

ГЕОМЕТРІЯ



7
Клас

УДК 514*кл7(075.3)

Г34

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 05.02.2024 № 124)

ВИДАНО ЗА РАХУНОК ДЕРЖАВНИХ КОШТІВ. ПРОДАЖ ЗАБОРОНЕНО

Підручник розроблено за модельною навчальною програмою
«Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти
(авт. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А., Васильєва Д. В.)

Умовні позначення



— попрацюйте в парах



— попрацюйте в групах



— склади розповідь чи задачу



— завдання з логічним навантаженням



— завдання для обговорення в парі



— завдання дослідницького характеру



— завдання з використанням ІКТ

*

— завдання підвищеної складності

21. — завдання, рекомендоване для домашньої роботи

До уваги вчителів!

Підручник підтримано інтерактивними уроками геометрії.

Цифрові додатки та інші додаткові матеріали за посиланням:

<http://inform1.yakistosviti.com.ua/matematyka/heometriia-7>

<http://vse.ee/ciue>



Г34 **Геометрія** : підруч. для 7 класу закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Д. В. Васильєва, Н. Г. Владімірова. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2024. — 240 с. : іл.

ISBN 978-966-983-467-6.

УДК 514*кл7(075.3)

© Бевз Г. П., Бевз В. Г., Васильєва Д. В.,
Владімірова Н. Г., 2023

© Видавничий дім «Освіта», 2024

ISBN 978-966-983-467-6

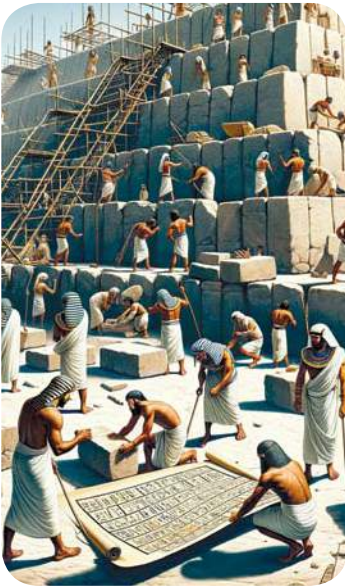
СВІТ ГЕОМЕТРІЇ

Геометрія
виникла
як наука про
вимірювання
землі.



Назва походить
від грецьких слів *гео* — «земля»
і *метрео* — «вимірюю».

Єгипетські й грецькі
землеміри ще 3000 років
тому вимірювали відстані,
кути, визначали площі
земельних ділянок.



Застосовують знання з геометрії інженери, архітектори,
конструктори, мореплавці, астрономи, військові, митці,
художники, кравці, розробники ігор та інші фахівці.



Вивчати систематичний курс геометрії,
розвивати логічне мислення
і просторову уяву допоможе тобі цей підручник.

ЯК ПРАЦЮВАТИ З ПІДРУЧНИКОМ

У кожному параграфі підручника є теорія й задачі. Читаючи теорію, основну увагу звертай на слова, надруковані *курсивом* і **жирним шрифтом**¹.

*Курсивом*² виділено геометричні терміни, назви понять. Потрібно вміти пояснювати їх зміст, наводити відповідні приклади.

Жирним шрифтом на кольорових плашках³ надруковано важливі геометричні твердження. Їх треба розуміти, знати, уміти доводити й застосовувати для розв'язування задач.

Щоб перевірити, як ти зрозумів / зрозуміла і запам'ятав / запам'ятала новий теоретичний матеріал, спробуй відповісти на запитання й виконати завдання рубрики **«Запитання і завдання для самоконтролю»**⁴.

8 Розділ 1 Найпростіші геометричні фігури та їх властивості

1 Частиною геометрії, у якій вивчають плоскі фігури, називають **планіметрію** (від латинського слова *плана* — «плоский»).

Ми починаємо вивчати планіметрію. Насамперед розглянемо, як можуть бути розташовані на площині точки і прямі. Ти вже знаєш, як за допомогою лінійки проводять прямі (мал. 1.6).

3 **Пряма** в геометрії — ідеально рівна й нескінченна в обидва боки. Як і кожна інша фігура, пряма складається з точок. Якщо точка A лежить на прямій a , говорять, що пряма a проходить через точку A . Самовільно записують це так: $A \in a$. Якщо точка B не лежить на прямій a , пишуть: $B \notin a$ (мал. 1.7).

2 **Хоч би яка була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що їй не належать.**

Через одну точку можна провести безліч прямих. На малюнку 1.8 зображено прямі a і b , які проходять через точку P . Це їх спільна точка. Інших спільних точок прямих a і b не мають. Якщо дві прямі мають тільки одну спільну точку, говорять, що вони **перетинаються в цій точці**. Прямі a і b перетинаються в точці P .

Якщо прямій належать точки A і B , говорять, що ця пряма **проходить через точки A і B** . Позначають її так: AB або BA (мал. 1.9).


Пряму можна позначати однією маленькою чи двома великими латинськими літерами.

Чи можна провести пряму через три точки? Не завжди. Якщо точки A , B і C розміщені, як показано на малюнку 1.10, через них можна провести пряму.


Через будь-які дві різні точки можна провести пряму, і тільки одну.

А через точки A , B і D — не можна. Говорять, що точки A , B і D **не лежать на одній прямій**.


Точки A , B , C лежать на одній прямій, причому точка B лежить між точками A і C .




Мал. 1.6




Мал. 1.7



Мал. 1.8



Мал. 1.9



Мал. 1.10

10 Розділ 1 Найпростіші геометричні фігури та їх властивості


геометрії, переносяться на мільйони й мільярди всіх натягнутих струн, промислових рейок, труб, стрілок тощо.

Не лише в природі й геометричні площини — без товщини, ідеально рівні та гладкі, несхожені в кожну її частину. Але для науки це ідеально поняття дуже важливе. Бо властивості, установлені в геометрії для площини і її частин, можна перенести на властивості мільярдів конкретних шибок, стін та інших предметів, які мають плоскі поверхні.

4 **КРЕСЛИ КРАСИВО**

Проводячи відрізок, вістряем олівцем не слід торкатися нижнього ребра лінійки, а треба трохи відступити від нього (мал. 1.15).

Геометричний відрізок не має товщини. Але щоб зробити малюнок зрозумілим і красивим, креслярі інди зображують його потовщеною лінією, інди — штриховою лінією або іншим кольором.



Мал. 1.15


тонка лінія
потовщена лінія
штрихова лінія

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке геометрія? Що таке планіметрія?
2. Наведи приклади плоских і неплоских фігур.
3. Що означають записи: $A \in a$, $B \notin a$?
4. Опшиш поняття: точка, пряма, площина.
5. Наведи приклади матеріальних об'єктів, моделями яких є точка, пряма, площина.
6. Сформулюй основні властивості розміщення точок на прямій.
7. Що означає вислів «точка B лежить між точками A і C »?
8. Що таке промінь? Як позначають промінь?
9. Які промінь називають доповиняльним?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

11 Записи взамне розташування прямої a і точок, зображених на малюнку 1.16. Як це можна назвати прямою a ?



Щоб опанувати курс геометрії, треба навчитися розв'язувати задачі. У деяких задачах жирним шрифтом виділено важливі твердження, їх потрібно запам'ятати.

З різними способами розв'язування задач ознайомить рубрика **«Виконаємо разом»**⁵. Радимо розглянути задачі цієї рубрики, перш ніж виконувати домашнє завдання. Номери завдань, рекомендовані для **домашньої роботи**⁶, підкреслено.

5

1.2 Вправи та завдання

ЗАДАВАННЯ І ВАЖЛИВІ ДІЯ САМОКОНТРОЛЮ

- Що таке відрізок? Що таке кінці відрізка?
- Що таке відстань між двома точками?
- Що означає висота між відрізками перпендикулярно?
- Обчислюючи висоту відрізків перпендикулярно.
- Що таке паралельні відрізки?
- Що таке середня відрізка?
- Яка властивість висот до двох кінців трапеції?

ВІСНОВКОВИЙ РАХУНОК

Процес — частка процесу. Це паралельні сторони, що протинаються паралельно.

Трикутник і прямокутний трикутник, тому висота в довільній довільній сторони. Отже, висота, що протинає паралельні сторони, — перпендикуляр.

Точка M — внутрішня точка відрізка AB , довжина якого дорівнює 12 см. Знайдіть довжину відрізка AM , якщо довжина відрізка MB у три рази більша за довжину відрізка AM .

Розв'язок: Нехай довжина відрізка $AM = x$ см, тоді довжина відрізка $MB = 3x$ см (за ум. 2.11). За означенням довжини відрізка $AM + MB = AB$. Тоді маємо рівняння:

$$x + 3x = 12$$

$$4x = 12$$

$$x = 3$$

Отже, $AM = 3$ см, $MB = 9$ см.

6

1.3 Тести

- Дано точку A . Проведи через неї три прямі. Чи можна через точку A провести десяті прямих? А шістьма прямими?
- Прямі AB і BC перетинаються прямою AC в точці A , а прямою BC — в точці B . Чи паралельні прямі AC і AB ?
- Повтори точку K, P, F так, щоб через кожну точку було провести прямих. Як можна вилучити одну пряму?
- Повтори на своїй точці A, B, C так, щоб точка A і B лежали на одній бічній стороні C , а точка A і C — з однієї бічної сторони B .
- Дано пряму a . Побудуй точку A , B і C так, щоб прямих AB і BC перетиналися у точці C , яка лежить між точками A і B .
- Прямі a і b перетинаються в точці P . Обчислюючи висоту трикутника до двох кінців.
- Ліній a і b існують в точці M . Як можна ступи бути висотою?

ВІСНОВКОВИЙ РАХУНОК

- Повтори точку A, B, C, D так, щоб прямих AB і CD перетиналися, а прямих AC і BD не перетиналися.
- Чи можна розв'язати точку A, B, C і D так, щоб прямих AB і CD перетиналися, а прямих AC і BD не перетиналися?
- Дано чотири точки. Через кожну з них можна провести пряму. Чи можна провести одну, якщо жодна з них не лежить на одній стороні прямої? Обчислюючи висоту до двох кінців.
- Дано чотири точки. Через кожну з них можна провести одну, якщо жодна з них не лежить на одній стороні прямої. Будь-яка ліній a і b існують в точці M . Як можна ступи бути висотою?
- Наведи три прямих AB, BC, CA . На скільки частин розділяють площину ці прямих?
- Повтори чотири точки так, щоб жодна з них не лежала на одній стороній прямої. Обчислюючи висоту до двох кінців, якщо жодна з них не лежить на одній стороній прямої. Будь-яка ліній a і b існують в точці M . Як можна ступи бути висотою?
- Уточни висоту трикутника до двох кінців, якщо жодна з них не лежить на одній стороній прямої. Будь-яка ліній a і b існують в точці M . Як можна ступи бути висотою?

Добре підготуватися до тематичного оцінювання ти зможеш, розв'язуючи завдання рубрик «Самостійна робота»⁷, «Тестові завдання»⁸ і «Типові задачі для тематичного контролю»⁹.

7

1.4 Самостійна робота

Найкращі тематичні завдання в класі

Варіант 1

- C — внутрішня точка відрізка AB , $AC = 6$ см, відрізок BC на 2 см менший від AC . Знайдіть довжину відрізка AB .
- $\angle AOB = 130^\circ$, OC — його бісектриса. Знайдіть $\angle BOC$.
- Точки A, B і C лежать на одній прямій. $AB = 9$ см, $BC = 4$ см. Знайдіть довжину відрізка AC . Розглянь два варіанти.
- Прямі OC ділять $\angle AOB$ на два кути так, що один із них у 3 рази більший за інший. Знайдіть $\angle AOC$ і $\angle BOC$, якщо $\angle AOB = 80^\circ$.

Варіант 2

- C — внутрішня точка відрізка AB , $BC = 4$ см, відрізок AC у 2 рази більший за BC . Знайдіть довжину відрізка AB .
- OC — бісектриса кута $\angle AOB$, $\angle AOC = 30^\circ$. Знайдіть $\angle BOC$.
- Точки M, N і K лежать на одній прямій. $MN = 8$ см, $NK = 10$ см. Знайдіть довжину відрізка MK . Розглянь два варіанти.
- Прямі OC ділять $\angle AOB$ на два кути так, що один із них на 20° більший за інший. Знайдіть $\angle AOC$ і $\angle BOC$, якщо $\angle AOB = 30^\circ$.

Варіант 3

- C — внутрішня точка відрізка AB , $AC = 4$ см, відрізок BC на 3 см більший за AC . Знайдіть довжину відрізка AB .
- $\angle AOB = 80^\circ$, OC — його бісектриса. Знайдіть $\angle BOC$.
- Точки E, F і P лежать на одній прямій. $EF = 7$ см, $FP = 3$ см. Знайдіть довжину відрізка EP . Розглянь два варіанти.
- Прямі OC ділять $\angle AOB$ на два кути так, що один із них на 10° більший за інший. Знайдіть $\angle AOC$ і $\angle BOC$, якщо $\angle AOB = 120^\circ$.

Варіант 4

- C — внутрішня точка відрізка AB , $AC = 9$ см, відрізок BC на 3 см менший від AC . Знайдіть довжину відрізка AB .
- OC — бісектриса кута $\angle AOB$, $\angle BOC = 40^\circ$. Знайдіть $\angle AOB$.
- Точки K, P і F лежать на одній прямій. $KP = 12$ см, $PF = 13$ см. Знайдіть довжину відрізка KF . Розглянь два варіанти.
- Прямі OC ділять $\angle AOB$ на два кути так, що один із них на 30° менший від іншого. Знайдіть $\angle AOC$ і $\angle BOC$, якщо $\angle AOB = 120^\circ$.

8

1.5 Тестові завдання

Найкращі тематичні завдання в класі

- Прямі a і b перетинаються в точці O . Який кут між висотою до двох кінців?

A	а) 110°
B	б) 70°
C	в) 50°
D	г) 40°
- На скільки частин ділять площину дві прями, що перетинаються?

A	а) 2
B	б) 4
C	в) 6
D	г) 8
- Яка з трьох точок лежить між двома іншими, якщо $XZ = 8$, $YZ = 7$, $XY = 47$?

A	а) X
B	б) Z
C	в) Y
D	г) жодна
- M — середина відрізка AB , $AM < CM$. Знайдіть довжину відрізка AB .

A	а) 14 см
B	б) 21 см
C	в) 7 см
D	г) 3 см
- K — внутрішня точка відрізка AB , $AK = 3$ см, $AB = 10$ см. Знайдіть довжину відрізка KB .

A	а) 13 см
B	б) 30 см
C	в) 7 см
D	г) 6 см
- Знайдіть міру кута, якщо його бісектриса утворює зі стороною кут 20° .

A	а) 20°
B	б) 30°
C	в) 10°
D	г) 40°
- $\angle AOB = 110^\circ$, OM — його внутрішній бісектриса, $\angle BOM = 60^\circ$. Знайдіть $\angle AOM$.

A	а) 50°
B	б) 90°
C	в) 130°
D	г) 70°
- OM — внутрішній промінь кута $\angle AOB$, $\angle AOM = 40^\circ$, $\angle BOM$ — на 10° більший. Знайдіть $\angle AOB$.

A	а) 50°
B	б) 80°
C	в) 70°
D	г) 141°
- N — внутрішня точка відрізка AC , $AN = 5$ см, $NC = 12$ см. Знайдіть відстань між серединами відрізка AB і BC .

A	а) $2,5$ см
B	б) $8,5$ см
C	в) 8 см
D	г) $3,5$ см
- $\angle AOB = 30^\circ$, $\angle BOC = 20^\circ$. Знайдіть $\angle AOC$.

A	а) 70°
B	б) 30° або 70°
C	в) 30°
D	г) 70° або 40°

9

1.6 Типові задачі для тематичного контролю

Найкращі тематичні завдання в класі

- Точка A лежить між точками F і M . Знайдіть довжину відрізка AM , якщо $FM = 10$ см, $FA = 3,5$ см.

