позначте всі такі точки K на відрізку AB, для яких виконується співвідношення:

1) $BK = 3AK$; 2) $BK \geqslant 3AK$.

2. $\angle AOB = 120°$. Побудуйте промінь OK, який проходить між сторонами даного кута так, що $3\angle AOK - 2\angle KOB = 10°$.

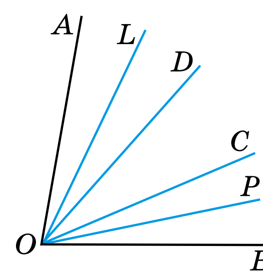
3. Скільки різних прямих можна провести через чотири точки так, щоб кожна пряма проходила щонайменше через дві із заданих точок? Розгляньте всі можливі випадки. До кожного зробіть малюнок.

4. Скільки різних точок перетину можуть мати чотири прямі, кожні дві з яких перетинаються? Розгляньте всі можливі випадки. До кожного виконайте малюнок.

5. Точки A, B і C належать прямій a, причому точка B лежить між точками A і C. Відомо, що $AC < 1{,}9AB$. Порівняйте довжини відрізків BC і AB.

6. На малюнку 1: $\angle AOC = \angle BOD$. OL і OP – бісектриси кутів AOD і COB. Порівняйте кути:

1) AOL і COP; 2) LOP і AOC.



Мал. 1

Взаємне розміщення прямих на площині

7. Дано п’ять прямих, кожні дві з яких перетинаються. Відомо, що через точку перетину будь-яких двох з них проходить принаймні ще одна з даних прямих. Доведіть, що всі ці прямі проходять через одну точку.

8. Чи можна градусні міри двох суміжних кутів записати:

1) тільки непарними цифрами;

2) тільки парними цифрами?

9. Знайдіть суміжні кути, якщо:

1) градусні міри цих кутів відносяться як $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$;

2) половина одного з них становить 40 % від іншого.

10. У якому з випадків утвориться більше пар вертикальних кутів: при перетині трьох прямих в одній точці чи у трьох точках?

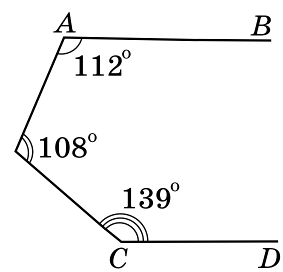
11. Знайдіть кут між двома прямими, що перетинаються, якщо сума $\frac{1}{3}$ одного з утворених кутів і $\frac{5}{6}$ іншого дорівнює 90°.

12. Через вершину тупого кута, градусна міра якого дорівнює α, проведено промені, перпендикулярні до сторін кута. Промені утворили гострий кут β. Доведіть, що $\alpha + \beta = 180°$.

13. Чи є паралельними прямі AB і CD на малюнку 2?

14. Чи можна, використовуючи шаблон кута, градусна міра якого 27°, побудувати перпендикулярні прямі?

15. Знайдіть градусну міру кожного з кутів, утворених при перетині двох прямих, якщо один з них у 2,6 раза менший від суми трьох інших.



Мал. 2

Трикутники. Ознаки рівності трикутників

16. Периметр трикутника на 10 см більший за одну зі сторін, на 13 см – за другу і на 9 см – за третю. Знайдіть периметр трикутника.

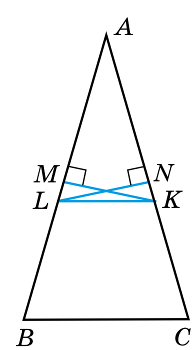
17. Точки M і N – середини сторін AB і AC трикутника ABC, $AB = AC$, $MK \perp AB$, $NL \perp AC$ (мал. 3). Доведіть, що $\angle NLK = \angle MKL$.

18. Прямі, що містять бісектриси зовнішніх кутів при вершинах B і C трикутника ABC, перетинаються в точці O. Знайдіть $\angle BOC$, якщо $\angle A = \alpha$.

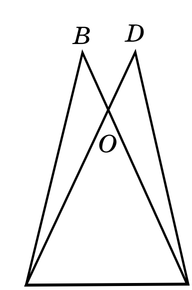
19. На малюнку 4: $\triangle ABC = \triangle CDA$, $AB = CD = 40$ см, $BO = DO = 10$ см. Периметр трикутника ABC дорівнює 100 см. Знайдіть периметр трикутника AOC, якщо AO більша за AC на 30 см.

20. $\triangle ABC$ – рівнобедрений з основою AB. Медіани AA_1 і BB_1 продовжено за точки A_1 і B_1 на відрізки A_1K і B_1L відповідно так, що $A_1K = AA_1$ і $B_1L = BB_1$. Доведіть, що $\angle ALC = \angle BKC$.

21. Доведіть, що з точки перетину бісектрис кожну зі сторін трикутника видно під тупим кутом.



Мал. 3



Мал. 4

22. Дві сторони і висота, що проведена до третьої сторони одного трикутника, відповідно дорівнюють двом сторонам і висоті, що проведена до третьої сторони другого трикутника. Чи можна стверджувати, що трикутники рівні між собою?

23. Дві сторони і медіана, що проведена до третьої сторони одного трикутника, дорівнюють відповідно двом сторонам і медіані, проведеній до третьої сторони другого трикутника. Доведіть, що ці трикутники рівні між собою.

24. Визначте вид трикутника (за кутами), якщо:

1) сума будь-яких двох його кутів більша за $90°$;

2) кожний з кутів менший від суми двох інших.

25. У трикутнику ABC кут C – прямий. Сторону AB трикутника продовжено за точку A на відрізок $AP = AC$ і за точку B на відрізок $BT = BC$. Знайдіть суму градусних мір кутів CPT і CTP.

26. У трикутнику ABC $AC = BC$, D – точка перетину бісектрис трикутника, а точка O – центр кола, описаного навколо трикутника. Відрізок OD перетинає сторону AB трикутника в точці P і ділиться цією точкою навпіл. Знайдіть кути трикутника ABC.

27. Відрізки AC і BD перетинаються. Відомо, що $AB > AC$. Доведіть, що $BD > CD$.

28. У трикутнику ABC $AB > AC$, AM – медіана. Доведіть, що $\angle CAM > \angle MAB$.

29. Усередині рівностороннього трикутника ABC узято довільну точку K. Доведіть, що $AK < BK + KC$.

30. У прямокутному трикутнику один з гострих кутів удвічі менший від другого, а сума гіпотенузи та меншого катета дорівнює a см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

31. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 40°$. На сторонах AB і BC позначено точки K і L так, що $\angle LAK = 5°$, $\angle LCK = 10°$. Знайдіть $\angle LKC$.

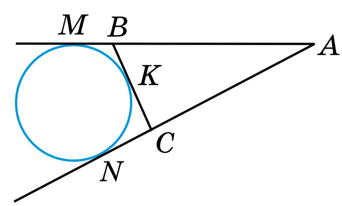
32. У трикутнику ABC висоти AA_1 і BB_1 рівні й $AB_1 = CA_1$. Знайдіть $\angle C$.

Коло і круг

33. Відрізок BD – висота гострокутного трикутника ABC. Від вершини B на прямій BC відкладено відрізки BM і BN, довжини яких дорівнюють довжині сторони AB. На стороні AC від точки D відкладено відрізок DL, що дорівнює DA. Доведіть, що точки A, M, N, L лежать на одному колі.

34. Навколо рівнобедреного трикутника з кутом при вершині $120°$ і бічною стороною, що дорівнює a см, описано коло. Знайдіть його радіус.

35. AM і AN – дотичні до кола (мал. 5), $AM = m$ см. Пряма BC дотикається до кола в точці K. Знайдіть периметр трикутника ABC.



Мал. 5

36. Два кола однакового радіуса, що дотикаються між собою, внутрішньо дотикаються до третього кола. Сполучивши центри трьох кіл, отримали трикутник, периметр якого 20 см. Знайдіть радіус більшого кола.

37. Нехай r – радіус кола, вписаного у прямокутний трикутник з катетами a і b та гіпотенузою c. Доведіть, що $r = \dfrac{a+b-c}{2}$.

38. Два кола мають зовнішній дотик у точці P. Точки M_1 і M_2 – точки дотику спільної зовнішньої дотичної до кіл. Доведіть, що $\angle M_1PM_2 = 90°$.

39. За допомогою циркуля і лінійки поділіть кут $54°$ на три рівні частини.

40. Знаючи суму і різницю двох кутів, побудуйте їх.

41. Побудуйте $\triangle ABC$ за стороною BC, прилеглим до неї кутом B і сумою двох інших сторін $CA + AB$.

42. Побудуйте $\triangle ABC$ за двома кутами A і B та периметром P.

43. Дано пряму a і відрізок AB, що перетинає цю пряму. Побудуйте на прямій a точку C так, щоб пряма містила бісектрису трикутника ABC.

44. Побудуйте точку, яка лежить на даному колі й рівновіддалена від кінців даного відрізка. Скільки розв'язків має задача?

ДОДАТКОВІ ТЕМИ

Геометричне місце точок

Поняття про геометричне місце точок площини

У геометрії є задачі, пов'язані з геометричним місцем точок, яке, залежно від умови задачі, потрібно або знайти (побудувати), або використати для розв'язування задачі.