A	а) $13,5$ см
B	б) $7,5$ см
C	в) $6,5$ см
D	г) $4,5$ см
- Відомо, що $\angle A, \angle B, \angle C, \angle K, \angle E$. Точка B лежить між точками A і C . Які з прямих і доповільні?

A	а) AB і BC
B	б) BC і CA
C	в) CA і AB
D	г) жодна
- Точки A, B і C лежать на одній прямій. Яка з точок лежить між двома іншими, якщо $AB = 47$ см, $BC = 72$ см, $AC = 25$ см?

A	а) A
B	б) B
C	в) C
D	г) жодна
- OK — внутрішній промінь кута $\angle AOB$. Утворює він відстань між кутами, відстань рівною 11° , то їх градусні міри (а-б).

1	$\angle AOB$, якщо $\angle AOB = 30^\circ$, $\angle AOK = 40^\circ$
2	$\angle AOB$, якщо $\angle AOB = 70^\circ$, $\angle AOK = 55^\circ$
3	кути, якщо між ними 20° менший від 70°
4	кути $\angle AOB$ і $\angle AOK = 80^\circ$
5	$\angle 30^\circ$
6	$\angle 70^\circ$
7	$\angle 132^\circ$
- Точка O належить відрізку AB , довжина якого дорівнює $7,5$ см. Знайдіть довжину відрізка AO і OB , якщо $AO : OB = 2 : 3$.
- Наведи $\angle ABC = 130^\circ$. Проведи його бісектрису BM і бісектрису BN кута $\angle MNC$. Знайдіть міру кута $\angle BNC$.
- Точки A, B і C лежать на одній прямій. $AB = 7,3$ см, $BC = 3,7$ см. Знайдіть довжину відрізка AC . Розглянь всі можливі варіанти.
- Відомо, що $\angle AOP = 80^\circ$, $\angle BOB = 95^\circ$ (має, 3.24). Знайдіть $\angle AOB$, якщо $\angle AOB = 120^\circ$.

Додаткові завдання

OC — внутрішній промінь кута $\angle AOB$. OM і ON — бісектриси кутів $\angle AOC$ і $\angle BOC$ відповідно. Знайдіть кут $\angle MON$, якщо $\angle AOB = 72^\circ$.

Наприкінці підручника вміщено рубрики «Задачі підвищеної складності» та «Завдання для позакласної роботи». Їх пропонуємо тим учням та ученицям, які люблять математику.

Перш ніж працювати з підручником, перейди на сторінку із цифровими додатками <https://vse.ee/ciue> та обери вкінці «Що ти вже знаєш?».

Усім бажаємо успіхів!

Автори

РОЗДІЛ 1

Найпростіші геометричні фігури та їх властивості



Точка – це перша основа геометрії.

Леонардо да Вінчі

У цьому розділі ти повториш і поглибиш свої знання про найпростіші й найважливіші геометричні фігури: точки, прямі, відрізки, кути.

Дізнаєшся, як вимірюють відрізки й кути, ознайомишся з найуживанішими креслярськими і вимірювальними інструментами.

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- точка — point
- відрізок — segment
- промінь — ray
- пряма — line
- кут — angle

§ 1 ТОЧКИ І ПРЯМІ

Геометрія — це наука про геометричні фігури та їх властивості.

Найпростіша геометрична фігура — точка. Кожна інша геометрична фігура складається з точок.




Наприклад, **коло** — це фігура, що складається з усіх точок площини, рівновідданих від даної точки (мал. 1.1).

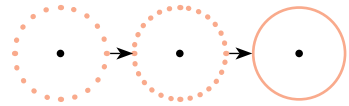
Відрізок також складається з точок (мал. 1.2).

Частина геометричної фігури чи об'єднання кількох фігур — теж геометрична фігура (мал. 1.3).

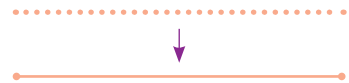
Однією з геометричних фігур є **площина**. Уявлення про частину площини дає поверхня стола, стелі, підлоги (мал. 1.4).

КЛЮЧОВІ СЛОВА

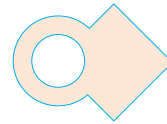
-  точка — point
-  пряма — line
-  промінь — ray



Мал. 1.1



Мал. 1.2



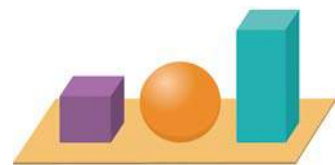
Мал. 1.3



Мал. 1.4

У геометрії площина вважається необмеженою, ідеально рівною і гладкою.

Фігури, які можна розмістити в одній площині, називають **плоскими**. Коло, відрізок, квадрат — плоскі. А от куб, куля, прямокутний паралелепіпед — **неплоскі** фігури (мал. 1.5).



Мал. 1.5

Частину геометрії, у якій вивчають плоскі фігури, називають **планіметрією** (від латинського слова *планум* — «площина»).

Ми починаємо вивчати планіметрію.

Насамперед розглянемо, як можуть бути розташовані на площині точки і прямі.

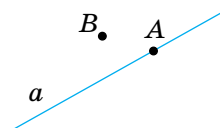
Ти вже знаєш, як за допомогою лінійки проводять прямі (мал. 1.6).

Пряма в геометрії — ідеально рівна й нескінченна в обидва боки. Як і кожна інша фігура, пряма складається з точок. Якщо точка A лежить на прямій a , говорять, що пряма a проходить через точку A .

Символічно записують це так: $A \in a$. Якщо точка B не лежить на прямій a , пишуть: $B \notin a$ (мал. 1.7).



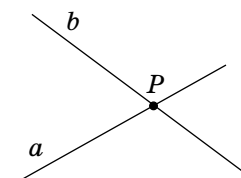
Мал. 1.6.



Мал. 1.7

Хоч би яка була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що їй не належать.

Через одну точку можна провести безліч прямих. На малюнку 1.8 зображено прямі a і b , які проходять через точку P . Це їх спільна точка. Інших спільних точок прямі a і b не мають. Якщо дві прямі мають тільки одну спільну точку, говорять, що вони *перетинаються в цій точці*. Прямі a і b перетинаються в точці P .



Мал. 1.8.

Якщо прямій належать точки A і B , говорять, що ця пряма *проходить через точки A і B* . Позначають її так: AB або BA (мал. 1.9).



Мал. 1.9

Пряму можна позначати однією маленькою чи двома великими латинськими літерами.

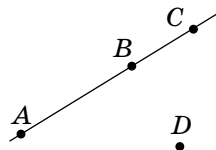
Через будь-які дві різні точки можна провести пряму, і тільки одну.

Чи можна провести пряму через три точки? Не завжди. Якщо точки A , B і C розміщені, як показано на малюнку 1.10, через них можна провести пряму.

A через точки A , B і D — не можна.

Говорять, що точки A , B і D *не лежать на одній прямій*.

Точки A , B , C лежать на одній прямій, причому точка B лежить між точками A і C .



Мал. 1.10

Із трьох різних точок прямої одна, і тільки одна, лежить між двома іншими.

Якщо точка B лежить між точками A і C , говорять, що точки A і C лежать по різні боки від точки B , а точки A і B — по один бік від точки C .

Наведені вище жирним шрифтом три речення — це *основні властивості розміщення точок на прямій*.

Будь-яка точка A прямої ділить цю пряму на дві частини (мал. 1.11). Кожну із частин прямої разом із точкою A називають **променем**, який виходить із точки A . Точку A називають **початком променя**.



Мал. 1.11

Якщо говорять «промінь AB », то мають на увазі промінь із початком у точці A (мал. 1.12).



Мал. 1.12

Два промені, які мають спільний початок і доповнюють один одного до прямої, називають **доповняльними**. На малюнку 1.13 зображено промінь OK — доповняльний для променя OP і промінь OP — доповняльний для OK .



Мал. 1.13

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Геометрія — частина математики (мал. 1.14).

Геометрична наука є багата за змістом і методами дослідження. До неї входять: елементарна геометрія, вища геометрія, неевклідові геометрії тощо. У школі вивчають тільки *елементарну геометрію*.

Геометрія тісно пов'язана з багатьма іншими науками, насамперед із фізикою. Проте фізика вивчає матеріальні тіла (які мають масу, температуру, колір тощо), а в геометрії абстрагуються від усього матеріального.

Абстрагуватися — означає подумки відсторонитися від конкретних об'єктів, які нас оточують.

Абстрагуючись від матеріальних речей, ми уявно створюємо ідеальні об'єкти зі схожими властивостями. Кінець голки, натягнута струна — це матеріальні об'єкти. Вони мають певну товщину, довжину, масу. Абстрагуючись від таких фізичних властивостей, людська уява створила абстрактні геометричні поняття: *точка, пряма*.

У природі абстрактної прямої немає, але це поняття існує в людській уяві. І дуже важливе поняття, бо всі властивості прямої та її частин, виявлені в



МАТЕМАТИКА

Алгебра

Геометрія

Мал. 1.14

геометрії, переносяться на мільйони й мільярди всіх натягнутих струн, прямо-лінійних рейок, труб, стрічок тощо.

Не існує в природі й геометричної *площини* — без товщини, ідеально рівної та гладкої, нескінченної в кожному її напрямі. Але для науки це ідеальне поняття дуже важливе, бо властивості, установлені в геометрії для площини і її частин, можна переносити на властивості мільярдів конкретних шибок, стін та інших предметів, які мають плоскі поверхні.

КРЕСЛИ КРАСИВО

Проводячи відрізок, вістрям олівця не слід торкатися нижнього ребра лінійки, а треба трохи відступити від нього (мал. 1.15).

Геометричний відрізок не має товщини. Але щоб зробити малюнок зрозумілішим і красивішим, креслярі іноді зображують його потовщеною лінією, іноді — штриховою лінією або іншим кольором.



Мал. 1.15

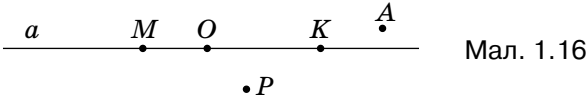
ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке геометрія? Що таке планіметрія?
2. Наведи приклади плоских і неплоских фігур.
3. Що означають записи: $A \in a$, $B \notin b$?
4. Опиши поняття: *точка*, *пряма*, *площина*.
5. Наведи приклади матеріальних об'єктів, моделями яких є точка, пряма, площина.
6. Сформулюй основні властивості розміщення точок на прямій.
7. Що означає вислів «точка B лежить між точками A і C »?
8. Що таке промінь? Як позначають промені?
9. Які промені називають доповняльними?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Запиши взаємне розташування прямої a і точок, зображених на малюнку 1.16. Як ще можна назвати пряму a ?



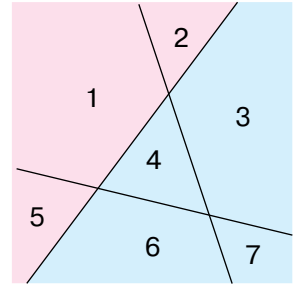


- $M \in a, O \in a, K \in a, A \notin a, P \notin a.$

Можна назвати: MO, OM, OK, KO, MK або $KM.$

2. На скільки частин можуть розбивати площину три її прямі?

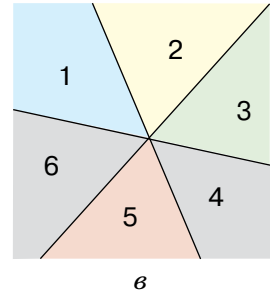
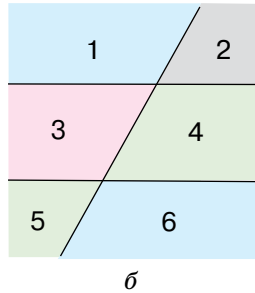
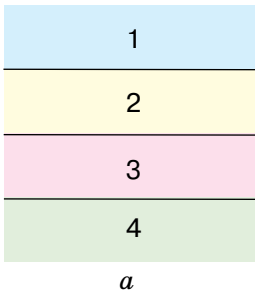
- Якщо прямі розташовані, як показано на малюнку 1.17, то вони розбивають площину на 7 частин.



Мал. 1.17

Якщо вони розташовані, як показано на малюнку 1.18 ($a-b$), то вони розбивають площину на 4 або 6 частин.

Отже, три прямі розбивають площину, якій вони належать, на 4, 6 або 7 частин.



Мал. 1.18

ВИКОНАЄМО УСНО

1. Чи через кожні дві точки можна провести пряму? Чи існують дві точки, через які можна провести пряму?
2. Чи через кожні три точки можна провести пряму? Чи існують три точки, через які можна провести пряму?
3. Провідніть слово: а) точка; б) пряма; в) площина.

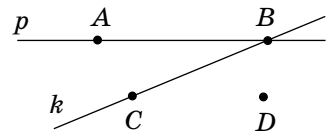
4. 1) Опиши, як взаємно розташовані точки і прямі на малюнку 1.19.

2) Яка з точок належить і прямій p , і прямій k ?

А А Б В В С Г D

3) Яка з точок не належить ні прямій k , ні прямій p ?

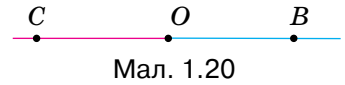
А А Б В В С Г D



Мал. 1.19



5. Розглянь світлину. Чи належить площині дорожнього полотна:
- суцільна розмітка;
 - лінії електропередач;
 - точка перетину ліній електропередач?
6. На скільки частин пряму ділить її точка? А дві точки?
7. Чи можна вважати доповняльними промені BC і CB (мал. 1.20)? А промені OC і OB ? Чому?

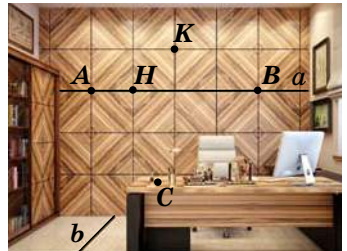


Мал. 1.20

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



- Познач у зошиті точки A і B та проведи через них пряму. Назви цю пряму.
- Проведи пряму a . Познач точки A і K , які належать цій прямій, і точки M і P , які їй не належать. Зроби відповідні записи.
- Проведи пряму m . Познач точки C і E , які належать цій прямій, і точки K і B , які їй не належать. Зроби відповідні записи.
- Розглянь малюнок інтер'єру кабінету.
 - Випиши точки і прямі, що лежать на площині стіни кабінету.
 - Опиши взаємне розташування точок і прямих за допомогою символів \in та \notin .
- Пряма a і точки K , N і P такі, що $K \in a$, $N \in a$, $P \notin a$. Зобрази це на малюнку.
- Пряма a і точки A , B і E такі, що $E \in a$ і $B \notin a$. Зобрази це на малюнку. Розглянь кілька випадків.
- Прямі k і p перетинаються в точці X . Зобрази це на малюнку. Чи правильно, що $X \in k$ і $X \in p$?
- Прямі m і n перетинаються в точці A . Зобрази це на малюнку. Чи правильно, що $A \in m$ і $A \in n$?
- Проведіть дві прямі. На одній прямій позначте точки M , P і E . На другій прямій позначте точки K і R . Чи будуть перетинатися ці прямі? Якщо так, то вкажіть точку їх перетину.

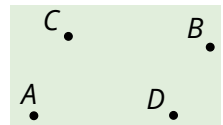


17. Дано точку A . Проведи через неї три прямі. Чи можна через точку A провести десять прямих? А мільйон прямих?
18. Пряма AB перетинає пряму AC в точці A , а пряму BC — у точці B . Чи належить точка C прямій AB ?
19. Познач точки K , P і T так, щоб через них можна було провести пряму. Як можна назвати цю пряму?
20. Познач на прямій точки A , B і C так, щоб точки A і B лежали по один бік від точки C , а точки A і C — по один бік від точки B .
21. Дано пряму a . Познач точки A , B і C так, щоб прямі AB і a перетинались у точці C , яка лежить між точками A і B .
22. Прямі a і b перетинаються в точці P . Скільки променів утворилося?
23. Lines p and k intersect at point M . How many rays have been formed?