Геометричним місцем точок **площини називають фігуру, що складається з усіх точок площини, які мають певну властивість.**

Приклади геометричних місць точок площини

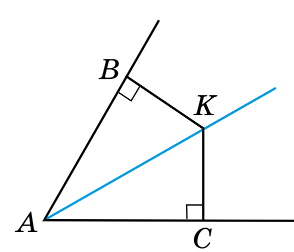
Розглянемо кілька геометричних місць точок площини.

1. *Геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки на дану відстань*, – це коло, радіус якого дорівнює даній відстані.

2. *Геометричне місце точок, відстань від яких до даної точки не перевищує даної відстані*, – це круг, радіус якого дорівнює даній відстані.

3. *Геометричне місце точок, які рівновіддалені від сторін кута та належать його внутрішній області*, – це бісектриса даного кута.

Доведення. 1) Нехай точка K рівновіддалена від сторін AB і AC кута A і належить внутрішній області кута (мал. 1). Тобто перпендикуляри KB і KC, проведені із цієї точки до сторін кута, – рівні між собою. Тоді $\triangle ABK = \triangle ACK$ (за катетом і гіпотенузою), а $\angle BAK = \angle CAK$ (як відповідні кути). Отже, AK – бісектриса кута.



Мал. 1

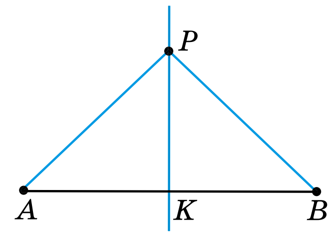
2) Нехай точка K належить бісектрисі кута. За властивістю бісектриси кута (див. § 47, теорема 1): $KB = KC$. ■

Отже, ми довели, що геометричним місцем точок, які рівновіддалені від сторін кута та належать його внутрішній області, є бісектриса даного кута.

4. *Геометричне місце точок, які рівновіддалені від кінців відрізка*, – це серединний перпендикуляр до даного відрізка.

Доведення. 1) Нехай точка P рівновіддалена від кінців відрізка AB, тобто $PA = PB$ (мал. 2). Тоді $\triangle ABP$ – рівнобедрений з основою AB, а тому медіана PK цього трикутника є його висотою. Отже, $AK = KB$ і $PK \perp AB$. Тому PK – серединний перпендикуляр до відрізка AB.

2) Нехай точка P належить серединному перпендикуляру до відрізка AB. За властивістю серединного перпендикуляра (див. § 48, теорема 1), $PA = PB$. ■



Мал. 2

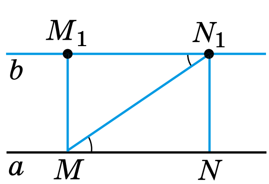
Отже, ми довели, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка, є серединний перпендикуляр до даного відрізка.

5. *Геометричне місце точок, які рівновіддалені від даної прямої на задану відстань*, – це дві прямі, паралельні даній прямій, кожна точка яких міститься на заданій відстані від прямої.

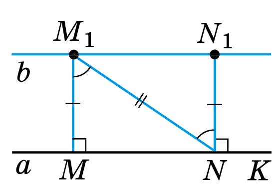
Доведення. 1) Доведемо, що коли пряма b паралельна прямій a, то дві довільні точки прямої b рівновіддалені від прямої a.

Нехай M_1 і N_1 – довільні точки прямої b. Проведемо перпендикуляри M_1M і N_1N до прямої a (мал. 3). $\angle M_1MN = \angle N_1NM = 90°$. Оскільки $a \parallel b$, то $\angle MM_1N_1 = \angle NN_1M_1 = 90°$. Проведемо січну MN_1. Тоді $\angle N_1MN = \angle M_1N_1M$ (як внутрішні різносторонні). Тому $\triangle MM_1N_1 = \triangle N_1NM$ (за гіпотенузою і гострим кутом), звідки $M_1M = N_1N$, тобто точки M_1 і N_1 прямої b рівновіддалені від прямої a.

2) Доведемо, що коли дві довільні точки M_1 і N_1 прямої b лежать на однаковій відстані від прямої a і по один бік від неї, то пряма b – паралельна прямій a (мал. 4).



Мал. 3



Мал. 4

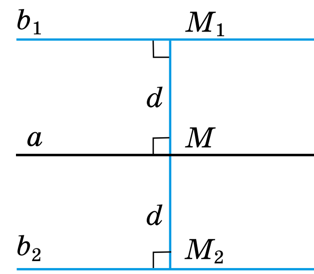
Нехай M_1M і N_1N – перпендикуляри до прямої a. За умовою $M_1M = N_1N$.

Оскільки $\angle M_1MN = \angle N_1NK$, то $MM_1 \parallel NN_1$. Тому $\angle MM_1N = \angle N_1NM_1$ (як внутрішні різносторонні кути). Отже, $\triangle MM_1N = \triangle N_1NM_1$ (за першою ознакою). Тому $\angle M_1N_1N = \angle M_1MN = 90°$.

Також маємо $\angle N_1NK = 90°$. Але $\angle M_1N_1N$ і $\angle N_1NK$ – внутрішні різносторонні для прямих a і b. Тому $a \parallel b$. ■

Отже, геометричним місцем точок, віддалених від даної прямої на задану відстань d, є дві прямі, паралельні даній, кожна точка яких міститься на заданій відстані від прямої.

На малюнку 5 $b_1 \parallel a$, $b_2 \parallel a$, $M_1M = M_2M = d$. Відстань d також називають *відстанню між паралельними прямими* (наприклад, між b_1 і a).



Мал. 5

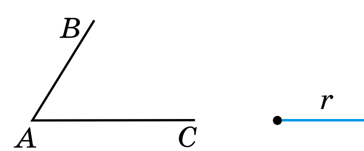
Метод геометричних місць

Суть методу геометричних місць у задачах на побудову полягає в такому. Нехай потрібно побудувати точку A, що задовольняє дві умови. Будуємо геометричне місце точок, що задовольняють першу умову, – фігура F_1, і геометричне місце точок, що задовольняють другу умову, – фігура F_2. Шукана точка A належить і F_1, і F_2, а тому є точкою їхнього перетину.

Розв’яжемо задачу на застосування методу геометричних місць точок.

Приклад. У даний кут вписати коло заданого радіуса.

Розв’язання. Нехай дано кут A (мал. 6), у який потрібно вписати коло радіуса r (тобто таке коло радіуса r, яке дотикалося б до сторін кута).

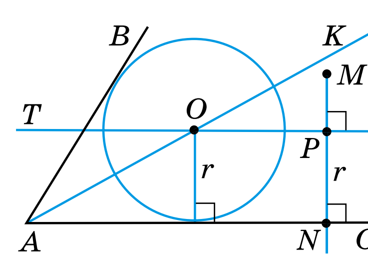


Мал. 6

Спочатку знайдемо центр цього кола – точку O. Ця точка задовольняє дві умови: 1) належить бісектрисі кута (бо є рівновіддаленою від сторін кута); 2) міститься на відстані r, наприклад від сторони AC кута.

Звідси побудова:

1) будуємо бісектрису кута A – промінь AK (мал. 7);



Мал. 7

2) будуємо пряму, перпендикулярну до прямої AC, що проходить через деяку точку M, яка лежить усередині кута;

3) визначаємо на побудованій прямій точку P, що міститься на відстані r від прямої AC;

4) проводимо через точку P пряму PT, перпендикулярну до прямої PN; тоді прямі PT і AC – паралельні, кожна точка прямої PT міститься на відстані r від прямої AC;
5) пряма PT перетинає промінь AK у точці O. Ця точка і є центром кола, радіус якого r, вписаного в кут A;
6) описуємо коло, радіус якого r, із центром у точці O, воно дотикається до сторін кута.
Доведення того, що побудоване коло є шуканим, випливає з побудови.

Що називають геометричним місцем точок? ○ Що являє собою геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки, відстань від яких до даної точки не перевищує заданої відстані; рівновіддалених від сторін кута; рівновіддалених від кінців відрізка; віддалених від даної прямої на задану відстань? ○ У чому полягає суть методу геометричних місць точок?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

2

1. Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від заданої точки на:
1) відстань 2 см; 2) відстань, не більшу за 2 см.

2. Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від заданої точки на:
1) відстань a см;
2) відстань, не більшу за a см.

3. Накресліть довільний відрізок AB і знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка.

4. Побудуйте відрізок MN завдовжки 4 см і геометричне місце точок, рівновіддалених від його кінців.

5. Побудуйте тупий кут і геометричне місце точок, що належать внутрішній області кута, рівновіддалених від сторін цього кута.

6. Побудуйте гострий кут і геометричне місце точок, що належать внутрішній області кута, рівновіддалених від сторін цього кута.

7. Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від даної точки на задану відстань.

8. Побудуйте прямий кут і геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін цього кута, що належать його внутрішній області.

9. Чи буде пряма, що містить висоту рівнобедреного трикутника, проведену до основи, геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців основи?

10. Позначте точки P і F, відстань між якими 4 см. Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від кожної з них на відстань 3 см.