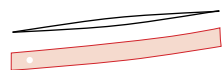
ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ Б

24. Познач точки A , B , C і D так, щоб прямі AB і CD перетинались, а промені AB і CD не перетинались.
25. Чи можна розмістити точки A , B , C і D так, щоб промені AB і CD перетинались, а промені AC і BD не перетинались?
26. Дано чотири точки. Через кожні дві з них проведено пряму. Як розміщені ці точки, якщо всього утворилося чотири прямі? Зобразіть це на малюнку.
27. На скільки частин площину ділить її пряма? А дві прямі? Зобрази всі випадки.
28. Накресли три прямі AB , BC і AC . На скільки частин розбивають площину ці прямі?
29. Познач чотири точки так, щоб жодні три з них не лежали на одній прямій (мал. 1.21). Скільки існує прямих, які проходять через будь-які дві із цих точок? На скільки частин розбивають ці прямі площину?
30. Учень провів спочатку одну пряму, а потім, перевернувши лінійку, — іншу й одержав лінії, що перетинаються у двох точках (мал. 1.22). Що можна сказати про його лінійку? Чому?



Мал. 1.21



Мал. 1.22

31. Щоб перевірити лінійку, дивляться вповдовж її ребра (мал. 1.23). Що бачать, якщо лінійка викривлена?

32. Проведи три прямі й на кожній познач 4 точки так, щоб усього було позначено 9 точок.



Мал. 1.23

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

33. Покажи, як, перегнувши аркуш паперу, можна одержати «лінійку» для проведення прямих.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

34. Назви й зобрази геометричні фігури, які ти розглядав / розглядала в попередніх класах.

35. Знайди периметр трикутника, сторони якого дорівнюють 5 см, 7 см і 8,5 см.

36. Знайди периметр квадрата, якщо він більший за довжину однієї сторони на 6 см.

(Також ти можеш знайти вправи на повторення у кінці підручника.)



§ 2 ВІДРІЗКИ ТА ЇХ ДОВЖИНИ

Дві точки прямої розділяють зображену пряму на три частини: два промені й відрізок (мал. 2.1).

Відрізком називають частину прямої, обмежену двома її точками.

Відрізком AB називають частину прямої, яка складається з точок A і B та всіх точок, що лежать між ними.

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- відрізок — segment
- довжина відрізка — length of a segment



Мал. 2.1

Точки A і B називають *кінцями відрізка AB* . Усі інші точки цього відрізка — його *внутрішні точки*.

Два *відрізки перетинаються*, якщо вони мають тільки одну спільну внутрішню точку (мал. 2.2).

Кожний відрізок має певну довжину.

Щоб виміряти відрізки, треба мати **одиничний відрізок** (одиницю виміру). Відрізок, зображений на малюнку 2.3, вважатимемо одиничним. Його довжина дорівнює 1 см. Загалом, за одиничний можна прийняти довільний відрізок.

Якщо на відрізку AB одиничний відрізок відкладається рівно 3 рази, то це означає, що довжина відрізка AB дорівнює 3 см (мал. 2.4).

Якщо на відрізку EP одиничний відрізок відкладається два рази з остачею, а в остачі десята частина одиничного відрізка відкладається 7 разів, то довжина відрізка EP дорівнює 2,7 см.

Пишуть: $AB = 3$ см, $EP = 2,7$ см.

За одиничний відрізок можна брати відрізок завдовжки 1 м, 1 км, 1 фут, 1 дюйм тощо.

Два відрізки називають *рівними*, якщо рівні їх довжини.

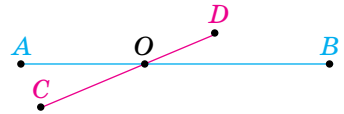
Із двох відрізків *більшим* вважають той, довжина якого *більша*.

У сантиметрах вимірюють порівняно невеликі відрізки. Більші відрізки вимірюють у дециметрах, метрах, кілометрах; менші — у міліметрах. Нагадаємо, що

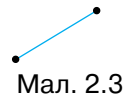
$$1 \text{ км} = 1000 \text{ м}, \quad 1 \text{ м} = 10 \text{ дм} = 100 \text{ см} = 1000 \text{ мм}.$$

Довжину відрізка називають також відстанню між його кінцями. Якщо $XU = 18$ см, то це означає, що відстань між точками X і U дорівнює 18 см. Відстань між X і U завжди дорівнює відстані між U і X .

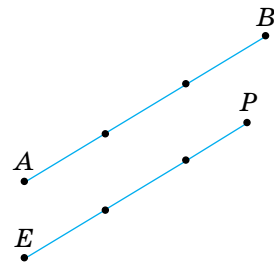
Якщо точка C відрізка AB розбиває його на дві частини, довжини яких дорівнюють, наприклад, 2 см і 1,2 см, то довжина відрізка AB дорівнює 3,2 см, тобто $AB = AC + CB$ (мал. 2.5).



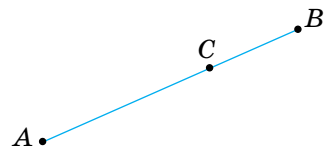
Мал. 2.2



Мал. 2.3



Мал. 2.4



Мал. 2.5

Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які його розбиває будь-яка його внутрішня точка.

менша за суму довжин відрізків AC і CB , тобто $AB < AC + CB$.

Для будь-яких трьох точок A , B і C завжди $AB \leq AC + CB$.

Серединою відрізка називають його внутрішню точку, яка розбиває цей відрізок на дві рівні частини.

Якщо точка C — середина відрізка AB , то $AC = CB$ (мал. 2.7).

Вимірювати довжини відрізків доводиться багатьом фахівцям. Креслярі вимірюють відрізки масштабними лінійками, столяри — складними метрами, кравці — клейончастими сантиметрами, будівельники — рулетками або дальномірами (мал. 2.8).

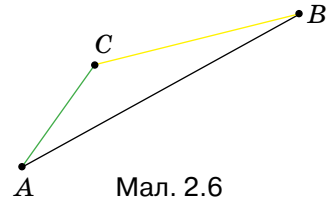
На малюнку 2.9 зображено відкладання відрізка MN завдовжки 3 см на промені MP за допомогою лінійки.



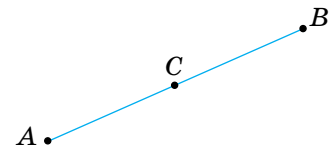
Мал. 2.9

У двох реченнях на плашках сформульовано основні властивості вимірювання відрізків.

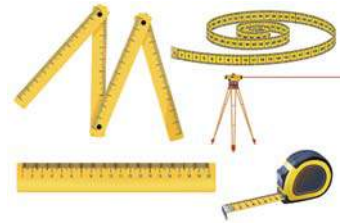
Якщо точка C не належить відрізку AB (мал. 2.6), то довжина відрізка AB



Мал. 2.6



Мал. 2.7



Мал. 2.8

Основна властивість відкладання відрізків.

На будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок даної довжини, і тільки один.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

На практиці для різних відстаней існують різні назви: довжина, ширина, висота, глибина, дистанція, інтервал (мал. 2.10).





Мал. 2.10

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке відрізок? Що таке кінці відрізка?
2. Що таке відстань між двома точками?
3. Що означає вислів «два відрізки перетинаються»?
4. Сформулюй основні властивості вимірювання відрізків.
5. Які відрізки називають рівними?
6. Що таке середина відрізка?
7. Яка нерівність виконується для будь-яких трьох точок?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Промінь — частина прямої. Чи правильно говорити, що промінь коротший за пряму?
 - Пряма і промінь не мають довжин, тому порівнювати їх довжини немає сенсу. Отже, говорити, що промінь коротший за пряму, — неправильно.
2. Точка M — внутрішня точка відрізка AB , довжина якого дорівнює 12 см. Знайди довжини відрізків AM і MB , якщо довжина відрізка MB у три рази більша за довжину відрізка AM .
 - Нехай довжина відрізка $AM = x$ см, тоді довжина відрізка $MB = 3x$ см (мал. 2.11). За основною властивістю вимірювання відрізків $AM + MB = AB$. Тоді маємо рівняння:

$$x + 3x = 12$$

$$4x = 12$$

$$x = 3$$
 Отже, $AM = 3$ см, $MB = 9$ см.



Мал. 2.11

3. Точки K , P і T лежать на одній прямій. Знайди відстань між точками P і T , якщо $KP = 1,7$ м, $KT = 4,8$ м. Скільки розв'язків має задача?

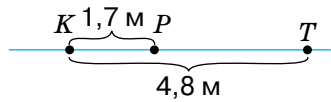
- Позначимо точки K і T так, щоб $KT = 4,8$ м. Точка P прямої KT віддалена від точки K на $1,7$ м. Можливі два випадки (мал. 2.12):

а) точка K лежить між точками P і T : $PT = 1,7$ м + $4,8$ м = $6,5$ м;

б) точка P лежить між точками K і T : $PT = 4,8$ м - $1,7$ м = $3,1$ м.

Отже, задача має два розв'язки:

$6,5$ м або $3,1$ м.



Мал. 2.12

ВИКОНАЄМО УСНО

37. Знайди довжину відрізка AB , якщо точка C — його середина і $CB = 5$ дм.

А 10 см Б 2,5 см В 2,5 дм Г 1 м

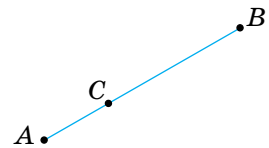
38. Знайди довжину відрізка, який довший за свою половину на 35 см.

39. Точка C ділить відрізок AB у відношенні $1 : 2$ (мал. 2.13). Знайди:

1) CB , якщо AC дорівнює: 1 см; 3 дм; 10 км;

2) AB , якщо AC дорівнює: 2 см; 5 дм; 30 м;

3) AB , якщо CB дорівнює: 2 см; 6 м; 12 км.



Мал. 2.13

40. Знайди довжину відрізка, якщо точки K і P ділять його на три рівні частини і $KP = 7$ см.

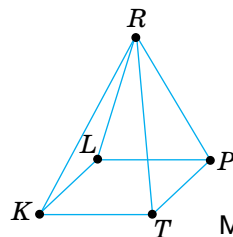
41. Точки A і B лежать по різні боки від прямої a . Чи перетинає відрізок AB пряму a ?

42. Точки K і P лежать по один бік від прямої s . Чи перетинає відрізок KP пряму s ? А пряма s перетинає пряму KP ?

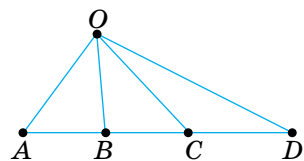
43. Точка A лежить між точками B і C . Чи є точка B внутрішньою точкою відрізка AC ?

44. Як за допомогою півметрової лінійки побудувати двометровий відрізок?

45. Скільки відрізків зображено на кожному з малюнків 2.14 і 2.15?



Мал. 2.14



Мал. 2.15

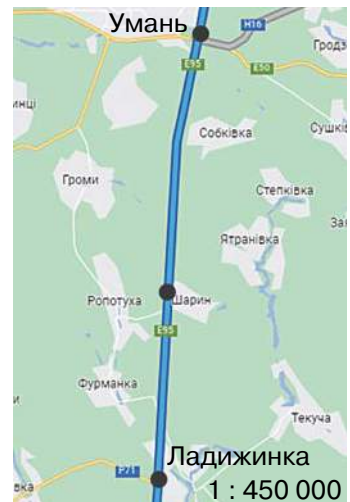
ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



46. Познач на прямій точки A і B . Який відрізок утворився? Познач точкою M його середину.
47. Познач точки A , B , C і D так, щоб ніякі три з них не лежали на одній прямій. Побудуй відрізки AB , AC , AD , BC , BD , CD .
48. Позначте на прямій точки A , B , C і D так, щоб відрізки AC і BD не мали спільних точок і щоб точки C і B лежали між точками A і D . Знайдіть спільну частину відрізків AB і CD .
49. Познач точки A , B , C і D так, щоб точка C лежала між точками A і B , а точка B — між C і D . Скільки спільних точок мають відрізки AC і BD , AC і CB , AB і CD ?
50. Відрізок AB перетинає пряму a , а відрізок BC не перетинає її, причому $C \notin a$. Чи перетинає пряму a відрізок AC ?
51. На малюнку 2.16 подано схему маршрутів Криворізького метрографу. Відстань маршруту Зарічна — Кільцева становить 17 км, Мудрьона — Кільцева — 4,5 км, Сонячна — Зарічна — 5,5 км. Знайдіть відстань маршрутів:
 - а) Сонячна — Кільцева;
 - б) Мудрьона — Зарічна;
 - в) Сонячна — Мудрьона.



Мал. 2.16



Мал. 2.17

52. Точка C лежить між точками A і B . $AC = 5$ см, відстань BC — на 3 см більша. Знайди AB .
53. Point K lies between points B and P . $BK = 8$ cm, and the distance PK is 4 cm more. Find BP .
54. Розглянь карту (мал. 2.17). На позначеному маршруті є три населених пункти: Умань, Шарин, Ладизжинка.

Використовуючи масштаб, знайди відстань між Уманню і Шарином, Шарином та Ладижинкою. Познач кожен пункт однією з латинських літер. Зроби в зошиті малюнок, нанеси дані, обчисли відстань від Умані до Ладижинки.

55. Будинки X , A і B розташовані на одній прямій вулиці. Будинок X розташований між A і B . Знайди відстань між A і B , якщо:

а) $AX = 2,5$ км, $XB = 3,4$ км;

б) $AX = 5,3$ км, XB на $4,2$ км коротший за AX ;

в) $XB = 2\frac{1}{3}$ км, $AX = 6XB$.

56. Точка M лежить між точками K і P . Знайди відстань між точками M і P , якщо: а) $KP = 0,9$ дм, $KM = 0,3$ дм;

б) $KP = 2\frac{5}{6}$ дм, $KM = \frac{1}{6}$ дм.

57. Точка A лежить між точками M і K . Знайди відстань між точками A і M , якщо: а) $MK = 2,7$ см, $AK = 1,5$ см;

б) $MK = 12,6$ м, $AK = 8,4$ м.

58. Чи лежать точки A , B і C на одній прямій, якщо:

а) $AB = 2,5$ см, $BC = 3,8$ см, $AC = 1,3$ см;

б) $AB = 1,9$ дм, $BC = 2,9$ дм, $AC = 4,9$ дм?

Якщо так, то яка точка лежить між двома іншими?

59. Чи лежать точки A , M і K на одній прямій, якщо:

а) $AM = 6,8$ см, $MK = 4,2$ см, $AK = 10$ см;

б) $AM = 12,6$ см, $MK = 4,5$ см, $AK = 8,1$ см?

Якщо так, то яка точка лежить між двома іншими?

60. M — середина відрізка AB , K — середина відрізка MB . Знайди AM , AK , MK і AB , якщо $KB = 7$ см.

61. Точки A , B , C і K лежать на одній прямій. $AB = BC = CK$. Знайди CK , BK і AK , якщо $AC = 12$ см.

62. Точка C лежить між точками A і B . Установи відповідність між відрізками, заданими умовами (1–3), та їх довжинами (А–Д).

1	AB , якщо $AC = 2$ см, $BC = 6,2$ см	А	3,2 см
2	AC , якщо $AB = 10,4$ см, $BC = 7,2$ см	Б	5,1 см
3	BC , якщо $AC : BC = 1 : 2$ і $AB = 15,3$ см	В	8,2 см
		Г	10,2 см
		Д	17,6 см

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



63. На відрізку XU завдовжки 4,8 дм лежить точка C (мал. 2.18). Знайди відстані XC і CY , якщо:

- а) $CY - XC = 1,6$ дм;
 б) $CY = 2XC$; в) $XC : CY = 3 : 5$.

64. На відрізку KE завдовжки 12,6 см лежить точка O . Знайди відстані KO і OE , якщо:

- а) довжина відрізка OE на 3 см більша за довжину відрізка KO ;
 б) довжина відрізка OK у 2 рази менша за довжину відрізка EO ;
 в) $KO : OE = 2 : 7$.



Мал. 2.18

65. Чи можна розмістити точки A , B і C так, щоб виконувалися рівності:

- а) $AB = 5,1$ см, $BC = 3,5$ см, $AC = 6,8$ см;
 б) $AB = 3,1$ см, $BC = 7,2$ см, $AC = 10,3$ см;
 в) $AB = 2,3$ см, $BC = 3,5$ см, $AC = 6,3$ см?

66. Чи можна розмістити точки E , F і K так, щоб виконувалися рівності:

- а) $EF = 3,5$ см, $FK = 7,2$ см, $EK = 10,7$ см;
 б) $EF = 7,8$ см, $FK = 3,4$ см, $EK = 12$ см;
 в) $EF = 4,3$ см, $FK = 6,8$ см, $EK = 9,2$ см?

67. Чи може відрізок AC лежати на промені AB , якщо:

- а) $AB = 9,2$ см, $BC = 3,8$ см, $AC = 13$ см;
 б) $AB = 9,2$ см, $BC = 3,8$ см, $AC = 5,4$ см;
 в) $AB = 9,2$ см, $BC = 13,8$ см, $AC = 4,6$ см?

68. Чи може відрізок FE лежати на промені AF , якщо:


- а) $AE = 6,8$ см, $EF = 5,6$ см, $AF = 12,4$ см;
 б) $AE = 6,8$ см, $EF = 5,6$ см, $AF = 1,2$ см;
 в) $AE = 6,8$ см, $EF = 15,6$ см, $AF = 8,8$ см?

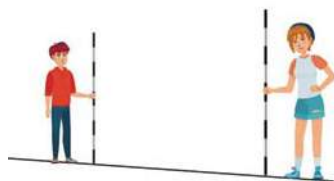
69. Відомо, що $AK = PB$ (мал. 2.19). Доведи, що $AP = KB$.

70. Відомо, що $AP = KB$ (мал. 2.19). Доведи, що $AK = PB$.




Мал. 2.19

71. Точки M, K, P лежать на одній прямій, $MK = 12$ см, $KP = 4$ см. Знайди MP . Розглянь усі можливі варіанти.
72. Точки A, B, C лежать на одній прямій, $AB = 10$ дм, $BC = 3$ дм. Знайди AC . Розглянь усі можливі варіанти.
73. Точки A, B, C і D лежать на одній прямій, B — середина AC , $BC = 7$ м, $CD = 10$ м. Знайди AD .
74. Точки A, B, C і D лежать на одній прямій. Знайди CD , якщо $AB = 10$ см, $AC = 3$ см, $BD = 4$ см. Розглянь усі можливі варіанти.
75.  Поясни, як *провішують* прямі за допомогою віх (мал. 2.20).
76. Дано відрізок AB . Побудуй відрізок KP :
- утричі довший за AB ;
 - удвічі коротший від AB ;
 - якщо $KP = 2,5AB$.



Мал. 2.20

77.  Усі цифри на старій лінійці стерлися. Залишилися тільки 0, 3 і 7. Як, користуючись такою лінійкою, відкласти:
- 1 см;
 - 2 см;
 - 5 см?

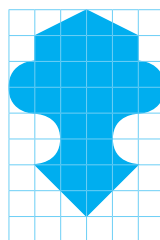
ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

78. Виміряй довжину й ширину своєї парти в різних одиницях.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

79. Перемалюй у зошит фігуру, зображену на малюнку 2.21. Знайди її площу, прийнявши площу однієї клітинки за $0,25$ см².
80. На скільки частин можуть поділити площину два кола, розташовані на ній?
81. Знайди довжину ребра куба, якщо сума довжин усіх його ребер дорівнює 6 м.



Мал. 2.21

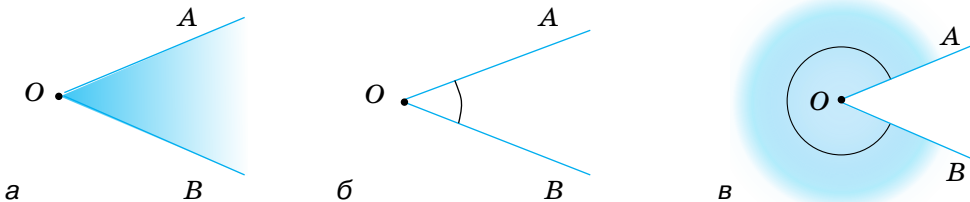
§ 3 КУТИ ТА ЇХ МІРИ

Два промені, що мають спільний початок, розбивають площину на дві частини.

Частину площини, обмежену двома променями зі спільним початком, називають **кутом**.

Промені, що обмежують кут, називають **сторонами кута**, а їх спільний початок — **вершиною кута**. Кут на мал. 3.1, *a* називають кутом AOB , або кутом BOA , або кутом O і записують відповідно: $\angle AOB$, або $\angle BOA$, або $\angle O$.

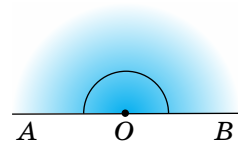
Усі точки кута, які не належать його сторонам, утворюють **внутрішню область** цього кута. Внутрішню область кута на малюнку 3.1, *a* зафарбовано. Іноді внутрішню область кута позначають дугою (мал. 3.1, *б* і *в*), іноді — ніяк не позначають, а тільки уявляють.



Мал. 3.1

На малюнках 3.1 зображено кути з вершиною O і сторонами OA і OB .

Кут, сторони якого — доповняльні промені, називають **розгорнутим кутом** (мал. 3.2).

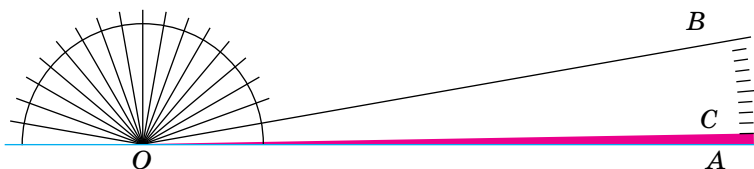


Мал. 3.2

Щоб виміряти кут, треба мати одиницю виміру. За таку одиницю приймають кут в 1 *градус* (скорочено: 1°). У розгорнутому куті він уміщується 180 разів. Уявімо півколо, поділене на 18 рівних дуг (мал. 3.3). Коли з його центра O через усі точки поділу і кінці півкола провести промені, вони поділять розгорнутий кут на 18 кутів по 10° . Один із таких кутів ($\angle AOB$) ділимо на 10 рівних частин. Міра кута AOC дорівнює 1° .

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- кут — angle
- міра кута — measure of an angle
- бісектриса кута — angle bisector
- прямий кут — right angle
- гострий кут — acute angle
- тупий кут — obtuse angle
- розгорнутий кут — straight angle



Мал. 3.3

Кожний кут має певну міру.

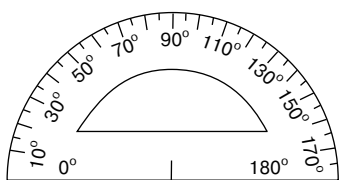
Міра розгорнутого кута дорівнює 180° . Існують кути, градусна міра яких більше 180° (мал. 3.1, в).

Міру кута позначають так само, як і кут. Наприклад, якщо міра кута ABC дорівнює 60 градусів, пишуть: $\angle ABC = 60^\circ$. Дуже малі кути вимірюють у хвилинах і секундах.

Мінutoю називають $\frac{1}{60}$ частину градуса, а *секундою* — $\frac{1}{60}$ частину мінути.

Записують: $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$.

Кути в зошиті та на класній дошці вимірюють *транспортиром* (мал. 3.4), на місцевості — *астролябією* (мал. 3.5), *теодолітом* (мал. 3.6) чи іншими кутовимірювальними приладами.



Мал. 3.4



Мал. 3.5



Мал. 3.6

Два кути називають **рівними**, якщо їх міри рівні.

Із двох кутів більшим вважають той, міра якого більша.

Кут називають **прямим**, якщо його міра дорівнює 90° , **гострим** — якщо він менший від прямого, **тупим** — якщо він більший за прямий, але менший від розгорнутого (мал. 3.7).



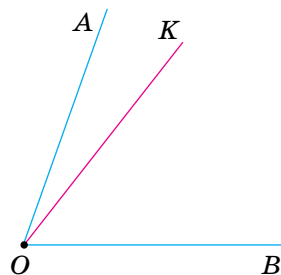
Мал. 3.7

Прямі кути на малюнках частіше позначають не дугами, а квадратиками.

Кути, більші від розгорнутого, поки що не розглядатимемо.

Промінь, який виходить із вершини кута і лежить у його внутрішній області, називають **внутрішнім променем кута**. Внутрішній промінь розбиває даний кут на два менші кути.

Наприклад, внутрішній промінь OK $\angle AOB$ розбиває цей кут на кути $\angle AOK$ і $\angle KOB$ (мал. 3.8). При цьому $\angle AOK + \angle KOB = \angle AOB$. Говорять, що кут $\angle AOB$ дорівнює сумі кутів $\angle AOK$ і $\angle KOB$.



Мал. 3.8

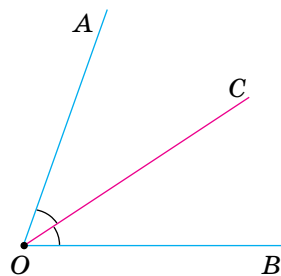
Міра кута дорівнює сумі мір кутів, на які даний кут розбивається його внутрішнім променем.

У двох реченнях на плашках подано основні властивості вимірювання кутів.

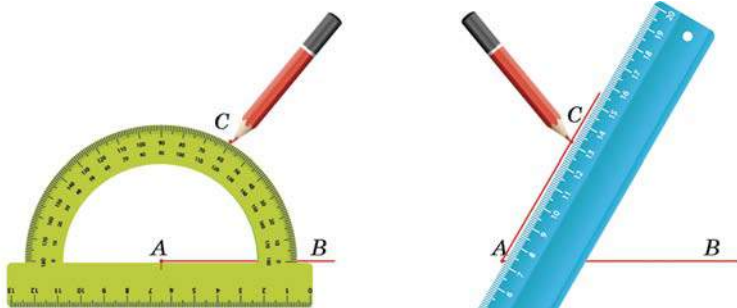
Внутрішній промінь, який розбиває кут на два рівні кути, називають **бісектрисою** цього кута (мал. 3.9).

OC — бісектриса кута $\angle AOB$.

За допомогою транспортира можна вимірювати кути й відкладати кути заданої міри від будь-якого променя. Поступовий процес відкладання кута $\angle CAB$, що дорівнює 60° , від променя AB показано на малюнку 3.10.



Мал. 3.9



Мал. 3.10

Основна властивість відкладання кутів.

Від будь-якого променя з одного боку від нього можна відкласти кут заданої міри, і тільки один.



ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

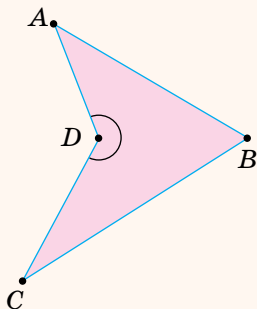
Кутом часто називають також фігуру, складену з двох променів, що мають спільний початок. Таким чином, кутом називають і деяку лінію. Але поділити такий кут на два чи більше рівних кутів неможливо. Тож коли говорять про додавання, віднімання чи ділення кутів, то кут розглядають разом із його внутрішньою областю.

Хоча далі ми розглядатимемо здебільшого кути, менші від розгорнутого, слід пам'ятати, що кути бувають і більші за розгорнутий. Вони мають більше 180° . Таким, наприклад, є кут D чотирикутника $ABCD$ (мал. 3.11).

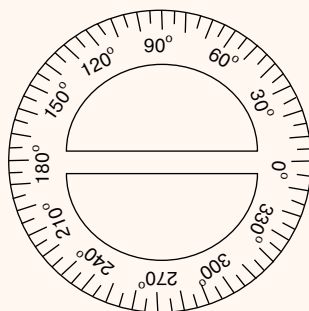
Існують і спеціальні транспортири, якими вимірюють кути, більші за розгорнутий (мал. 3.12). Зазвичай у геометрії розглядають кути, не більші за 360° .

Поняття кута застосовують часто також для характеристики поворотів. Наприклад, велосипедне колесо можна повернути на 100° , можна на 300° . А коли колесо зробило півтора оберти? Уважають, що воно повернулося на 360° і ще на 180° , а разом — на 540° .

Крім градусів, мінут і секунд, є й інші міри кутів. Моряки вимірюють кути в *румбах*. Румбом називають восьму частину прямого кута. $1 \text{ румб} = 11,25^\circ$ (мал. 3.13). Науковці найчастіше вимірюють кути в *радіанах*. Що це таке, дізнаєшся у старших класах.



Мал. 3.11



Мал. 3.12



Мал. 3.13

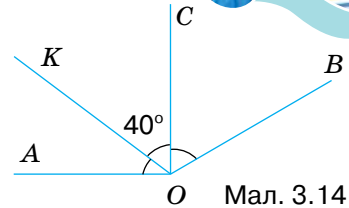
ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яку фігуру називають кутом? Як позначають кути?
2. Який кут називають:
 - а) гострим; б) тупим; в) прямим; г) розгорнутим?
3. Якими приладами і в яких одиницях вимірюють кути?
4. Що таке внутрішня область кута і внутрішній промінь кута?
5. Що таке бісектриса кута?
6. Які кути називають рівними?
7. Сформулюй основні властивості вимірювання кутів.
8. Сформулюй основну властивість відкладання кутів.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Знайди міру кута AOB , якщо промені OC і OK ділять його на три рівні кути і $\angle COK = 40^\circ$. (мал. 3.14).

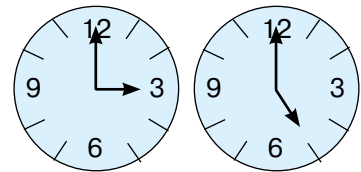
- Кут COK — третя частина кута AOB .
Тому $\angle AOB = 40^\circ \cdot 3 = 120^\circ$.
Отже, $\angle AOB = 120^\circ$.



Мал. 3.14

2. Знайди міри кутів, утворених стрілками годинника: о 3-й годині; о 5-й годині (мал. 3.15).

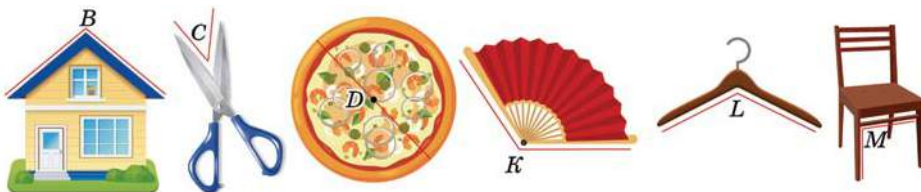
- На циферблаті годинника півколо відповідає 6 годинам. Тому одній годині відповідає $\frac{1}{6}$ частина розгорнутого кута, тобто 30° . Коли на годиннику 3-тя година, кут між годинною і хвилинною стрілками дорівнює $30^\circ \cdot 3 = 90^\circ$. Коли на годиннику 5-та година, кут між його стрілками дорівнює $30^\circ \cdot 5 = 150^\circ$.
Отже, ці кути — 90° і 150° .



Мал. 3.15

ВИКОНАЄМО УСНО

82. Визнач вид кожного з позначених на малюнку 3.16 кутів.



Мал. 3.16

83. Знайди кут між променями, які ділять прямий кут на 3 рівні частини.

- А 45° Б 30° В 60° Г 120°

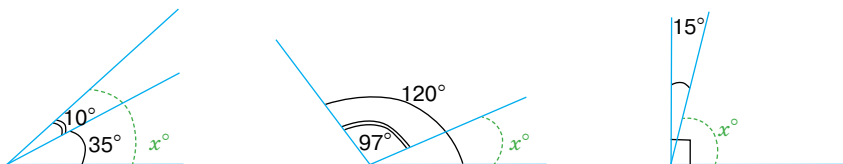
84. Промені, проведені із центра кола, ділять його на 4 рівні частини. Знайди кут між двома сусідніми променями.



85. Установи відповідність між кутами, заданими умовами (1–3), та їх назвами (А–Г).