11. Побудуйте геометричне місце точок, що містяться від заданої прямої на відстані, що дорівнює заданому відрізку a.

12. Побудуйте геометричне місце точок, що містяться на відстані 4 см від заданої прямої.

13. Знайдіть геометричне місце центрів кіл радіуса r, що проходять через точку P.

14. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, що дотикаються до даної прямої в заданій точці M.

15. Дано основу AB рівнобедреного трикутника. Знайдіть геометричне місце точок – вершин рівнобедрених трикутників з основою AB.

16. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, що проходять через дві задані точки – P і L.

17. Побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від двох заданих паралельних прямих.

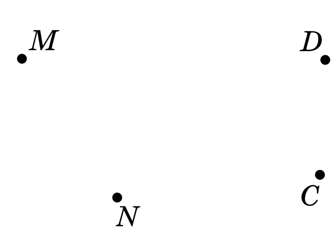
18. Побудуйте коло радіуса r, що проходить через дві дані точки. Скільки розв'язків має задача?

19. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від усіх вершин трикутника.

20. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, радіус кожного з яких дорівнює r, що дотикаються до даної прямої.

21. На стороні трикутника знайдіть точку, рівновіддалену від двох інших його сторін.

22. Дано пряму a і точку A. Знайдіть геометричне місце точок, що віддалені від прямої a на 3 см, а від точки A – на 2 см. Скільки розв'язків може мати задача залежно від розміщення точки A і прямої a?



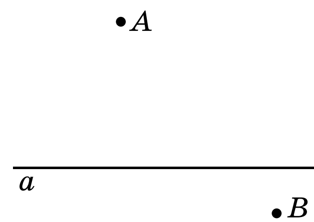
Мал. 8

23. Скопіюйте малюнок 8 у зошит. Побудуйте таку точку A, щоб $AM = AN$ і $AC = AD$.

24. Побудуйте коло заданого радіуса, яке дотикається до двох заданих кіл, що мають зовнішній дотик.

25. Центр кола, радіус якого дорівнює 1,5 см, належить прямій a. Побудуйте коло радіуса 2 см, що дотикається до заданих прямої та кола.

26. Два населених пункти A і B розташовані по різні боки від річки a (мал. 9). У якому місці потрібно побудувати міст через річку, щоб він був рівновіддаленим від пунктів A і B?



Мал. 9

27. Побудуйте трикутник за двома сторонами та висотою, що проведена до однієї з них. Скільки розв'язків має задача?

28. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і висотою, що проведена до цієї сторони.

29. Знайдіть геометричне місце точок, що містяться на відстані, яка не перевищує 3 см від заданої прямої.

30. Побудуйте коло, що проходить через дану точку M і дотикається до даної прямої a в заданій точці A.

31. Побудуйте трикутник за його кутом, бісектрисою, проведеною із цього кута, і висотою, що проведена до прилеглої до цього кута сторони.

32. Побудуйте трикутник за радіусом описаного кола, стороною та висотою, що проведена до цієї сторони.

33. Знайдіть геометричне місце вершин прямокутних трикутників зі спільною гіпотенузою.

Вправи для повторення

34. Периметр рівнобедреного трикутника на 18 см більший за його основу. Чи можливо знайти довжину бічної сторони?

35. Один із зовнішніх кутів прямокутного трикутника дорівнює 120°. Знайдіть відношення меншого катета до гіпотенузи.

36. Два кола із центрами в точках O_1 і O_2 перетинаються в точках A і B, і кожне з них проходить через центр іншого. Знайдіть $\angle O_1AO_2$ і $\angle AO_1B$.

Життєва математика

37. Кімната у формі прямокутника має розміри 3,6 м × 4,9 м. У кімнаті є двері 90 см завширшки.

1) Скільки метрів плінтуса потрібно купити для цієї кімнати?

2) Скільки коштуватиме ця покупка, якщо один погонний метр плінтуса коштує 50 грн?

Цікаві задачі – поміркуй одначе

38. Прямокутну плитку шоколаду розламали на 4 прямокутних шматки. Один з них містить 6 квадратних частинок, другий – 15, а третій – 16. Скільки квадратних частинок у четвертому шматку цієї плитки?

А ще раніше...

Вагомий вклад жінок у становлення математики у світі

Гіпатія (близько 350–370 – 415)

Гіпатія – грецька жінка-астроном, філософ, математик, що працювала в Александрії. Дочка математика Теона з Александрії, останнього управителя Александрійської бібліотеки. Послідовниця неоплатонівської школи Ямвліха. Займалася обчисленням астрономічних таблиць, написала коментарі до наукових творів Аполлонія (щодо конічних перетинів) і Діофанта (з арифметики), які не збереглися.

В історії науки Гіпатія знана як винахідниця. Вона створила такі астрономічні прилади: пласка астролябія – прилад для визначення широт і довгот в астрономії, який використовувався для визначення знаходження Сонця, зірок і планет, а також планісферу – зображення небесної сфери на площині, на ній можна обчислювати час заходу і сходу небесних світил. Також Гіпатія винайшла ареометр – прилад для визначення густини рідини.

Вона мала славу талановитої вченої та викладачки. До Гіпатії в Александрію приїжджали вчитися люди з різних країв світу. Одним з її учнів був Сінесій, єпископ Птолемаїди.

Марія Ґаетана Аньєзі (1718–1799)

Марія Ґаетана Аньєзі – італійська вчена, математик і філософ.

Їй приписують авторство першої книги, у якій обговорюється як диференціальне, так і інтегральне числення. Була почесним членом факультету в Болонському університеті.

Найзначнішим результатом праці Марії Аньєзі була *Instituzioni analitiche ad uso della gioventu italiana*, опублікована 1748 року в Мілані. Книга «вважалась найкращим вступом до Ейлера серед наявних робіт». Працювала над інтеграцією математичного аналізу з алгеброю. У цій праці, зокрема, довела, що будь-яке кубічне рівняння має три корені. Перший том праць був присвячений аналізу методом скінченних різниць, а другий – нескінченно малим величинам. Переклад Р. Т. д'Антельмі другого тому французькою з доповненнями Чарльза Боссута (1730–1814) був опублікований у Парижі в 1775 році; переклад англійською *Analytical Institutions*, виконаний Джоном Колсоном (1680–1760), Лукасівським професором математики в Кембриджському університеті та «перевірений» Джоном Геллінсом, був опублікований 1801 року за підтримки барона Мазереса. Робота була присвячена імператриці Марії Терезії, яка віддячила Аньєзі подарунком – перснем з діамантом і приватним листом. Багато хто хвалив її роботу, зокрема й Папа Бенедикт XIV, який надіслав їй хвалебного листа разом із золотим вінком і золотою медаллю.

Софі Жермен
(1776–1831)

Софі Жермен – французька вчена, математик, філософ і механік. Зробила вагомий внесок у диференціальну геометрію, теорію чисел і механіку.

Самостійно вчилася в бібліотеці батька-ювеліра і з дитинства захоплювалася математичними творами, особливо відомою книгою «Історія математики» (фр. *Histoire des mathématiquse*) Жан-Етьєна Монтукля (фр. *Jean-Étienne Montucla*), хоча батьки не дуже схвалювали це заняття, як не відповідне для жінки.

Була в листуванні з Даламбером, Лагранжем, Фур'є та іншими математиками. У більшості випадків вона при цьому ховалася під чоловічим ім'ям, найчастіше «мосьє Ле Блан» (реальна особа, учень Лагранжа). З Лагранжем та Лежандром їй вдалося зустрітися особисто, вони зацікавились талановитою ученицею, стали спрямовувати й заохочувати її навчання.

1804 року, перебуваючи під сильним враженням від книги Гауса «Арифметичні дослідження» («*Disquisitiones Arithmeticae*»), вступила з ним у листування під звичайним псевдонімом. Обговорювалися питання теорії чисел. У 1806 році, під час прусської кампанії, наполеонівська армія окупувала Геттінген. Софі написала схвильованого листа своєму знайомому, генералу Жозефу-Марі Пернеті, благаючи подбати, щоб Гауса не спіткала доля Архімеда. Генерал передав Гаусу, що у нього є покровителька, і незабаром секрет Софі був розкритий. Гаус був глибоко зворушений цим вчинком:

«Смак до абстрактних наук узагалі й понад усе до таємниць чисел трапляється вкрай рідко: однак не дивується цьому; чарівлива привабливість цієї науки відкривається тільки тим, хто має сміливість зануритися в неї. Але коли особа тієї статі, яка, відповідно до наших звичок і упереджень, має наразитися на набагато більші труднощі, ніж чоловіки, щоб ознайомитись з тими тернистими дослідженнями, все ж таки досягає успіху в подоланні перешкод і осягає найбільш приховані їхні частини, тоді, без сумніву, ця особа наділена найшляхетнішою сміливістю. Справді, ніщо не може довести мені таким утішним і менш сумнівним способом, що принади цієї науки, яка збагатила моє життя радощами, не є химеристими, як і прихильність, якої Ви її удостоїли» (30.04.1807).

За дослідження в теорії пружності стосовно коливань тонких пластинок («*Mémoire sur les vibrations des lames élastiques*» 1808 р.) одержала премію Паризької академії наук – це була перша премія, видана Паризькою академією жінці.

У 1811 році Софі бере участь в конкурсі, оголошеному Паризькою академією наук на тему з теорії пружних коливань (походження фігур Хладні). У журі були Лежандр, Лаплас і Пуассон. Потрібно було п'ять років досліджень і консультативна допомога Лагранжа, перш ніж у 1816 році вона виборола «премію Першого класу» конкурсу.

1816 року вивела диференціальне рівняння згину пластини.

Займалась також теорією чисел. Довела так званий «Перший випадок» Великої теореми Ферма для простих чисел Софі Жермен. Жермен довела, що рівняння Ферма не має розв'язку, коли $n = p - 1$, де p – просте число виду $8k + 7$. Наприклад, якщо $k = 2$, то p – просте число, а саме 23, і $n = 22$.

Стає першою жінкою, яка отримала право участі в засіданнях Паризької академії наук. Роботи з теорії пружності продовжувала й надалі. У 1830 р. за рекомендацією Гауса Геттінгенський університет присуджує Софі звання почесного доктора наук, але вона вже не встигла його отримати.

У свідоцтві про смерть проти її прізвища значилося «*rentere*» («персона, що володіла приватними засобами»), що на практиці означало «незалежна жінка». Перед смертю вона накидала чернетку філософського есе, яке не встигла закінчити. Його було опубліковано посмертно під заголовком «Загальні міркування про науки та літератури».

ВІДПОВІДІ ТА ПОРАДИ ДО ВПРАВ

Тема 7

§ 32

32.35. 1) 1; 2) 0. **32.36.** 1) -2; 2) -16. **32.38.** $a^{16} + b^{16}$. **32.40.** 1) $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$; 2) $8b^3 - 12b^2 + 6b - 1$. **32.41.** 1) $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$; 2) $8m^3 + 12m^2 + 6m + 1$. **32.42.** 1011 р. **32.43.** 24; 26; 28. **32.45.** 48 грн. **32.48.** *Порада.* $(n^2 + n)(n + 2) = n(n + 1) \times (n + 2)$ – добуток трьох послідовних натуральних чисел.

§ 33

33.14. 1) 5; 2) $-\frac{1}{8}$; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) 1,75. **33.15.** 1) -8; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $-1{,}5$; 4) 0,2. **33.18.** 1) $(x - 1)^2$; 2) $(a + 4)^2$. **33.20.** 1) $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geqslant 0$; 2) $-x^2 + 2x - 1 = -(x - 1)^2 \leqslant 0$. **33.22.** *Порада.* $x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 + 1 = (x + 2)^2 + 1$. **33.23.** *Порада.* $x^2 + 6x + 11 = x^2 + 6x + 9 + 2 = (x + 3)^2 + 2$. **33.26.** 1) 23; 2) 0. **33.27.** 1) $m^3 - 4m^2 - 11m + 30$; 2) $p^{10} + 1$. **33.28.** 87 грн.

§ 34

34.12. 1) -3; 2) 16. **34.13.** 1) -2; 2) 27. **34.23.** 1) 2; 2) 1; 3) $-\frac{8}{43}$. **34.24.** 1) $-1{,}6$; 2) -6; 3) $\frac{2}{3}$. **34.25.** 1) $6a + 18$; 2) $55x^2 + 48xy - 73y^2$; 3) $b^4 - 18b^2 + 81$; 4) $625 - 50a^2 + a^4$. **34.26.** 1) $13 - 4c$; 2) $56x^2 + 20xy - 8y^2$; 3) $a^4 - 72a^2 + 1296$; 4) $16 - 8m^2 + m^4$. **34.28.** 1) $x^2 + 2xy + y^2 - 1$; 2) $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$; 3) $m^2 + 2mn + n^2 - 4p^2$; 4) $x^2 - y^2 - 4y - 4$. **34.29.** $9\frac{5}{6}$. **34.30.** 120 м^2; 8 год.

§ 35

35.19. 1) -4; 6; 2) -6; 1; 3) $-2{,}2$; 1; 4) -1; 11. **35.20.** 1) -8; 4; 2) -1; 2,6; 3) -7; 0; 4) 1; 4. **35.22.** 1) $(6a^3 - b)(b - 4a^3)$; 2) $8p(2p - 3m^2)$; 3) $(5x + 9y)(9x - 5y)$; 4) $4c(a + b)$; 5) $(a^2 + a - c^4) \times (a^2 + a + c^4)$; 6) $4b(1 - 5a)$. **35.23.** 1) $3(a^2 - 3b)(3a^2 - b)$; 2) $3(m^4 - c) \times (3c - m^4)$; 3) $4(4b - a)(3a - b)$; 4) $4t(x - y)$. **35.24.** 1) 2; 1,5; 2) -3; 3; 3) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 4) немає коренів. **35.28.** Швидкість корабля більша за швидкість велосипедиста. **35.31.** *Порада.* Використати зважену крупу як гирку.

§ 36

36.15. 1) $5a + 8$; 2) $9b - 27$; 3) 65; 4) $4b^6 - 4b^3 - 2$. **36.16.** 1) $4a - 64$; 2) 35; 3) $125 + b - 2b^2$; 4) $a^6 - 1$. **36.17.** 1) −7; 2) −0,1. **36.18.** 1) 8; 2) −0,2; 3) 0,5; 4) −2. **36.19.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) 2. **36.20.** 1) $9(a^2 + 3a + 3)$; 2) $(x - 2)(x^2 - 10x + 28)$; 3) $(2p - 1)(13p^2 + 5p + 1)$; 4) $(5x - 1) \times (13x^2 + 2x + 1)$. **36.21.** 1) $(2a + 1)(a^2 + a + 1)$; 2) $(b - 4) \times (b^2 - 2b + 4)$; 3) $(4b + 1)(31b^2 - 7b + 1)$; 4) $(5a + 2)(13a^2 - 4a + 4)$. **36.23.** Так. **36.26.** 50 зошитів і 10 зошитів. **36.27.** 132 грн. **36.29.** 7 курей.

§ 37

37.16. 1) $(a - 3)(a + 3)(a^2 + 9)$; 2) $(2 - c)(2 + c)(4 + c^2)$; 3) $(x - 1) \times (x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$; 4) $(a - b^2)(a + b^2)(a^2 + b^4)$. **37.18.** 1) 0; −1; 1; 2) 0; −4; 4; 3) 0; 4) 0; −2. **37.19.** 1) 0; −1; 1; 2) 0; −6; 6; 3) 0; 4) 0; 1. **37.20.** 1) $7(a - 1)(b + 3)$; 2) $6(m - 2)(n - 5)$; 3) $-a(b + 3)(c + 4)$; 4) $a(a + 1)(a - b)$. **37.21.** 1) $3(15 - b)(2 - a)$; 2) $-3(n + 3)(m + 6)$; 3) $a^3(a + 1)(x + 1)$; 4) $ap(p^2 + 1)(a - 3)$. **37.22.** 1) $(a + b - 4) \times (a + b + 4)$; 2) $(a - x - y)(a + x + y)$; 3) $(p + 5 - x)(p + 5 + x)$; 4) $(p - x + 10)(p + x - 10)$. **37.23.** 1) $(x + y - 5)(x + y + 5)$; 2) $(m - a + b)(m + a - b)$; 3) $(m - 4 - a)(m - 4 + a)$; 4) $(m - b - 4) \times (m + b + 4)$. **37.24.** 1) $(a - 9)(a + 10)$; 2) $(a + m)(m - a - 1)$; 3) $(x - y)(x + y - 1)$; 4) $(x - y)(x + y + 1)$; 5) $(a - 3b)(1 + a + 3b)$; 6) $(4m + 5n)(4m - 5n - 1)$. **37.25.** 1) $(a - b)(a + b - 1)$; 2) $(p + b) \times (p - b - 1)$; 3) $(4x - 5y)(4x + 5y + 1)$; 4) $(10m - 9n) \times (10m + 9n - 1)$. **37.26.** 1) $(m - 3)(p - 1)^2$; 2) $(1 - a)(1 + a)(1 - 2b)^2$. **37.28.** 1) $(a - b)(b - 1)(b + 1)$; 2) $(x - a)(x + a)(a + 7)$; 3) $(p + q) \times (p - 2)(p + 2)$; 4) $(a + 5)(a - m)(a + m)$. **37.29.** 1) $(m + n) \times (m^2 - mn + n^2 + 1)$; 2) $(a - b)(1 - a^2 - ab - b^2)$; 3) $(a + 2) \times (a^2 - 3a + 4)$; 4) $(2p - 1)^3$. **37.30.** 1) $(m + n)(m - 1)(m + 1)$; 2) $(b - 3)(a - 2)(a + 2)$; 3) $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + 1)$; 4) $(x + 1) \times (x^2 - x - 4)$. **37.31.** 1) 5; 1; −1; 2) 2; −2. **37.32.** 1) 1; −1; 2) 1; 3; −3. **37.33.** 1) $4(2a + b)(a + 2b)$; 2) $-(3y + 22m)(33y + 2m)$. **37.34.** 1) $(a^2 - 2ab + 4b^2)(a + 2b + 1)$; 2) $(m - 2n)(m^2 + 2mn + 4n^2 + m - 2n)$. **37.35.** 1) $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + a - b)$; 2) $(c + d - x - y)(c + d + x + y)$. **37.36.** 1) $(x + 1)(x - 3)$; 2) $(x - 1) \times (x + 9)$; 3) $(x + 1)(x - 4)$. **37.39.** −16. **37.40.** 8 год. **37.41.** Прибуток 2100 грн. **37.43.** Через 6 хв.