1 Половина розгорнутого кута	А Гострий кут
2 Половина прямого кута	Б Тупий кут
3 Кут, удвічі більший за прямий	В Прямий кут
	Г Розгорнутий кут

86. Знайди градусні міри x (мал. 3.17).



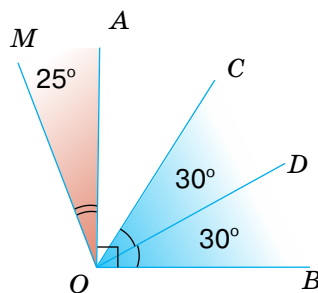
Мал. 3.17

87. Скільки хвилин мають 2° ? А півтора градуса?

88. 1) Назви всі кути, зображені на малюнку 3.18. Які з них гострі, прямі, тупі?

2) Нехай $\angle MOA = 25^\circ$, $\angle AOB$ — прямий, $\angle COD = \angle DOB = 30^\circ$. Знайди $\angle MOB$ і $\angle AOC$.

3) Порівняй кути MOC і AOD , AOD і COB .



Мал. 3.18

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

89. Накресли гострий кут. Познач буквами його вершину і сторони. Заштрихуй його внутрішню область.
90. Накресли тупий кут. Познач його сторони буквами, а внутрішню область — дугою.
91. Позначте три точки A , B і C , що не лежать на одній прямій. Побудуйте кут ABC . Чи може цей кут бути розгорнутим?
92. Користуючись транспортиром, побудуй кути, міри яких дорівнюють 50° , 90° , 120° . Проведи бісектриси побудованих кутів.
93. **Гра.** Один з гравців/гравчинь називає градусну міру кута, другий/друга — будує на око відповідний кут і проводить бісектрису. Перший/перша перевіряє точність побудови тран-

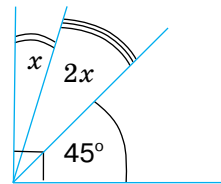
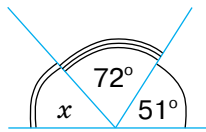
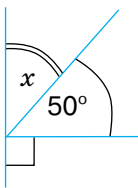


ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



спортиром. Якщо градусні міри кутів відрізняються не більше як на 5° , то другий гравець/друга гравчиня заробляє бал. Потім учні міняються ролями.

94. Вирази у градусах і мінутах міри кутів: $135'$; $5000'$.
 95. Виконай дії: а) $123^\circ 45' + 54^\circ 32'$; б) $44^\circ 14' - 14^\circ 44'$.
 96. Запиши відповідні рівняння та знайди градусні міри невідомих кутів на кожному з малюнків (мал. 3.19).



Мал. 3.19

97. Заповни таблицю, у якій A — міра даного кута, B — міра кута між його стороною і бісектрисою.

A	10°		60°		100°	180°
B		50°		45°		

98. BK — внутрішній промінь кута ABC . Знайди:

- а) $\angle ABC$, якщо $\angle ABK = 48^\circ$, $\angle KBC = 32^\circ$;
 б) $\angle ABK$, якщо $\angle ABC = 64^\circ$, $\angle KBC = 40^\circ$;
 в) $\angle KBC$, якщо $\angle ABC = 120^\circ$ і $\angle ABK = \frac{2}{3} \angle ABC$.

99. Знайди міру кута AOB , якщо OC — його внутрішній промінь і $\angle AOC = 60^\circ$, $\angle COB = 30^\circ$.

100. Find the measure of angle AOB , if OC is its internal ray and $\angle AOC = 50^\circ$, $\angle COB = 20^\circ$.

101. $\angle AOB = 40^\circ$, $\angle BOC = 24^\circ$. Знайди $\angle AOC$, якщо:

- а) OB — внутрішній промінь кута AOC ;
 б) OC — внутрішній промінь кута AOB .

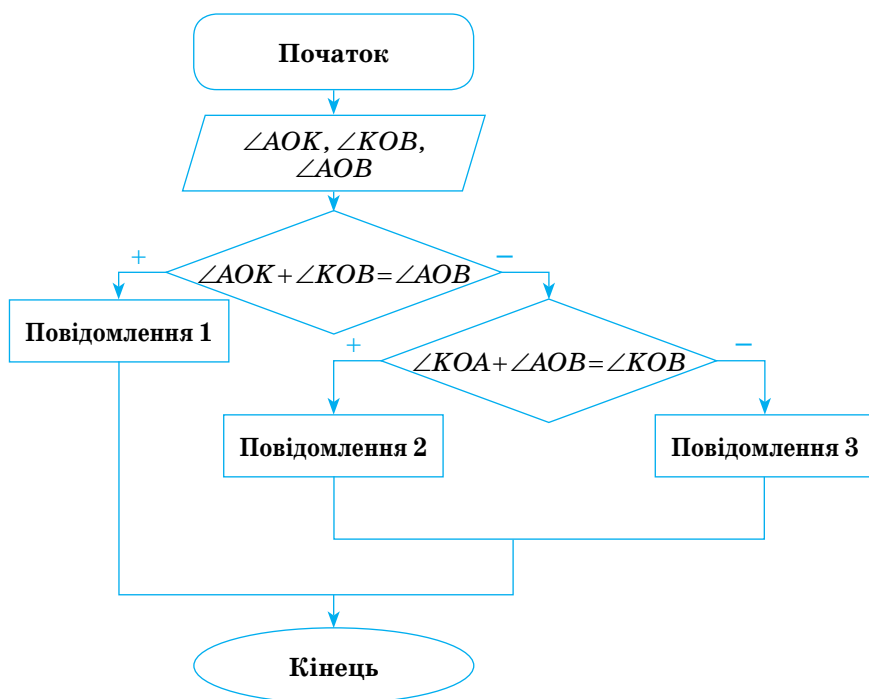
102. $\angle MON = 35^\circ$, $\angle KOM = 20^\circ$. Знайди $\angle KON$, якщо:

- а) OM — внутрішній промінь кута KON ;
 б) OK — внутрішній промінь кута MON .

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



103. Чи є промінь PM внутрішнім променем кута KPT , якщо $\angle KPT = 70^\circ$, $\angle KPM = 80^\circ$? А якщо $\angle KPM = 20^\circ$?
104. Чи є промінь OK внутрішнім променем кута AOB , якщо $\angle AOB = 62^\circ$, $\angle AOK = 80^\circ$. А якщо $\angle AOK = 40^\circ$?
105. На який кут повертається хвилинна стрілка годинника протягом 20 хв; 30 хв?
106. На який кут повертається годинна стрілка годинника протягом 2 год; 0,5 год; 5 хв?
107. Оля побудувала блок-схему для 3 різних і гострих кутів. Запиши 3 повідомлення про внутрішній промінь, які мають бути виведені (мал. 3.20).



Мал. 3.20

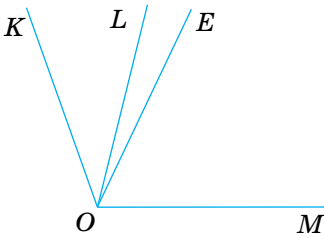
108. OM — внутрішній промінь кута $\angle AOB$. Знайдіть $\angle AOM$ і $\angle MOB$, якщо $\angle AOB = 120^\circ$ і:
- $\angle AOM$ на 20° менший від $\angle MOB$;
 - $\angle AOM$ у чотири рази більший за $\angle MOB$;
 - $\angle AOM : \angle MOB = 3 : 7$.

109. OC — внутрішній промінь кута $\angle AOB$. Знайди $\angle AOC$ і $\angle COB$, якщо $\angle AOB = 60^\circ$ і:
- $\angle AOC$ на 16° більший за $\angle COB$;
 - $\angle AOC$ у три рази менший за $\angle COB$;
 - $\angle AOC : \angle COB = 7 : 8$.

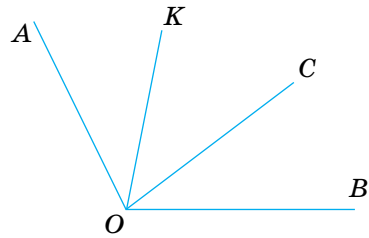
110. Накресли $\angle AOB$ і його внутрішні промені OK і OM так, щоб $\angle AOB = 90^\circ$, $\angle AOK = 40^\circ$, $\angle MOB = 30^\circ$. Знайди $\angle KOM$.

111. Накресли $\angle KOE$, і його внутрішні промені OA і OC так, щоб $\angle KOE = 120^\circ$, $\angle AOK = 40^\circ$, $\angle COE = 50^\circ$. Знайди $\angle AOC$.

112. OL і OE — внутрішні промені кута KOM (мал. 3.21). Знайди кут $\angle LOE$, якщо $\angle KOE = 55^\circ$, $\angle LOM = 80^\circ$, $\angle KOM = 110^\circ$.



Мал. 3.21



Мал. 3.22

113. OA і OC — внутрішні промені кута POK . Знайди кут $\angle AOC$, якщо $\angle POC = 60^\circ$, $\angle AOK = 76^\circ$, $\angle POK = 100^\circ$.

114. На малюнку 3.22 $\angle AOK = \angle COB$. Доведи, що $\angle AOC = \angle KOB$.

115. На малюнку 3.22 $\angle AOC = \angle KOB$. Доведи, що $\angle AOK = \angle COB$.

116. OM — бісектриса кута AOB , OK — бісектриса кута AOM . У скільки разів $\angle KOM$ менший від $\angle AOB$?

117. BT — бісектриса кута ABC . BK і BP — бісектриси кутів ABT і TBC . Знайди:

- $\angle KBP$, якщо $\angle ABC = 80^\circ$;
- $\angle ABC$, якщо $\angle KBP = 50^\circ$.

118. OM — бісектриса прямого кута AOB . OK і OP — бісектриси кутів AOM і MOB . Знайди міру кута KOP .

119. OM і OK — внутрішні промені кута AOB , OK — бісектриса кута MOB , $\angle AOB = 150^\circ$, $\angle KOB$ — на 40° менший від $\angle MOB$. Знайди $\angle AOM$ і $\angle MOK$.

120. BM і BP внутрішні промені кута ABC , BM — бісектриса кута ABP , $\angle ABM$ на 20° менший від $\angle ABP$. Знайди кути $\angle ABM$, $\angle MBP$ і $\angle PBC$, якщо $\angle ABC = 100^\circ$.

121. Знайдіть кут $\angle AOB$, якщо $\angle AOM = 30^\circ$, $\angle MOB = 60^\circ$. Розгляньте два випадки.



122. Дано кути AOB і MOB , що містять відповідно 120° і 50° . Знайди міру кута AOM . Розглянь два випадки.
123. $\angle AOM = 30^\circ$, а $\angle BOM$ на 20° більший. Знайди $\angle AOB$. Розглянь всі можливі варіанти.
124. $\angle AOB = 40^\circ$, $\angle AOC$ у 2 рази більший. Знайди $\angle BOC$. Розглянь всі можливі варіанти.
125. Як побудувати кут, градусна міра якого дорівнює 4° , якщо є шаблон кута, міра якого дорівнює: а) 23° ; б) 11° ?

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

126. а) Виріж із паперу гострий, прямий і тупий кути. Виміряй транспортиром їх градусні міри.
б) Перегинаючи аркуші паперу, зроби моделі кутів, міри яких дорівнюють 180° ; 90° ; 45° ; 30° ; 60° .



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

127. Знайди периметр прямокутника, якщо його площа дорівнює 40 см^2 , а одна зі сторін — 5 см .
128. Чи на одній прямій розташовані точки A , B і C , якщо:
а) $AB = 5 \text{ дм}$, $BC = 7 \text{ дм}$, $AC = 10 \text{ дм}$;
б) $AB = 35 \text{ см}$, $BC = 45 \text{ см}$, $AC = 1 \text{ дм}$;
в) $AB = \frac{3}{4}$ дюйма, $BC = \frac{2}{3}$ дюйма, $AC = \frac{1}{12}$ дюйма?
129. Перемалюй у зошит фігуру, зображену на малюнку 3.23. Розфарбуй її двома кольорами.



Мал. 3.23

ГЕОМЕТРІЯ НАВКОЛО НАС

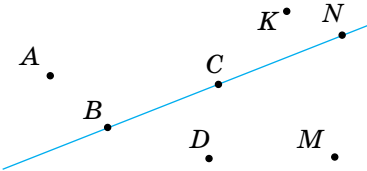


НСК «Олімпійський» у м. Київ

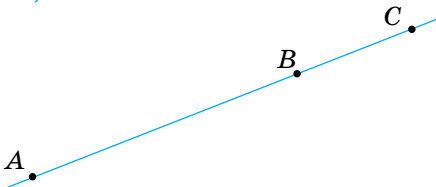
ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

А

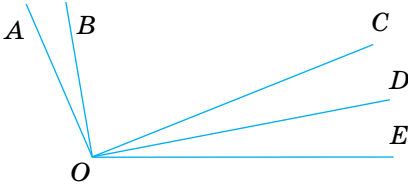
- 1 Які з точок:
 а) належать прямій a ;
 б) не належать прямій a ?



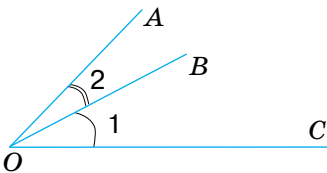
- 2 $AB = \frac{2}{3} AC, BC = 5$.
 AB, AC



- 3 Запиши кути:
 а) гострі;
 б) прямі;
 в) тупі.

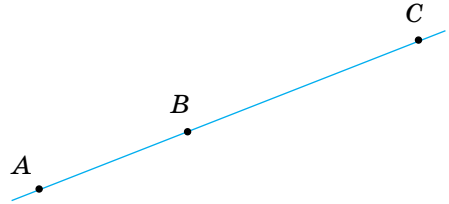


- 4 $\angle AOC = 50^\circ$;
 $\angle 1 - \angle 2 = 10^\circ$.
 $\angle 1, \angle 2$

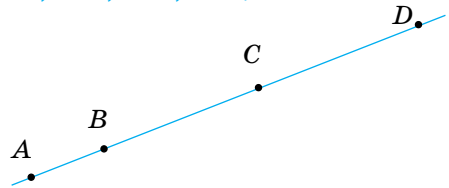


Б

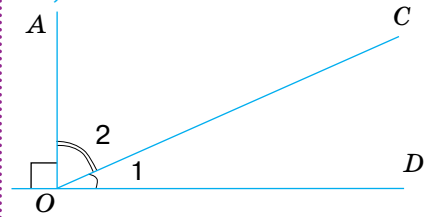
- $AC = 10, AB : BC = 2 : 3$.
 AB, BC



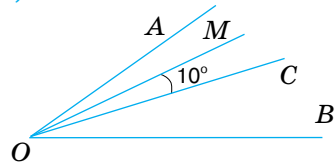
- $AD = 20, BC = CD = 2AB$.
 AB, BC, CD, BD, AC



- $\angle 2 = 2\angle 1$.
 $\angle 1, \angle 2$



- OC — бісектриса $\angle AOB$,
 $\angle AOM = \angle MOC$.
 $\angle AOB, \angle MOB$



САМОСТІЙНА РОБОТА

ВАРІАНТ 1

1. C — внутрішня точка відрізка AB . $AC = 6$ см, відрізок BC на 2 см менший від AC . Знайди довжину відрізка AB .
2. $\angle AOB = 130^\circ$, OC — його бісектриса. Знайди $\angle BOC$.
3. Точки A , B і C лежать на одній прямій. $AB = 9$ см, $BC = 4$ см. Знайди довжину відрізка AC . Розглянь два варіанти.
4. Промінь OC ділить $\angle AOB$ на два кути так, що один із них у 3 рази більший за інший. Знайди $\angle AOC$ і $\angle BOC$, якщо $\angle AOB = 80^\circ$.