Вправи для повторення теми 7

4. 25. **5.** Так. **6.** 1) $x^2 + 2xy + y^2 + 2xa + 2ya + a^2$; 2) $b^2 - 2bc +$

$+ c^2 - 2bd + 2cd + d^2$; 3) $m^2 + 2mn + n^2 + 4m + 4n + 4$; 4) $a^2 + 6a + 9 - 2ac - 6c + c^2$. **10.** 1) $\frac{1}{3}$. *Порада.* Помножити обидві частини рівняння на 3; 2) $-\frac{1}{5}$. **12.** 2) *Порада.* Вираз тотожно дорівнює виразу $(a - 2 + m)^2$. 3) *Порада.* Вираз тотожно дорівнює виразу $(a + b + 4)^2$. **17.** 1. **20.** 1) $-\frac{b}{a}$; $\frac{b}{a}$; 2) $0{,}3a$; $-0{,}3a$; **21.** 1) Так; 2) так. **22.** 1) $(5 - 4x)(5 + 4x)$; 2) $(3x - 5)(3x + 5)$. *Порада.* Спочатку спростіть вирази. **29.** 1) $9(a - b)(a^2 + ab + b^2)$; 2) $2(n + 3) \times (m - b)$; 3) $\left(\frac{1}{3}p - 1\right)\left(\frac{1}{3}p + 1\right)\left(\frac{1}{9}p^2 + 1\right)$; 4) $(m - 2n - 5)(m - 2n + 5)$; 5) $(b - 6)(b + 7)$; 6) $(m - n)(m - 2)(m + 2)$. **30.** 1) $m^2(a - 1)(m - 1) \times (m + 1)$; 2) $a(b - 1)(a - 1)(a + 1)$; 3) $(b + 1)(b - 1)^2$; 4) $(x - 3) \times (x^3 + 4x^2 + 3x + 9)$.

Тема 8

§ 38

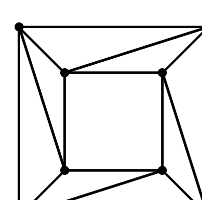
38.17. 30°. **38.18.** 35°. **38.19.** $\angle L = 60°$; $\angle N = 40°$; $\angle M = 80°$. **38.20.** $\angle C = 80°$; $\angle B = 50°$; $\angle A = 50°$. **38.23.** $\angle A = 45°$; $\angle B = 60°$; $\angle C = 75°$. **38.24.** 36°; 54°; 90°. **38.25.** 50°; 65°; 65°. **38.26.** 52°; 52°; 76°. **38.29.** Корольов. **38.30.** 48°; 96°. **38.33.** 55°. **38.34.** 30°. **38.35.** 1) 12°; 12°; 156° або 12°; 84°; 84°; 2) 92°; 44°; 44°. **38.36.** 1) 28°; 28°; 124° або 28°; 76°; 76°; 2) 106°; 37°; 37°. **38.38.** 36°; 72°; 72° або 45°; 45°; 90°. **38.39.** 55°; 55°; 70° або 65°; 65°; 50°. **38.40.** 5 см. **38.43.** 20° або 100°.

§ 39

39.18. Прапор. **39.19.** 1) 50°; 70°; 2) 30°; 90°. **39.20.** 62°; 62° і 56° або 62°; 59°; 59°. **39.21.** 138°; 21°; 21°. **39.23.** 3 : 1 : 2. **39.24.** 17 : 16 : 15. **39.26.** 30° і 60°. **39.27.** 4,2 см; 8,4 см; 10,2 см.

§ 40

40.15. Костенко. **40.16.** 1) 18° і 72°; 2) 37° і 53°; 3) 50° і 40°. **40.17.** 71°. **40.18.** 113°. **40.20.** 58° і 32°. **40.21.** 40° і 50°. **40.23.** 20 см; 10 см. **40.24.** 6 см. **40.25.** 35° і 55°. **40.26.** 72° і 18°. **40.28.** 32°; 52° і 96°. **40.29.** 24 см. **40.32.** Див. мал.



§ 41

41.7. Ні. **41.8.** 27 см. **41.9.** 5,7 см або 6,7 см. **41.10.** 1) Так; 2), 3) ні. **41.11.** 1), 2) Ні; 3) так. **41.12.** Ні. **41.13.** Ні. **41.14.** $\angle A = 39°$; $\angle B = 117°$; $\angle C = 24°$. **41.17.** 1) Так; 2) ні.

Вправи для повторення теми 8

4. 35°. **5.** 48°; 72°. **6.** 60°. **7.** 82°; 48°. **8.** 1) 30°; 2) 70°. **9.** 1) 80°; 2) 32°. **12.** 1) Так; 2), 3) ні. **13.** 108°. **15.** 40°; 56°; 84°. **16.** 100°; 40°; 40°. **22.** 27°; 63°. **23.** 30° і 60°. **24.** 10 см. **25.** 45°. **26.** 16 см. **27.** $2a$ см. **28.** 20 см; 10 см. **31.** 4 см і 13 см. **32.** Ні. **33.** 1) 4 см або 7 см; 2) 5 см; 3) 12 см. **34.** 9 см; 21 см; 21 см.

Тема 9

§ 42

42.31. 1) 0,6; 2) 2. **42.32.** 1) Якщо $x = -5$, то $y = -23$; якщо $x = 0$, то $y = 0$; якщо $x = 3$, то $y = -6$; 2) якщо $x = -5$ або $x = 0$, то $y = 7$; якщо $x = 3$, то $y = 9$. **42.33.** 1) Якщо $x = -2$, то $y = -16$; якщо $x = 0$, то $y = -2$; якщо $x = 4$, то $y = -12$; 2) якщо $x = -2$ або $x = 0$, то $y = 3$; якщо $x = 4$, то $y = -16$. **42.34.** 4. **42.35.** 0. **42.37.** 10 см.

§ 43

43.5. 1) 0; 2) 2; 3) 0; 4) 5. **43.6.** 1) 0; 2) 3; 3) 0; 4) −2. **43.9.** 1), 4) Так; 2), 3) ні. **43.10.** 1), 3) Так; 2), 4) ні. **43.15.** 1) 0; 4; 2) −4; 4; 3) −5; 0. **43.16.** 1) 0; −2; 2) −5; 5; 3) 0; 4. **43.19.** Ні. **43.20.** 1) 2 кг; 2) 6 кг; 3) 1 кг; 4) 6 л. **43.23.** 1) 450 л.

§ 44

44.30. $k = -1{,}5$. **44.31.** $l = -3$. **44.32.** 1) (0; −20); $\left(13\frac{1}{3};\ 0\right)$; 2) (0; 5); (20; 0). **44.33.** 1) (0; −40); (200; 0); 2) (0; 18); (54; 0). **44.34.** $y = 100x$. **44.35.** $y = -9x$. **44.39.** $k = 0$; $l = 5$. **44.40.** $k = 0$; $l = -5$. **44.41.** I: $y = -3x$; II: $y = x + 3$; III: $y = 3x$. **44.42.** $-5 \leqslant y \leqslant 9$. **44.43.** 1) (2; 2); 2) (1,2; −1,2); 3) (3; 6). **44.48.** 1) 0; 2) −1. **44.49.** 1) $16m^2 - 3\frac{3}{4}$; 2) $25y^2 + 4ay$. **44.50.** 13 зошитів. **44.52.** 1) 16 %; 2) 18 %.

Вправи для повторення теми 9

11. $k = -3$; $l = 10$.

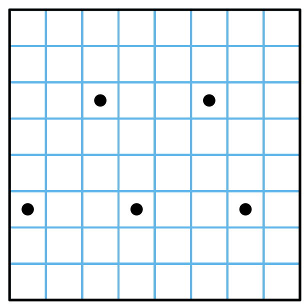
Тема 10

§ 45

45.17. 16°. **45.18.** 36°. **45.19.** 1) Безліч; 2) дві. **45.20.** 10 см. **45.21.** 9 см. **45.24.** 2 см і 3,5 см. **45.26.** 135°. **45.29.** 16.

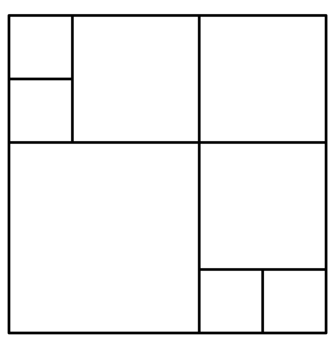
§ 46

46.11. 41°. **46.12.** 106°. **46.13.** 60°. **46.14.** 7 см. **46.16.** 12 см. **46.18.** Див. мал.



§ 47

47.12. $AP = AF = 7$ см; $BP = BM = 1$ см; $CM = CF = 5$ см. **47.13.** 10 см; 12 см; 14 см. **47.14.** 20 см. **47.15.** 38 см. **47.17.** 9°. **47.19.** Не обов'язково, див. мал.



§ 48

48.6. 1), 2) Безліч; 3) одне. **48.20.** 8 см.

§ 49

49.7. 108°. **49.8.** 116°. **49.9.** 120°; 60°. **49.10.** 30°. **49.11.** 80°. **49.13.** 40°. **49.15.** 40°, 70°, 70°, або 40°, 40°, 100°, або 140°, 20°, 20°. **49.16.** 50°, 65°, 65°, або 50°, 50°, 80°, або 130°, 25°, 25°. **49.17.** 20°, 40°, 120°. **49.18.** 10 см. **49.20.** 11,52 м. **49.23.** Так.

§ 50

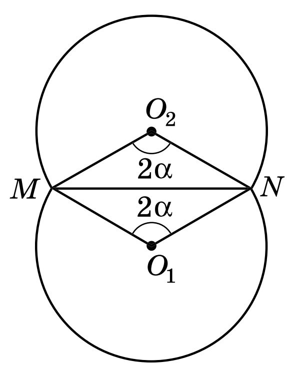
50.8. 8 дм і 20 дм. **50.9.** 6 см і 9 см. **50.10.** 1) Зовнішній дотик кіл; 2) кола не перетинаються; 3) внутрішній дотик кіл; 4) кола перетинаються. **50.11.** 1) Кола не перетинаються; 2) внутрішній дотик кіл; 3) кола перетинаються; 4) зовнішній дотик кіл. **50.14.** 2 см; 3 см; 5 см. **50.15.** 40 см. **50.19.** 17.

§ 51

51.36. *Порада*. Знайдіть кут при основі трикутника. Для цього побудуйте даний кут, суміжний з ним, і поділіть останній навпіл. **51.37.** Див. пораду до задачі 51.36. **51.46.** *Порада*. Побудуйте прямокутний трикутник, у якого один з катетів удвічі менший від гіпотенузи. **51.52.** 92°. **51.54.** 15 см і 45 см.

Вправи для повторення теми 10

4. $\angle AKB = 90°$; $\angle KBA = 25°$; $\angle KAB = 65°$. **7.** 120°. **8.** 18°; 72°; 90°. **9.** 30°; 30°; 120°. **10.** 1,5 см. **13.** Ні. **19.** 20 см; 25 см; 25 см. **26.** 2 см. **28.** 90°; 54°; 90°; 126°. **29.** *Порада*. Шукане геометричне місце точок – дві дуги кіл із центрами O_1 і O_2, з яких MN видно під кутом 2α (див. мал.). **31.** 4 см; 7 см. **32.** 40 см; 28 см. **33.** Зовнішній дотик двох кіл. **34.** 10 см і 6 см або 40 см і 24 см.



Тема 11

§ 52

52.19. $p = 3$. **52.20.** $n = 3$. **52.21.** 1) $m = -35$; 2) $m = 15$. **52.22.** 1) $d = 19$; 2) $d = -2$. **52.24.** (5; 5). **52.25.** 1) $p = 2$; 2) $p = 21$. **52.26.** 1) Таких пар натуральних чисел немає; 2) (1; 1); 3) (8; 1), (1; 2); 4) (1; 7), (7; 1). **52.29.** 1) 6; 2) 13. *Порада*. $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$; 3) 25; 4) −19. **52.30.** 4200 грн.

§ 53

53.16. 1) $m = 0$; 2) $m = 10$; 3) $m = -25$. **53.17.** 1) (0; −3), (−21; 0); 2) (0; −5), (3; 0). **53.18.** 1) (0; 18), (6; 0); 2) (0; −14); (−4; 0). **53.22.** Графіки не перетинаються. **53.26.** 80 км/год; 60 км/год. **53.27.** 1) ≈ 4 %; 2) ≈ 9 %. **53.29.** *Порада*. Розгляньте три випадки: 1) $x \leqslant 0$; 2) $0 < x < 1$; 3) $x \geqslant 1$.

§ 54

54.11. $a = -8{,}5$; $b = -0{,}2$. **54.12.** $a = 0{,}7$; $b = 10{,}5$. **54.13.** 1) (2; 3); 2) (−1; 2); **54.14.** 1) (1; 4); 2) (3; −2). **54.22.** $(x;\ 1{,}5x - 2{,}5)$, де x – будь-яке число; 2) немає розв'язків. **54.27.** *Порада*. Виділити повний квадрат. **54.28.** $P = 30 + 6s$. **54.30.** 1.

§ 55

55.8. (3; 1). **55.9.** (4; 1). **55.10.** 1) (4; −3); 2) (2; −5); 3) $a = -5$; $b = -2$; 4) $m = 4$; $n = 0{,}5$. **55.11.** 1) (−3; 4); 2) (2; −7); 3) $p = 7$; $q = 3$; 4) $a = 1{,}5$; $b = -6$. **55.12.** 1) (8,5; 2,5); 2) $\left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right)$. **55.13.** 1) (1,5; 2,5); 2) $\left(\frac{1}{6};\ -1\frac{1}{6}\right)$. **55.14.** 1) (46,5; −25,5); 2) (6,5; 2). **55.15.** 1) (22,5; 7,5); 2) (45; 1). **55.16.** (4; 1). **55.17.** (2; −3). **55.19.** $k = \frac{1}{3}$; $l = -2$. **55.20.** $y = 2{,}5x + 1$. **55.21.** 1) $m = 2$; 2) $m = 4$.

§ 56

56.13. 1) (−1; 1); 2) $a = 2$; $b = -1$; 3) $m = 3$; $n = 2$; 4) $\left(-\frac{1}{7};\ \frac{1}{2}\right)$. **56.14.** 1) (2; 1); 2) (0,4; 7). **56.15.** 1) (1; −2); 2) $a = 0{,}4$; $b = 0{,}1$. **56.16.** 1) (−2; 2); 2) $m = 0{,}8$; $n = -1{,}5$. **56.17.** 1) $y = \frac{3}{8}x - 5{,}5$; 2) $y = -\frac{2}{3}x + 4$. **56.18.** $y = -0{,}25x + 4$. **56.19.** 1) (−1; 3); 2) (3; −2). **56.20.** 1) (1; −2); 2) (−2; −8). **56.21.** 1) Розв'язків немає; 2) безліч розв'язків. **56.26.** Ні, оскільки при цілих числах x і y значення виразу $y^2 - x^2$ є непарним або кратним числу 4.

§ 57

57.6. 10 зошитів; 6 зошитів. **57.7.** 224 грн, 208 грн. **57.8.** 84 грн, 28 грн. **57.9.** 10 см, 8 см, 8 см. **57.10.** 18 м; 10 м. **57.11.** 18 км/год; 2 км/год. **57.12.** 17 км/год; 3 км/год. **57.13.** 42 км/год; 14 км/год. **57.14.** 24 і 38. **57.15.** 32 і 40. **57.16.** 32 роки; 10 років. **57.19.** 80 яблук; 15 яблук. **57.20.** 25; 20.

57.21. 90; 110. **57.22.** 12 кг; 8 кг. **57.23.** 10 кг; 15 кг. **57.24.** 30 л; 45 л. **57.25.** 24 книжки; 33 книжки. **57.26.** 96 грн, 104 грн. **57.27.** 180 тортів; 120 тортів. **57.28.** $\frac{5}{18}$. **57.29.** $\frac{7}{10}$. **57.30.** 50 г; 150 г. **57.31.** 156 г; 104 г. **57.32.** 36 років; 8 років. **57.33.** 45. **57.38.** 20 корів.

Вправи для повторення теми 11

6. $(-2; 0)$; $(-1; 1)$; $(-1; -1)$; $(0; 2)$; $(0; -2)$; $(1; 1)$; $(1; -1)$; $(2; 0)$. **15.** 1) $a = 3$; 2) $a \neq -14$. **17.** 1) $(-3; 2)$; 2) $(5; -2)$. **18.** 1) $\left(7\frac{1}{3};\ 2\frac{3}{5}\right)$; 2) $(4; 3)$. **19.** $(-28; 41)$. **20.** 1) $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$; 2) $(4; 2)$. **23.** Якщо $a = 2$, то безліч розв'язків; якщо $a \neq 2$, то єдиний розв'язок. **25.** 1) $(1; 2)$; 2) $(-6; -2)$. **26.** 1) $(1; -2)$; 2) $(0{,}5; -1{,}5)$. **27.** 1) $(2; 7)$; 2) $\left(3\frac{7}{37};\ -3\frac{5}{37}\right)$. **28.** 1) $(x; -2 - 2x)$, де x – будь-яке число; 2) система не має розв'язків. **29.** 1) Ні; 2) так; $(2; -1)$ – розв'язок системи. **30.** 1) $y = 1{,}25x - 5$. **31.** 1) $(4; 5)$; 2) $(-2{,}5; 0)$. **32.** 1) $a = 4$; 2) $a \neq 4$; 3) не існує. **33.** 1) $b = -3$; 2) якщо $b \neq -3$, то $x = 1{,}25$; $y = 0$. **34.** 50 км/год; 60 км/год. **35.** Порція млинців – 54 грн, салат – 45 грн. **36.** 28 км/год; 2 км/год. **37.** 18 деталей за годину виготовляє майстер і 12 – учень. **38.** 80 груш; 100 груш. **39.** 70 і 36. **40.** 10; 50 і 80. **41.** 2352 см^2. **42.** 35. **43.** 15 л і 10 л. *Порада.* Позначити x л – у першому бідоні, y л – у другому. Тоді маємо систему $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 20, \\ y + \frac{1}{3}x = 15. \end{cases}$