ВАРІАНТ 2

1. C — внутрішня точка відрізка AB . $BC = 4$ см, відрізок AC у 2 рази більший за BC . Знайди довжину відрізка AB .
2. OC — бісектриса кута AOB , $\angle AOC = 50^\circ$. Знайди $\angle AOB$.
3. Точки M , N і K лежать на одній прямій. $MN = 6$ см, $NK = 10$ см. Знайди довжину відрізка MK . Розглянь два варіанти.
4. Промінь OC ділить $\angle AOB$ на два кути так, що один із них на 20° більший за інший. Знайди $\angle AOC$ і $\angle BOC$, якщо $\angle AOB = 70^\circ$.

ВАРІАНТ 3

1. C — внутрішня точка відрізка AB . $AC = 4$ см, відрізок BC на 3 см більший за AC . Знайди довжину відрізка AB .
2. $\angle AOB = 60^\circ$, OC — його бісектриса. Знайди $\angle AOC$.
3. Точки E , F і P лежать на одній прямій. $EF = 7$ см, $FP = 3$ см. Знайди довжину відрізка EP . Розглянь два варіанти.
4. Промінь OC ділить $\angle AOB$ на два кути так, що $\angle AOC : \angle BOC = 2 : 3$. Знайди $\angle AOC$ і $\angle BOC$, якщо $\angle AOB = 100^\circ$.

ВАРІАНТ 4

1. C — внутрішня точка відрізка AB . $AC = 9$ см, відрізок BC у 3 рази менший від AC . Знайди довжину відрізка AB .
2. OC — бісектриса кута AOB . $\angle BOC = 40^\circ$. Знайди $\angle AOB$.
3. Точки K , P і T лежать на одній прямій. $KP = 12$ см, $PT = 15$ см. Знайди довжину відрізка KT . Розглянь два варіанти.
4. Промінь OC ділить $\angle AOB$ на два кути так, що один із них на 30° менший від іншого. Знайди $\angle AOC$ і $\angle BOC$, якщо $\angle AOB = 120^\circ$.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1 Прямі a і b перетинаються в точці O . Якій прямій належить точка O ?	А a Б b	В a і b Г не належить жодній
2 На скільки частин ділять площину дві прямі, що перетинаються?	А на 2 Б на 3	В на 4 Г на 6
3 Яка з трьох точок лежить між двома іншими, якщо $XU = 3$, $YZ = 7$, $XZ = 4$?	А X Б Y	В Z Г жодна
4 M — середина відрізка AB , $AM = 7$ см. Знайди довжину відрізка AB .	А 14 см Б 21 см	В 3,5 см Г 7 см
5 K — внутрішня точка відрізка AB , $AK = 3$ см, $AB = 10$ см. Знайди довжину відрізка KB .	А 13 см Б 7 см	В 30 см Г 8 см
6 Знайди міру кута, якщо його бісектриса утворює зі стороною кут 20° .	А 20° Б 10°	В 30° Г 40°
7 $\angle AOB = 110^\circ$, OM — його внутрішній промінь, $\angle BOM = 60^\circ$. Знайди $\angle AOM$.	А 50° Б 170°	В 90° Г 70°
8 OM — внутрішній промінь кута AOB , $\angle AOM = 40^\circ$, $\angle BOM$ — на 10° більший. Знайди $\angle AOB$.	А 70° Б 50°	В 90° Г 44°
9 B — внутрішня точка відрізка AC . $AB = 5$ см, $BC = 12$ см. Знайди відстань між серединами відрізків AB і BC .	А 2,5 см Б 6 см	В 8,5 см Г 3,5 см
10 $\angle AOB = 50^\circ$, $\angle BOC = 20^\circ$. Знайди $\angle AOC$.	А 70° Б 30° або 70° В 30° Г 70° або 40°	

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТЕМАТИЧНОГО КОНТРОЛЮ

1. Точка A лежить між точками P і M . Знайди довжину відрізка AM , якщо $PM = 10$ см, $PA = 3,5$ см.

А 13,5 см Б 7,5 см В 6,5 см Г 4,5 см

2. Відомо, що $A \in a, B \in a, C \in a, K \notin a$. Точка B лежить між точками A і C . Які з променів є доповняльними?

А AB і BC Б BC і BK В CA і CK Г BA і BC

3. Точки A, B і C лежать на одній прямій. Яка з точок лежить між двома іншими, якщо $AB = 47$ см, $BC = 72$ см, $AC = 25$ см?

А A Б B В C Г не можна встановити

4. OK — внутрішній промінь кута AOB . Установи відповідність між кутами, заданими умовами (1–3), та їх градусними мірами (А–Д).

1 AOB , якщо $\angle AOK = 30^\circ, \angle KOB = 40^\circ$ А 26°

2 KOB , якщо $\angle AOB = 79^\circ, \angle KOA = 53^\circ$ Б 30°

3 KOA , якщо він на 20° менший від В 50°

кута KOB і $\angle AOB = 80^\circ$ Г 70°

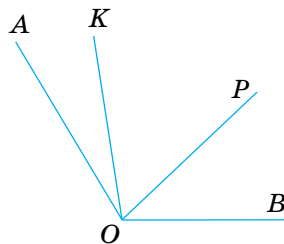
Д 132°

5. Точка O належить відрізку AB , довжина якого дорівнює 7,5 см. Знайди довжини відрізків AO і OB , якщо $AO : OB = 2 : 3$.

6. Накресли $\angle ABC = 120^\circ$. Проведи його бісектрису BM і бісектрису BK кута MBC . Знайди міри кутів KBC і ABK .

7. Точки A, B і C лежать на одній прямій, $AB = 7,3$ см, $BC = 3,7$ см. Знайди довжину відрізка AC . Розглянь всі можливі варіанти.

8. Відомо, що $\angle AOP = 80^\circ, \angle KOB = 95^\circ$ (мал. 3.24). Знайди $\angle KOP$, якщо $\angle AOB = 120^\circ$.



Мал. 3.24

Додаткове завдання

9. OC — внутрішній промінь кута AOB . OM і OK — бісектриси кутів AOC і BOC відповідно.

Знайди кут MOK , якщо $\angle AOB = 72^\circ$.

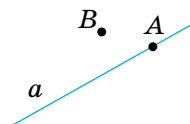
ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке геометрія?
2. Що таке планіметрія?
3. Наведи приклади плоских і неплоских фігур.
4. Опиши поняття *точка*.
5. Опиши поняття *пряма*.
6. Опиши поняття *площина*.
7. Наведи приклади матеріальних об'єктів, моделями яких є: точка, пряма, площина.
8. Що означають записи $A \in a$, $A \notin b$?
9. Що означає вислів «точка B лежить між точками A і C »?
10. Сформулюй основні властивості розміщення точок на прямій.
11. Що таке промінь?
12. Як позначають промені?
13. Які промені називають доповняльними?
14. Що таке відрізок?
15. Що таке кінці відрізка?
16. У яких одиницях вимірюють довжини відрізків?
17. Сформулюй основні властивості вимірювання відрізків.
18. Що таке середина відрізка?
19. Яка нерівність виконується для будь-яких трьох точок?
20. Що таке відстань між двома точками?
21. Яку фігуру називають кутом?
22. Як позначають кути?
23. Який кут називають гострим?
24. Який кут називають тупим?
25. Який кут називають прямим?
26. Який кут називають розгорнутим?
27. У яких одиницях вимірюють кути?
28. Що таке внутрішня область кута?
29. Що таке внутрішній промінь кута?
30. Сформулюй основні властивості вимірювання кутів.
31. Що таке бісектриса кута?
32. Які кути називають рівними?

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 1

Геометрія — наука про геометричні фігури та їх властивості. Найпростіші геометричні фігури — *точка, пряма, площина*.

Якщо точка A лежить на прямій a , говорять, що пряма a проходить через точку A , записують: $A \in a$. Якщо точка B не лежить на прямій a , пишуть: $B \notin a$.

**Основні властивості розміщення точок на прямій**

- Хоч би яка була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що їй не належать.
- Через будь-які дві різні точки можна провести пряму, і тільки одну.
- Із трьох різних точок прямої одна, і тільки одна, лежить між двома іншими.

Частини прямої — *відрізок і промінь*.

Відрізок AB — це частина прямої, що містить точки A, B і всі точки, що лежать між ними. Довжина відрізка — відстань між його кінцями.

**Основні властивості вимірювання відрізків**

- Кожний відрізок має певну довжину.
- Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які його розбиває будь-яка внутрішня точка.

Частину площини, обмежену двома променями зі спільним початком, називають *кутом*. Кути бувають гострі, прямі, тупі, розгорнуті й більші за розгорнуті.

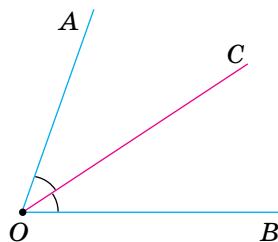
Основні властивості вимірювання кутів

- Кожний кут має певну міру.
- Міра кута дорівнює сумі мір кутів, на які даний кут розбивається його внутрішнім променем.

Основні властивості відкладання відрізків і кутів

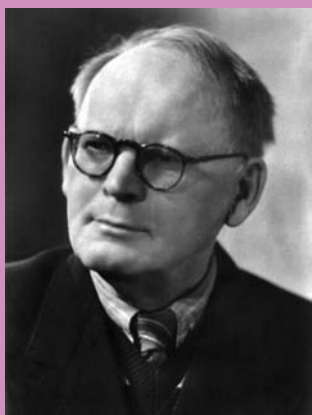
- На будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок даної довжини, і тільки один.
- Від будь-якого променя з одного боку від нього можна відкласти кут заданої міри, і тільки один.

Бісектриса кута — внутрішній промінь, який розбиває даний кут на два рівні кути.



РОЗДІЛ 2

Взаємне розташування прямих на площині



Геометрія Евкліда є лише першим кроком до вивчення форм реального простору.

О. Смогоржевський

У цьому розділі підручника ти розшириш і поглибиш свої знання про прямі та промені однієї площини, ознайомишся з дуже важливими поняттями: **суміжні кути, вертикальні кути, перпендикулярні прямі, паралельні прямі** тощо, а також із важливими загально-математичними поняттями: **аксіома, теорема, наслідок, доведення, ознака, означення**.

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- суміжні кути — supplementary angles
- вертикальні кути — vertical angles
- перпендикулярні прямі — perpendicular lines
- паралельні прямі — parallel lines

§ 4 СУМІЖНІ КУТИ

Два кути, на які розбивається розгорнутий кут його внутрішнім променем, називають *суміжними*.

Одна сторона в суміжних кутів спільна, а дві інші — доповняльні промені. Якщо точки A , O , B лежать на одній прямій, а C — довільна точка, яка не належить прямій AB , то кути AOC і COB — суміжні (мал. 4.1).

Властивість суміжних кутів сформулюємо у вигляді *теорема*.

У математиці теоремою називають кожне твердження, істинність якого обґрунтовується за допомогою логічних міркувань. Ланцюжок таких міркувань називають доведенням¹.

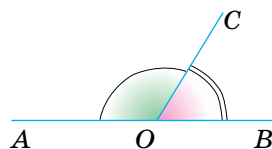
У нашому підручнику теорема надруковано жирним шрифтом і пронумеровано.

Теорема 1. Сума мір суміжних кутів дорівнює 180° .

Отже, хоч би якими були суміжні кути, сума їх мір дорівнює 180° .

КЛЮЧОВІ СЛОВА

суміжні кути — supplementary angles



Мал. 4.1

Доведення. Об'єднання двох суміжних кутів є розгорнутим кутом. Міра розгорнутого кута дорівнює 180° .

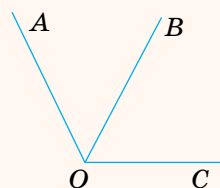
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Слово *суміжні* вживають не тільки щодо кутів. *Суміжний* — той, що має спільну межу, прилеглий до чогось, сусідній. Можна говорити про суміжні кімнати, суміжні поля тощо. Щодо кутів це поняття має особливий зміст.

Не будь-які два кути зі спільною межею називають *суміжними*. Наприклад, зображені на малюнку 4.2 кути AOB і BOC мають спільну сторону OB , але не є суміжними кутами.

Суміжні кути — це два кути, які перебувають у певному відношенні.

Один кут не може бути суміжним. Якщо говоримо, що якийсь кут суміжний, то обов'язково маємо закінчити думку: суміжний із яким кутом? Відношення суміжності кутів має таку властивість: **якщо кут A суміжний із кутом B , то і кут B суміжний із кутом A .**



Мал. 4.2

¹ Докладні відомості про теорему, їх структуру та види прочитай у § 9.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які кути називають суміжними?
2. Сформулюй і доведи властивість суміжних кутів.
3. Сума двох кутів дорівнює 180° . Чи можна стверджувати, що ці кути суміжні?
4. Два кути мають спільну сторону. Чи можна стверджувати, що ці кути суміжні?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Знайди міри суміжних кутів, якщо один із них на 50° більший ніж інший (мал. 4.3).

- Нехай міра кута AOB дорівнює x , тоді міра кута BOC дорівнює $x + 50^\circ$.

За властивістю суміжних кутів:

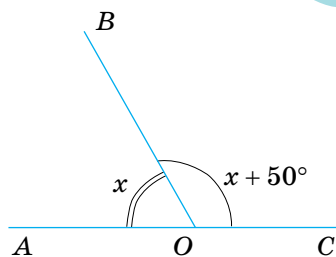
$$x + x + 50^\circ = 180^\circ,$$

$$2x + 50^\circ = 180^\circ,$$

$$2x = 130^\circ,$$

$$x = 65^\circ. \text{ Отже, } \angle AOB = 65^\circ.$$

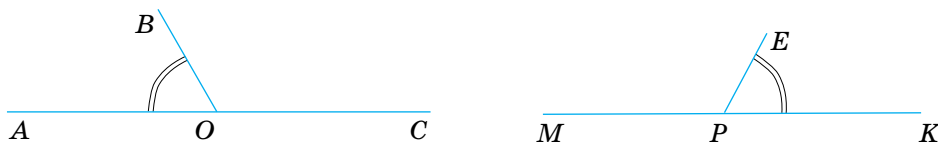
$$\angle BOC = 65^\circ + 50^\circ = 115^\circ.$$



Мал. 4.3

2. Доведи, що кути, суміжні з рівними кутами, рівні.

- Нехай кути BOA і EPK рівні (мал. 4.4).



Мал. 4.4

Доведемо, що тоді будуть рівними кути BOC і EPM .

Оскільки сума суміжних кутів дорівнює 180° , то

$$\angle BOC = 180^\circ - \angle BOA = 180^\circ - \angle EPK = \angle MPE.$$

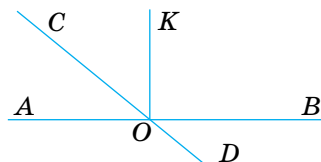
Отже, $\angle BOC = \angle MPE$.

ВИКОНАЄМО УСНО

130. Назви пари суміжних кутів, зображених на малюнку 4.5 (с. 42). Чи можна вважати суміжними



кути KOB і KOA , зображені на малюнку? А кути KOB і KOC ?



Мал. 4.5

131. Міра одного із суміжних кутів дорівнює 30° . Знайди міру іншого кута.

А 30° Б 60° В 120° Г 150°

132. Чи можуть суміжні кути дорівнювати:
а) 36° і 144° ; б) 123° і 67° ; в) 90° і 90° ?

133. Дано гострий кут A . Чи може бути гострим суміжний із ним кут? А прямим?

134. Дано тупий кут. Яким є суміжний із ним кут?

135. Сума кутів A і B дорівнює 180° . Чи суміжні вони?

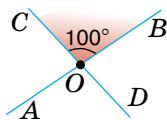
136. Назви пари суміжних кутів, що утворюються конструкцією стелажа (мал. 4.6).



Мал. 4.6

137. Розгорнутий кут двома внутрішніми променями розбито на три менші кути. Чи можна їх уважати суміжними кутами?

138. Назви кути, суміжні з кутом COB (мал. 4.7). Знайди градусні міри цих кутів.



Мал. 4.7

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

139. Накресли гострий кут $МОК$ і побудуй суміжний із ним кут.

140. Накресли тупий кут $СОР$ і побудуй суміжний із ним кут.

141. Міра одного з двох суміжних кутів дорівнює 50° . Знайди міру іншого кута. Побудуй ці кути.

142. Дано кут, міра якого дорівнює 160° . Знайди міру суміжного з ним кута. Побудуй ці кути. Зафарбуй їх різними кольорами.

143. Знайдіть міру кута, суміжного з кутом ABC , якщо:



а) $\angle ABC = 34^\circ$; в) $\angle ABC = 13^\circ 13'$;
б) $\angle ABC = 111^\circ$; г) $\angle ABC = 135^\circ 47'$.

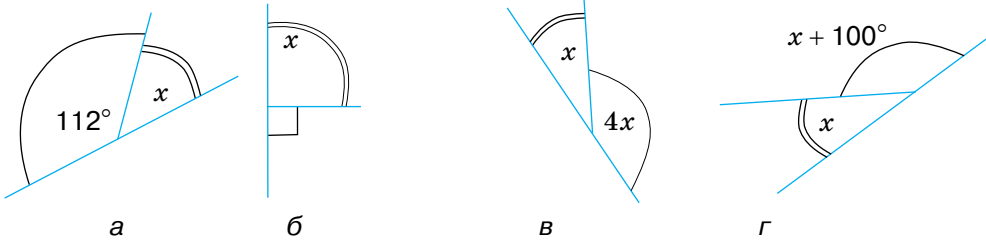


144. Знайди міру кута, суміжного з кутом AOB , якщо:

- а) $\angle AOB = 27^\circ$; в) $\angle AOB = 56^\circ 34'$;
 б) $\angle AOB = 132^\circ$; г) $\angle AOB = 117^\circ 48'$.

145. Доведи: якщо суміжні кути рівні, то вони прямі.

146. Запиши відповідні рівняння до малюнків (мал. 4.8) та знайди невідомі градусні міри кутів.



Мал. 4.8

147. Знайди міри суміжних кутів, якщо один із них:

- а) на 42° менший за інший;
 б) у три рази більший від іншого.

148. Знайди міри суміжних кутів, якщо один із них:

- а) на 30° більший за інший;
 б) у два рази менший від іншого.

149. Знайди міри суміжних кутів, які відносяться як:

- а) $4 : 5$; б) $3 : 2$.

150. Знайди міри суміжних кутів, які відносяться як:

- а) $1 : 4$; б) $7 : 8$.

151. Find the measures of supplementary angles that are related as:

- а) $1 : 2$; б) $2 : 7$.

152. Перенеси таблицю в зошит і заповни її.

Даний кут	10°	50°	60°	90°	120°	170°
Суміжний з ним кут						

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

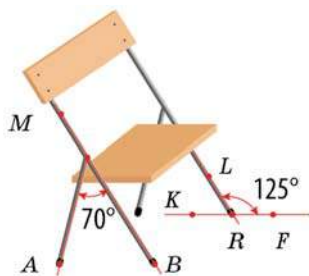
153. Намалюйте прямі AB , CD і EF так, щоб вони перетиналися в точці O . Скільки пар суміжних кутів утворилося? Запишіть ці кути.

154. Кути $МОК$ і $КОР$ — суміжні, OE — бісектриса кута $МОК$. Знайди кут $КОР$, якщо:

- а) $\angle МОЕ = 24^\circ$; б) $\angle КОЕ = 50^\circ$; в) $\angle МОЕ = \angle КОР$.



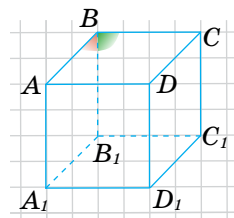
155. Куты $\angle AOB$ і $\angle BOC$ — суміжні, OM — бісектриса кута $\angle BOC$. Знайди $\angle AOB$, якщо:
- $\angle MOC = 30^\circ$;
 - $\angle BOM = 45^\circ$;
 - $\angle AOB = \angle MOB$.



Мал. 4.9

156. Розглянь малюнок 4.9. Знайди міри кутів:
- між задньою ніжкою стільця і спинкою;
 - між передньою ніжкою стільця й підлогою. Зроби відповідні малюнки суміжних кутів у зошиті.

157. Накреслить куб $ABCA_1B_1C_1D_1$ (мал. 4.10). Чи можна вважати суміжними його кути $\angle ABB_1$ і $\angle B_1BC$? Чому? Чому дорівнює міра кута, суміжного з кутом $\angle ABB_1$?



Мал. 4.10

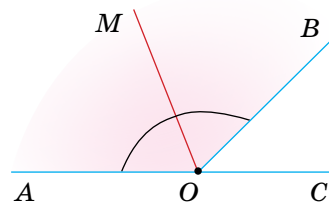
158. Знайдіть кут між бісектрисами суміжних кутів.

159. Кут $\angle AOB$ має 180° . Промінь OM ділить його на два кути, один із яких більший за інший на 20° . Знайди міри цих двох кутів, а також кут між їх бісектрисами.

160. Знайди міру кута, якщо сума двох суміжних із ним кутів дорівнює 100° .

161. Куты $\angle AOB$ і $\angle BOC$ — суміжні. OM — бісектриса кута $\angle AOB$ (мал. 4.11). Знайди $\angle MOB$, якщо:

- $\angle AOB - \angle BOC = 40^\circ$;
- $\angle AOB : \angle BOC = 5 : 1$;
- $\angle MOB = 2\angle BOC$;
- $\angle BOC$ становить $\frac{6}{7}\angle AOM$.

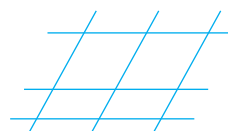


Мал. 4.11

162. Куты $\angle AOB$ і $\angle BOC$ — суміжні. OM — бісектриса кута $\angle AOB$ (мал. 4.11). Знайди кут $\angle MOC$, якщо:

- $\angle AOB - \angle BOC = 60^\circ$;
- $\angle AOB : \angle BOC = 3 : 2$;
- $\angle MOB - \angle BOC = 15^\circ$;
- $\angle BOC$ становить $\frac{2}{5}\angle MOB$.

163. Скільки пар суміжних кутів зображено на малюнку 4.12?



Мал. 4.12

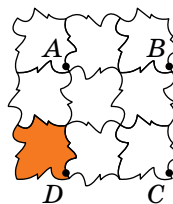
ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

164. Перегинаючи аркуш паперу, утвори пару суміжних кутів.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

165. Ребра двох кубів відносяться як 1 : 2. Як відносяться їх об'єми? А площі поверхонь?
166. Познач на координатній площині точки $A(1; -1)$, $B(1; 3)$, $C(5; 3)$ і $D(5; -1)$ та сполучи їх послідовно відрізками. Як називають утворену фігуру $ABCD$? Які з її сторін паралельні, а які — перпендикулярні?
167. Фігура, зображена на малюнку 4.13, складатиметься з 9 рівних листків. Знайди площу одного листка, якщо A , B , C , D — вершини квадрата з площею S .

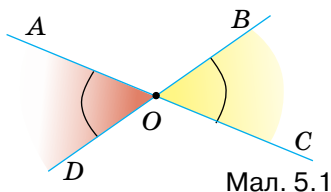


Мал. 4.13

§ 5

ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ

Два кути називають *вертикальними*, якщо сторони одного є доповняльними променями сторін другого.



Мал. 5.1

КЛЮЧОВІ СЛОВА

вертикальні кути —
vertical angles

Наприклад, якщо прями AC і BD перетинаються в точці O , то кути AOD і BOC — вертикальні (мал. 5.1). Кожний із них суміжний із кутом AOB . Кути AOB і COD також вертикальні.

Теорема 2.
Вертикальні кути рівні.

Доведення. Нехай AOD і BOC — довільні вертикальні кути (мал. 5.1). Кожний із них суміжний із кутом AOB . За теоремою про суміжні кути:
 $\angle AOD + \angle AOB = 180^\circ$ і $\angle BOC + \angle AOB = 180^\circ$, тоді
 $\angle AOD = 180^\circ - \angle AOB$ і $\angle BOC = 180^\circ - \angle AOB$.

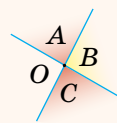
Праві частини цих рівностей однакові, тому $\angle AOD = \angle BOC$. А це й треба було довести.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Слово *вертикальні* стосується не тільки кутів. Здебільшого вертикально розміщеним вважають продовгуватий предмет, розташований у напрямі виска (перпендикулярно до горизонту).

Завжди правильна властивість: **якщо кут A вертикальний із кутом C , то і кут C вертикальний із кутом A .**

Нехай кут A суміжний із кутом B , а кут B суміжний з кутом C . Що можна сказати про кути A і C ? Вони або вертикальні, або кут C — той самий кут A (мал. 5.2).



Мал. 5.2

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які кути називають вертикальними?
2. Сформулюй властивість вертикальних кутів.
3. Доведи властивість вертикальних кутів.

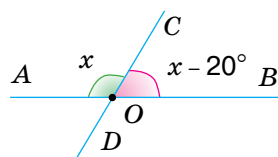
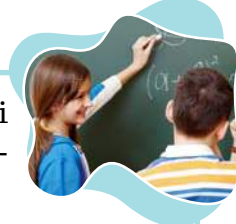
ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Сума двох кутів, які утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 104° . Знайди міру кожного із цих кутів.

- При перетині двох прямих утворюються вертикальні і суміжні кути. Сума суміжних кутів дорівнює 180° , тому вони умову задачі не задовольняють. Отже, сума вертикальних кутів дорівнює 104° . Оскільки вертикальні кути рівні, то кожен із них дорівнює $104^\circ : 2 = 52^\circ$. Отже, міри цих кутів: 52° і 52° .

2. Знайди міри кутів, утворених при перетині двох прямих, якщо один із них на 20° менший за інший (мал. 5.3).

- Оскільки вертикальні кути рівні, то вони умову задачі не задовольняють. Робимо висновок: один із суміжних кутів на 20° менший за інший.



Мал. 5.3

Нехай $\angle AOC = x$, тоді $\angle COB = x - 20^\circ$.

$\angle AOC + \angle COB = 180^\circ$ (за властивістю суміжних кутів).

$$x + x - 20^\circ = 180^\circ,$$

$$2x = 200^\circ,$$

$$x = 100^\circ. \text{ Отже, } \angle AOC = 100^\circ,$$

$$\angle COB = 100^\circ - 20^\circ = 80^\circ.$$

За властивістю вертикальних кутів $\angle BOD = \angle AOC = 100^\circ$,

$$\angle AOD = \angle COB = 80^\circ.$$

Отже, міри утворених кутів — $80^\circ, 100^\circ, 80^\circ, 100^\circ$.

ВИКОНАЄМО УСНО



168. На території України постійно знаходять рештки трипільської культури (IV–III тис. до н. е.). Трипільці були хліборобами, розводили худобу, а також займалися гончарством. Весь крам вони оздоблювали візерунками. Розглянь деякі з візерунків (мал. 5.4). На яких з них є вертикальні кути?



А



Б





В

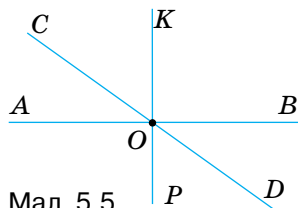


Г

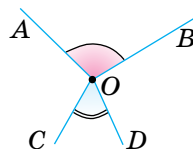


Мал. 5.4. Трипільські орнаменти й мотиви з української народної вишивки

169. Дано гострий кут A . Чи може бути тупим вертикальний з ним кут? А прямим?
170. Дано тупий кут. Яким є вертикальний з ним кут?
171. Назви вертикальні кути, зображені на малюнку 5.5.
172.  Кути A і B рівні. Чи вертикальні вони?
173.  Кути A і B не рівні. Чи можуть вони бути вертикальними?
174. Чи вертикальні кути AOB і COD , зображені на малюнку 5.6?

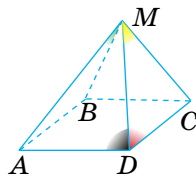


Мал. 5.5



Мал. 5.6

175. Дано піраміду $MABCD$ (мал. 5.7). Чи можна вважати вертикальними кути AMB і CMD ? А суміжними кути ADM і CDM ? Чому?



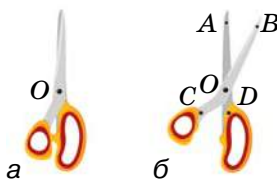
Мал. 5.7

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

176. Розгляньте конструкцію ножиць (мал. 5.8) на малюнку а). Чи є на малюнку б) вертикальні кути? А суміжні? Зробіть відповідні записи в зошиті.



177. Прямі AB і PK перетинаються в точці M . Зроби відповідний малюнок. Який знак потрібно поставити замість *:
 $\angle AMP$ * $\angle KMB$?



А > Б < В = Г ≠

Мал. 5.8

178. Міра одного з двох вертикальних кутів дорівнює 70° . Знайди міру іншого кута. Побудуй ці кути.
179. Міра одного з двох вертикальних кутів дорівнює 130° . Знайди міру іншого кута. Побудуй ці кути.
180. Накресли кут, що має 45° . Побудуй вертикальний з ним кут.

181. Сума мір двох вертикальних кутів дорівнює 80° . Знайди міру кожного із цих кутів.

182. The sum of the measures of two vertical angles is 60° . Find the measure of each of these angles.

183. Сума мір двох вертикальних кутів дорівнює 120° . Знайди міру кожного із цих кутів.

184. Знайдіть міри кутів, утворених при перетині двох прямих, якщо міра одного з них дорівнює:

а) 50° ; б) 110° ; в) n° .

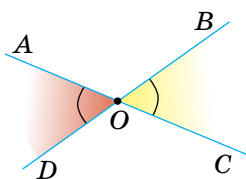
185. Знайди міри кутів, утворених при перетині двох прямих, якщо міра одного з них дорівнює:

а) 35° ; б) 140° ; в) m° .

186. Перенеси таблицю в зошит і заповни її.

Даний кут	10°	50°	60°	90°	120°	170°
Вертикальний з ним кут						
Суміжний з ним кут						

187. Перемалюй у зошит малюнок 5.9 і подану нижче таблицю. Заповни її за малюнком.



Мал. 5.9

$\angle AOD$	66°				$50^\circ 5'$	
$\angle AOB$		135°		177°		
$\angle BOC$			39°		$33^\circ 33'$	
$\angle DOC$			97°			$99^\circ 9'$

188. Знайди кути, утворені при перетині двох прямих, якщо сума трьох із них дорівнює 240° .

189. Знайди кути, утворені при перетині двох прямих, якщо сума трьох із них дорівнює 330° .

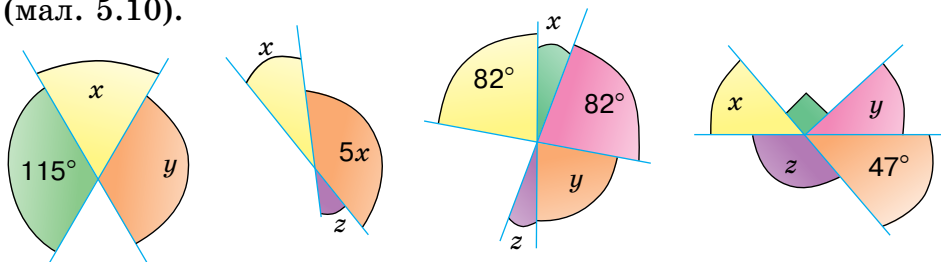
190. Сума двох кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 100° . Знайди міру більшого з утворених кутів.

191. Сума двох кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 260° . Знайди міру меншого з утворених кутів.

192. Прямі AB , CD і EF перетинаються в точці O . $\angle COE = 40^\circ$, $\angle BOD = 65^\circ$. Знайди міри всіх інших кутів, що утворилися, якщо OE — внутрішній промінь $\angle COB$.

193. Прямі MT , PK і EF перетинаються в точці O . $\angle POM = 50^\circ$, $\angle TOF = 80^\circ$. Знайди міри всіх інших кутів, що утворилися, якщо OP — внутрішній промінь $\angle MOE$.