Задачі підвищеної складності з алгебри

1. -1; 0; 2. **6.** **2.** 7583. *Порада.* Позначити шукане число $\overline{7abc}$, після чого $\overline{abc} = x$. **4.** 1) Рівняння не має розв'язків; 2) $x = 3$. **5.** 1) Якщо $a = 0$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 0$, то рівняння має єдиний розв'язок; 2) якщо $a = 0$, то рівняння має безліч розв'язків; якщо $a \neq 0$, то рівняння має єдиний розв'язок. **6.** 1) Для всіх a: $x = \frac{15 + a}{2}$; 2) для всіх a: $x = \frac{5a - 9}{5}$; 3) якщо $a = 3$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 3$, то $x = \frac{7}{a - 3}$;

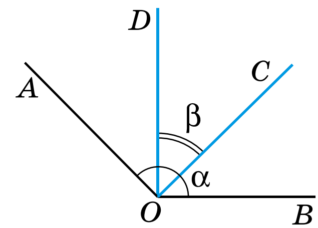
5) якщо $a = 1$, то x – будь-яке число; якщо $a \neq 1$, то $x = 1$; 6) для всіх значень a: $x = -\frac{2a}{3}$. **7.** 1) $a = -4$; 2) $a = -7$. **8.** 21 м/с; 147 м. *Порада*. Позначивши x м/с – швидкість поїзда, матимемо рівняння $25x = 378 + 7x$. **9.** 10 м/с; 99 м. *Порада*. Нехай x м/с – швидкість поїзда, тоді його довжина $9x + 9$. Одержимо рівняння $27x = (9x + 9) + 171$. **10.** 2 год; 6 год. **11.** 30°, 30° і 120° або 20°, 80° і 80°. **12.** 26 рулонів. **13.** 520 г. **14.** 2401. **15.** На 38 %. **16.** $\frac{10^{15}+1}{10^{16}+1}$. **17.** 2018^2. **19.** $(m + n)^2 + (m - n)^2$. **20.** 1) $x - 5$; 2) $x + 3$. **21.** 1) $(a - 1)^2(b^2 + a^2 + 2a + 1)$; 2) $(1 - t)^3$; 3) $(x - 1) \times (x + 1)(x^4 - 2x^2 + 4)$. *Порада*. $x^6 - 3x^4 + 6x^2 - 4 = (x^6 + 8) - 3(x^4 - 2x^2 + 4)$; 4) $(m - n + 4)(m + n - 2)$. *Порада*. $2(m + 3n) + (m - n) \times (m + n) - 8 = (m^2 + 2m + 1) - (n^2 - 6n + 9)$; 5) $(a - b) \times (a^2 + ab + b^2 + a + b)$; 6) $2(2x - 1)(2x^2 + 2x + 1)$. *Порада*. $8x^3 + 4x^2 - 2 = (8x^3 - 1) + (4x^2 - 1)$. **22.** Ні. **23.** $2^{128} - 1$. **24.** *Порада*. Розглянути вираз $\frac{(a^2+ab+b^2)+(b^2+bc+c^2)}{2}$ та використати, що $b = \frac{a+c}{2}$. **26.** *Порада*. $\overline{abcabc} = 100\,000a + 10\,000b + 1000c + 100a + 10b + c = 100\,100a + 10\,010b + 1001c = 1001 \times (100a + 10b + c) = 1001\overline{abc}$. **28.** 729. **30.** *Порада*. Довести, що $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 10(3^n - 2^{n-1})$. **31.** $(x + y)^3 + (x - y)^3$. **33.** $y = 4\,074\,341$. **34.** *Порада*. $(2n + 2)^3 - (2n)^3 = 24n(n + 1) + 8$. **35.** 1) $(y^2 + y + 1)(y^3 - y^2 + 1)$. *Порада*. $y^5 + y + 1 = y^5 - y^2 + y^2 + y + 1 = y^2(y^3 - 1) + y^2 + y + 1$; 2) $(m^2 + m + 1)(m^2 - m + 1)$. *Порада*. $m^4 + m^2 + 1 = m^4 - m + m^2 + m + 1$; 3) $(x^2 - x + 3)(x^2 + x + 3)$. *Порада*. $x^4 + 5x^2 + 9 = (x^4 + 6x^2 + 9) - x^2$; 4) $(n^2 - 2n + 2) \times (n^2 + 2n + 2)$. *Порада*. $n^4 + 4 = (n^4 + 4n^2 + 4) - 4n^2$; 5) $(x^2 - 2b^2) \times (x^2 + 2a^2 + 2b^2)$. *Порада*. $x^4 + 2a^2x^2 - 4a^2b^2 - 4b^4 = (x^4 + 2a^2x^2 + a^4) - (a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4)$; 6) $(m + 1)(m^2 - m - 1)$. *Порада*. $m^3 - 2m - 1 = (m^3 + m^2) - (m^2 + 2m + 1)$; 7) $(m + 2) \times (m^2 - 2m - 1)$. *Порада*. $m^3 - 5m - 2 = (m^3 + 8) - (5m + 10)$ або $m^3 - 5m - 2 = (m^3 - 4m) - (m + 2)$; 8) $(x + y)(x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3)$. *Порада*. $x^4 - 2x^3y - 6x^2y^2 - 4xy^3 - y^4 = (x^4 - y^4) - (2x^3y + 2x^2y^2) - (4x^2y^2 + 4xy^3)$. **36.** $5^{15} < 3^{23}$. *Порада*. $5^{15} = 5 \cdot (5^2)^7$, $3^{23} = 9 \cdot (3^3)^7$. **38.** 1) Так; 2), 3) ні. **39.** 1), 2) Ні; 3) так. **40.** $(-1; -1)$ і $(2; -5)$. **41.** 25 %. **42.** 1) Ні; 2), 3), 4) так. **43.** Ні. **44.** 1) Один; 2) жодного; 3) один; 4) безліч. **45.** 5 або 10. **46.** 1) Прямі $x = -1$ і $x - 2y = 0$; 2) прямі $x = 0$ і $y = x$; 3) прямі $x = 2$ і $x = -2$; 4) пря-

мі $y = 3$ і $y = -3$; 5) $y = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x < 0, \\ 2x, \text{ якщо } x \geqslant 0; \end{cases}$ 6) пряма $x = 0$ та промені $y = 1$ для $x \geqslant 0$ і $y = -1$ для $x \leqslant 0$. **48.** 1) Так, (2; 0), (−2; 0); 2) так, (0; 4). **49.** (8; 2). **50.** 1) (3; 0); 2) (0; −5). **51.** 69 і 64. *Порада.* $\overline{6x} \cdot \overline{6y} = \overline{x6} \cdot \overline{y6}$, звідки $xy = 36$. **52.** У 1990 р. *Порада.* Нехай Олесь народився в $\overline{19xy}$ році. Тоді в 2009 р. йому буде $2009 - \overline{19xy}$, що за умовою дорівнює $(1 + 9 + x + y)$. **53.** $a = 10$. **54.** 1) $m = 2$ – немає розв'язків; $m \neq 2$ – єдиний розв'язок; 2) $m = 3$ – безліч розв'язків; $m \neq 3$ – немає розв'язків; 3) $m = 1$ – безліч розв'язків; $m \neq 1$ – єдиний розв'язок. **55.** $a = -7$. **56.** 1) $x = 5$, $y = 3$, $z = 0$. *Порада.* Додати почленно всі рівняння системи; 2) $x = -1$, $y = 8$, $z = -3$. **57.** $a = -2$; $b = -1$; $-8x^5 + 11x^2 + 11x - 8$. **58.** 1) (1; 2), (0,6; 2,4); 2) (2; 2), (3; 3), (−1; 2), (−1; 7); 3) (2; 2), (1; −1). **59.** 1) (2; 6); 2) (−4; −8); 3) $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$; 4) (−10; −5); 5) (2; −1); 6) (−3; −3). **60.** $a = 52$; $b = 57{,}2$; $c = 44$. **61.** Брату зараз 10 років, сестрі – 6 років. **62.** 46. **63.** 742. **64.** 240 і 360. **65.** 500 кг піску; 420 кг цементу. **66.** 5 см; 15 см; 12 см. **67.** 26 см. **68.** 7 кг першого зливка, 3 кг другого зливка. **69.** 12 км. **70.** 630 л; 840 л. **71.** Швидкість автобуса 45 км/год, таксі – 75 км/год. **72.** Швидкість кожного з автобусів 42 км/год, велосипедистки – 18 км/год. **73.** 4,5 км/год; 16,5 км/год. *Порада.* Якщо x км/год – швидкість туриста, а y км/год – швидкість велосипедиста, то маємо систему $\begin{cases} 1\frac{5}{6}x = \frac{1}{2}y, \\ 3\frac{1}{3}x + 2y = 48. \end{cases}$ **74.** 18 км/год; 42 км/год; 72 км/год. *Порада.* Якщо позначити швидкість велосипедистки x км/год, швидкість першого автобуса – y км/год, тоді швидкість другого – $\frac{7}{12}y$ км/год. Матимемо систему $\begin{cases} 1\frac{1}{3}(x + y) = 120, \\ 2\left(x + \frac{7}{12}y\right) = 120. \end{cases}$ **75.** 30 м/с і 20 м/с.

Задачі підвищеної складності з геометрії

2. *Порада.* $\angle AOK = 50°$. **5.** $BC < AB$. **6.** 1) $\angle AOL = \angle COP$; 2) $\angle LOP = \angle AOC$. **8.** 1) Так, наприклад, 1° і 179°; 2) ні. **9.** 1) 108° і 72°; 2) 80° і 100°. **10.** Однаково, по 6. **11.** 60° або $\left(77\frac{1}{7}\right)^{\circ}$.

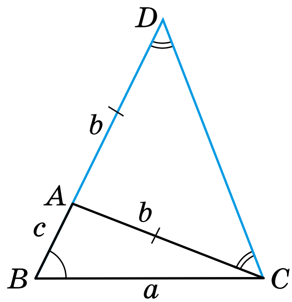
12. *Розв'язання.* Нехай дано тупий $\angle AOB = \alpha$ (мал. 1). $OA \perp OC$, $OB \perp OD$, $\angle COD$ – гострий, $\angle COD = \beta$.



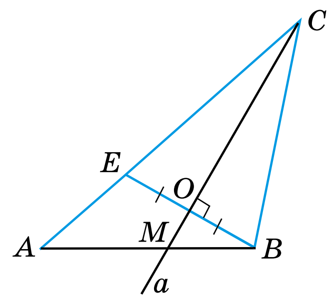
Мал. 1

1) $\angle AOD = \angle AOC - \angle DOC$; $\angle AOD = 90° - \beta$.
2) $\angle BOC = \angle DOB - \angle DOC$; $\angle BOC = 90° - \beta$.
3) $\angle AOB = \angle AOD + \angle DOC + \angle COB$.
Тоді $\alpha = 90° - \beta + \beta + 90° - \beta$, звідки $\alpha + \beta = 180°$, що й потрібно було довести. **13.** Ні. **14.** Так. **15.** 80°; 100°; 80°; 100°. **16.** 16 см. *Розв'язання.* Нехай a см, b см, c см – сторони трикутника, а P см – його периметр. $P = a + b + c$. За умовою $P - a = 10$, $P - b = 13$, $P - c = 9$. Маємо $a + b + c - a = 10$, тобто $b + c = 10$. Аналогічно $a + c = 13$, $a + b = 9$. Маємо систему: $\begin{cases} b + c = 10, \\ a + c = 13, \\ a + b = 9. \end{cases}$ Склавши почленно всі три рівняння, одержимо: $2a + 2b + 2c = 32$; $2(a + b + c) = 32$; $a + b + c = 16$. Отже, периметр трикутника дорівнює 16 см. **18.** $90 - \frac{\alpha}{2}$. **19.** 90 см. *Розв'язання.* 1) Оскільки $\triangle ABC = \triangle CDA$, то $BC = AD$. 2) $CO = BC - BO$, $AO = AD - DO$. Але $BC = AD$, $BO = DO$, тому $AO = OC$. 3) Позначимо $AO = OC = x$ см, тоді $AC = (x - 30)$ см. 4) Периметр $P_{\triangle ABC} = 100$ см. Маємо: $AB + BC + CA = 100$, $AB + BO + OC + CA = 100$, $40 + 10 + x + x - 30 = 100$. Звідки $x = 40$ (см). 5) $P_{\triangle AOC} = x + x + x - 30 = 3x - 30 = 3 \cdot 40 - 30 = 90$ (см). **24.** 1) Гострокутний; 2) гострокутний. **25.** 45°. **26.** 36°, 36°, 108°. **29.** *Порада.* Розгляньте трикутники AKC і BKC. **30.** $\frac{a}{3}$ см. **31.** 85°. **32.** $\angle C = 60°$. *Порада.* $\triangle ACA_1 = \triangle BAB_1$ (за двома катетами). **33.** *Порада.* Розгляньте коло із центром у точці B, радіус якого BA. **34.** a см. **35.** $2m$ см. *Розв'язання.* За властивістю відрізків дотичних, проведених до кола з однієї точки, маємо $AN = AM = m$ см, $BM = BK$ і $CK = CN$. Нехай P см – периметр трикутника ABC. Тоді $P = AB + BC + CA = AB + BK + KC + CA = AB + BM + CN + CA = (AB + BM) + (AC + CN) = AM + AN = m + m = 2m$ (см). **36.** 10 см. **39.** *Порада.* Оскільки $54° \cdot 3 = 162°$,

то можна побудувати кут 18° ($18^\circ = 180^\circ - 162^\circ$). **41.** *Порада*. Побудуйте $\triangle BCD$, у якого $\angle DBC = \angle B$, $BD = AB + AC$ (мал. 2). Тоді точка A визначається з умови $\angle ADC = \angle ACD$. **42.** *Порада*. Слід розглянути $\triangle CMN$, у якого $MN = P$, $\angle M = \frac{1}{2}\angle A$, $\angle N = \frac{1}{2}\angle B$. **43.** *Порада*. Нехай пряма a перетинає AB у точці M. Побудуйте відрізок $BE \perp a$, $BO = OE$ (мал. 3). Шукана точка C є точкою перетину прямих a і AE. **44.** Жодного, один або два розв'язки.



Мал. 2



Мал. 3

Додаткові теми

23. *Порада*. Шукана точка – точка перетину серединних перпендикулярів до відрізків MN і CD. **24.** *Порада*. Нехай дано кола із центрами O_1 і O_2, радіуси яких r_1 і r_2, а потрібно побудувати коло радіуса r, що дотикається до заданих. Побудуйте кола із центрами в точках O_1 і O_2, радіуси яких $r_1 + r$ та $r_2 + r$ відповідно. **26.** *Порада*. Шукана точка – точка перетину серединного перпендикуляра до AB та прямої a. **33.** Коло, діаметром якого є гіпотенуза трикутника без точок, що є кінцями гіпотенузи. **34.** Так, вона дорівнює 9 см. **35.** 1 : 2. **36.** $\angle O_1AO_2 = 60^\circ$; $\angle AO_1B = 120^\circ$. **38.** 40.

Відповіді до завдань «Домашня самостійна робота»

№ завдання / № роботи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
7	Г	Б	Г	В	В	А	Г	Б	Г	В	А	В	1–Б; 2–А; 3–Г
8	В	А	В	Б	Г	Г	Б	Г	А	Б	А	В	1–Б; 2–Г; 3–В
9	Б	А	В	Г	В	А	Г	Б	В	А	Г	Б	1–В; 2–А; 3–Г
10	Б	В	Г	А	Б	Б	А	Б	В	В	А	В	1–В; 2–А; 3–Г
11	В	Б	Г	Б	А	Г	Б	А	Б	Б	В	А	1–В; 2–Г; 3–А

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

АЛГЕБРА

ГЕОМЕТРІЯ

ЗМІСТ

Авторські відеоуроки з алгебри відповідно до тем цього підручника можна переглянути за посиланням *https://cutt.ly/0w8DhUM4* або QR-кодом.

Авторські відеоуроки з геометрії відповідно до тем цього підручника можна переглянути за посиланням *https://cutt.ly/jw8Dhib3* або QR-кодом.

Відомості про користування підручником

№ з/п	Прізвище та ім'я учня / учениці	Клас	Навчальний рік	Оцінка	
				на початку року	в кінці року
1					
2					
3					
4					
5					

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович

МАТЕМАТИКА
(інтегрований курс)

Підручник для 7 класу
закладів загальної середньої освіти

у 2-х частинах

Частина 2

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

**Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено**

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

У підручнику використано ілюстративний матеріал з відкритих джерел інтернету, зокрема сайтів *vecteezy.com*, *depositphotos.com*. Усі матеріали в підручнику використано з навчальною метою відповідно до законодавства України про авторське право і суміжні права.

Редактор *Наталія Дашко*
Обкладинка *Олександра Павленка*
Макет, художнє оформлення *Олександра Павленка*
Комп'ютерна верстка *Юрія Лебедєва*
Коректори *Інна Борік, Олена Симонова*

Формат 70×100/16.
Ум. друк. арк. 20,8. Обл.-вид. арк. 18,05.
Тираж 14748 пр. Вид. № 0038.
Зам. № 24-04-1201.

ТОВ «Генеза», вул. Генерала Алмазова, б. 18/7 (літ. В), офіс 404,
м. Київ, 01133, Україна. Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 7692 від 24.10.2022.

Віддруковано у ТОВ «ПЕТ»,
вул. Максиміліанівська, 17, м. Харків, 61024.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 6847 від 19.07.2019.