194. Запишіть рівняння та знайдіть градусні міри кутів x , y та z (мал. 5.10).



Мал. 5.10

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ Б

195. Чи можуть кути, що утворилися при перетині двох прямих, бути пропорційними числам:

а) 2, 3, 2, 13; б) 1, 4, 1 і 4; в) 3, 4, 5, 6?

196. Чи можуть кути, що утворилися при перетині двох прямих, бути пропорційними числам:

а) 2, 3, 4 і 5; б) 5, 5, 5 і 8; в) 1, 2, 1, 2?



197. Знайди міри кутів, утворених при перетині двох прямих, якщо: а) один із них на 50° більший за інший;
б) один із них дорівнює половині іншого;
в) сума мір двох із цих кутів дорівнює 80° .

198. Знайди міри кутів, утворених при перетині двох прямих, якщо: а) один із них на 30° менший за інший;
б) один із них у три рази більший від іншого;
в) сума мір двох із цих кутів дорівнює 50° .

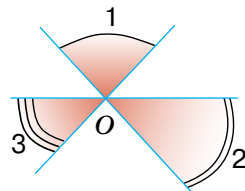
199. Знайди міру кута, якщо сума двох суміжних із ним кутів дорівнює 100° .

200. Прямі AB , CD і EF перетинаються в точці O , причому OE — бісектриса кута COB . Знайди міри кутів AOD , AOE і EOD , якщо $\angle COE = 36^\circ$.

201. Прямі MT , PK і EF перетинаються в точці O , причому OT — бісектриса кута EOK . Знайди міри кутів POF , MOE і $МОК$, якщо $\angle KOT = 48^\circ$.

202. Побудуйте прямі AB , CD і EF так, щоб вони перетиналися в точці O . Скільки пар вертикальних кутів утворилося? Запишіть ці кути.

203. На малюнку 5.11 зображено три прямі, які перетинаються в точці O . Доведи, що $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$.



Мал. 5.11

204. Знайди кути, утворені при перетині трьох прямих (мал. 5.11), якщо $\angle 1 : \angle 2 : \angle 3 = 5 : 4 : 3$.

205. Знайди кути, утворені при перетині трьох прямих (мал. 5.11), якщо $\angle 1$ у два рази більший за кут $\angle 3$ і на 20° більший за $\angle 2$.

206. Знайди кути, утворені при перетині двох прямих, якщо міра одного з них становить четверту частину від суми інших.

207. Знайди кути, утворені при перетині двох прямих, якщо міра одного з них становить п'яту частину від суми інших.

208. Знайди кути, утворені при перетині двох прямих, якщо один з них у три рази більший за різницю двох інших кутів.

209. Трипільці широко використовували серпи. Вони склалися з невеликої кременевої пластинки, встромленої в зігнуту рогову чи дерев'яну оправу. Скільки пар вертикальних кутів зображено на одному з оздоблень такого серпа (мал. 5.12)?



Мал. 5.12

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

210. Змодельуйте зубочистками ситуацію. Два внутрішні промені розбивають розгорнутий кут на три менші кути. Чи будуть серед цих кутів вертикальні?
211. Перегинаючи аркуш паперу, утвори пару вертикальних кутів.

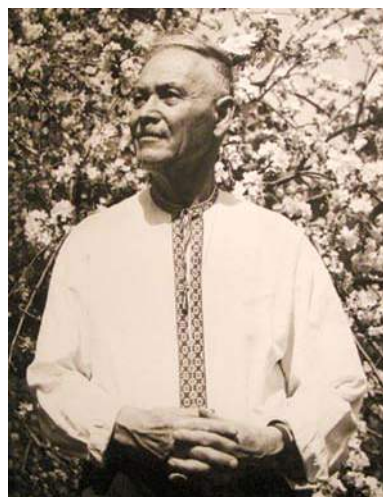


ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

212. Знайди об'єм куба, якщо сума довжин його ребер дорівнює 72 см.
213. Точка C — внутрішня точка відрізка AB , довжина якого дорівнює 30 см. Знайди довжину відрізка AC , якщо $AC : CB = 3 : 2$.
214. OM — бісектриса кута AOB , OK — бісектриса кута MOB . Знайди кут AOB , якщо $\angle KOB = 20^\circ$.



ГЕОМЕТРІЯ НАВКОЛО НАС



Орнаменти на фасадах житлових будинків у Новій Каховці, створені Григорієм Оксентійовичем Довженком в період 1952–1955 років шляхом різьблення

САМОСТІЙНА РОБОТА

ВАРІАНТ 1

1. Знайди кут, суміжний із кутом 68° .
2. Відрізки AB і KP перетинаються у внутрішній точці O так, що $\angle AOK = 50^\circ$. Знайди міри кутів AOP , BOP і BOK .
3. Один із суміжних кутів більший за інший на 18° . Знайди ці кути.
4. Знайди міри кутів, які утворюються при перетині двох прямих, якщо сума трьох із них дорівнює 280° .

ВАРІАНТ 2

1. Знайди кут, суміжний із кутом 123° .
2. Відрізки MN і KT перетинаються у внутрішній точці X так, що $\angle MXK = 65^\circ$. Знайди міри кутів MXT , TXN і KXN .
3. Знайди міри суміжних кутів, якщо один із них утричі більший за інший.
4. Знайди міри кутів, які утворюються при перетині двох прямих, якщо сума двох із них дорівнює 86° .

ВАРІАНТ 3

1. Знайди кут, суміжний із кутом 34° .
2. Відрізки AC і MP перетинаються у внутрішній точці O так, що $\angle MOC = 48^\circ$. Знайди міри кутів AOP , AOM і POC .
3. Знайди міри суміжних кутів, якщо один із них на 26° більший за інший.
4. Знайди міри кутів, які утворюються при перетині двох прямих, якщо сума двох із них дорівнює 236° .

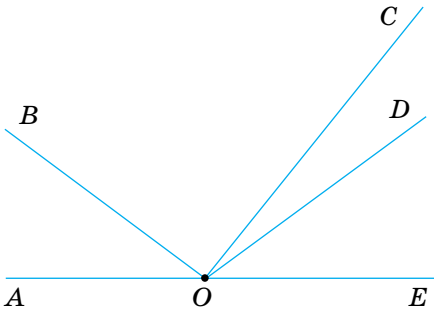
ВАРІАНТ 4

1. Знайди кут, суміжний із кутом 156° .
2. Відрізки AB і CD перетинаються у внутрішній точці M так, що $\angle AMC = 35^\circ$. Знайди міри кутів AMD , CMB і BMD .
3. Знайди міри суміжних кутів, якщо один із них у 5 разів менший від іншого.
4. Знайди міри кутів, які утворюються при перетині двох прямих, якщо сума трьох із них дорівнює 290° .

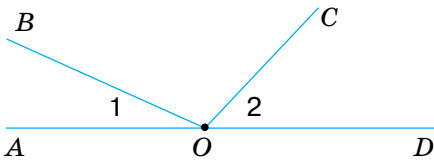
ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

А

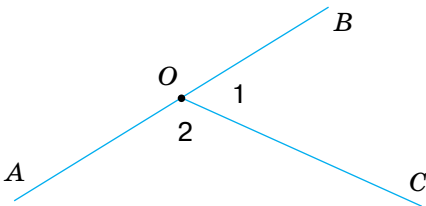
1 Знайди пари суміжних кутів.



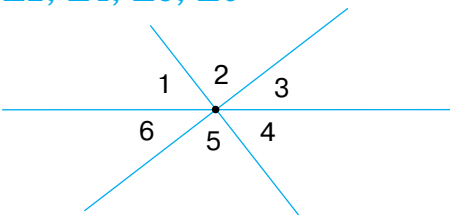
2 $\angle 1 = 30^\circ, \angle 2 = 45^\circ.$
 $\angle AOC, \angle BOC$



3 $\angle 2 - \angle 1 = 40^\circ.$
 $\angle 1, \angle 2$

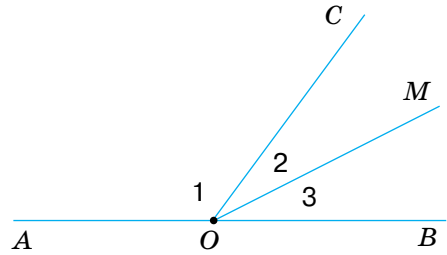


4 $\angle 1 = 60^\circ, \angle 3 = 40^\circ.$
 $\angle 2, \angle 4, \angle 5, \angle 6$

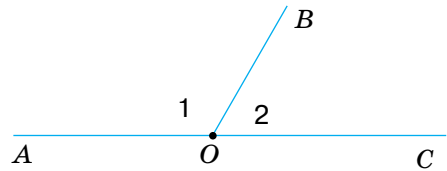


Б

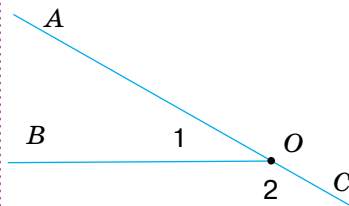
$\angle 1 = 120^\circ, \angle 2 = \angle 3.$
 $\angle 2, \angle AOM$



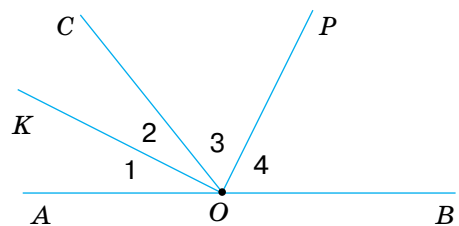
$\angle 1 = 2\angle 2.$
 $\angle 1, \angle 2$



$\angle 1 : \angle 2 = 2 : 7.$
 $\angle 1, \angle 2$



$\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4.$
Довести: $\angle KOP = 90^\circ$



§ 6

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ Й ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

Пригадай, як можуть розташовуватися на площині дві прямі. Якщо вони перетинаються, то утворюють чотири кути — дві пари вертикальних кутів. Тут і далі йдеться про кути, менші від розгорнутого. Менший із цих кутів вважають кутом між даними прямими. Наприклад, на малюнку 6.1 прямі AB і CD перетинаються під кутом 50° . Говорять також, що кут між прямими AB і CD дорівнює 50° .

Якщо дві прямі, перетинаючись, утворюють чотири прямі кути, говорять, що вони перетинаються під прямим кутом.

Дві прямі, які перетинаються під прямим кутом, називають *перпендикулярними прямими*. Прямі a і b на малюнку 6.2 перпендикулярні одна до одної.

Коротко пишуть: $a \perp b$ або $b \perp a$.

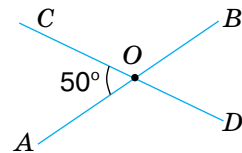
Відрізки або *промені* називають *перпендикулярними*, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.

Якщо відрізок AB лежить на прямій, перпендикулярній до прямої a , говорять, що *відрізок AB перпендикулярний до прямої a* . Якщо за такої умови точка B належить прямій a , то відрізок AB називають *перпендикуляром*, проведеним із точки A до прямої a (мал. 6.3). Точку B називають *основою перпендикуляра*, а довжину перпендикуляра AB — *відстанню від точки A до прямої a* .

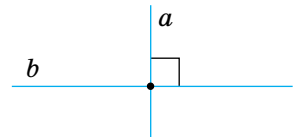
Через довільну точку P завжди можна провести пряму, перпендикулярну до даної прямої a . Це можна зробити, користуючись косинцем (мал. 6.4) або транспортиром (мал. 6.5).

КЛЮЧОВІ СЛОВА

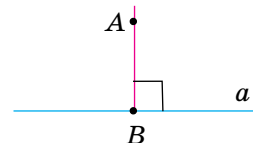
- перпендикулярні прямі — perpendicular lines
- паралельні прямі — parallel lines



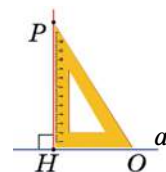
Мал. 6.1



Мал. 6.2



Мал. 6.3



Мал. 6.4

Згодом ти дізнаєшся, як можна виконати таку побудову за допомогою лінійки й циркуля.

Можна довести, що існує тільки одна пряма, яка перпендикулярна до даної прямої і проходить через дану точку.

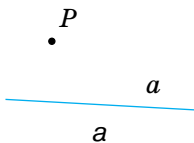
Не кожні дві прямі перетинаються. Особливої уваги заслуговують прямі, які не перетинаються й лежать в одній площині.

Дві прямі на площині називають *паралельними*, якщо вони не перетинаються. Якщо прямі a і b паралельні, пишуть $a \parallel b$ (мал. 6.6).

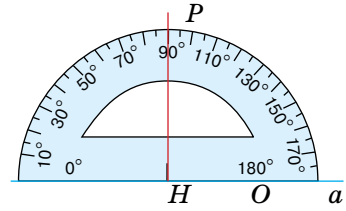
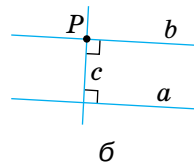
Уявлення про паралельні прямі дають лінії в зошиті, лінії нотного стану (мал. 6.7), протилежні ребра бруска (мал. 6.8).

Два *відрізки* або *промені* називають паралельними, якщо вони лежать на паралельних прямих.

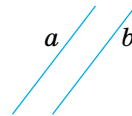
Через будь-яку точку P , яка не лежить на прямій a , можна провести пряму, паралельну прямій a (мал. 6.9, а). Для цього можна через точку P провести пряму c , перпендикулярну до прямої a , а потім — пряму b , перпендикулярну до прямої c (мал. 6.9, б). За такої побудови завжди $b \parallel a$. Можна скористатися також лінійкою і косинцем.



Мал. 6.9



Мал. 6.5



Мал. 6.6



Мал. 6.7

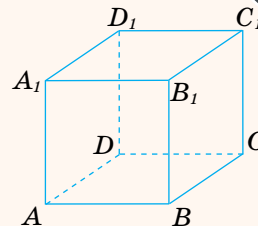


Мал. 6.8

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

1. Можна довести (спробуй!), що дві прямі однієї площини, які перпендикулярні до третьої прямої, — паралельні. Тобто, якщо $a \perp c$, $b \perp c$, то $a \parallel b$.

Але якщо прямі a і b не належать одній площині, то таке твердження неправильне. Наприклад, якщо $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, то $AB \perp BB_1$ і $B_1 C_1 \perp BB_1$ але прямі AB і $B_1 C_1$ не паралельні (мал. 6.10).



Мал. 6.10



2. Слово *паралельні* походить від грецького *παράλληλος*, яке означає «ті, що йдуть поруч». Якщо говорять, що якась пряма паралельна, то обов'язково слід сказати, якій саме прямій вона паралельна.

Отже, паралельність прямих — це своєрідне відношення між двома прямими. *Відношення паралельності прямих* має таку властивість: якщо $a \parallel b$, то $b \parallel a$. Іншими відношеннями є перпендикулярність прямих, рівність кутів тощо. Знаки цих відношень: \perp , $=$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке кут між прямими?
2. Які дві прямі називають:
 - а) перпендикулярними; б) паралельними?
3. Які відрізки називають:
 - а) перпендикулярними; б) паралельними?
4. За допомогою яких креслярських інструментів можна провести пряму: а) перпендикулярну; б) паралельну до даної прямої? Як це роблять?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Доведи, що бісектриси суміжних кутів перпендикулярні.

• Нехай $\angle AOB$ і $\angle BOC$ — суміжні кути. OK і OP — їх бісектриси (мал. 6.11).

$\angle KOP = \angle KOB + \angle BOP$. Оскільки OK і OP — бісектриси, то

$$\angle KOB = \frac{1}{2} \angle AOB,$$

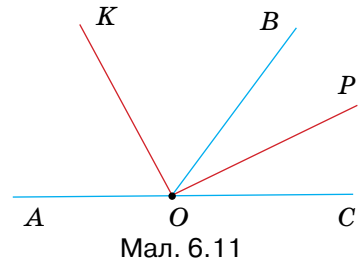
$$\angle BOP = \frac{1}{2} \angle BOC.$$

$$\text{Тоді } \angle KOP = \frac{1}{2} \angle AOB + \frac{1}{2} \angle BOC =$$

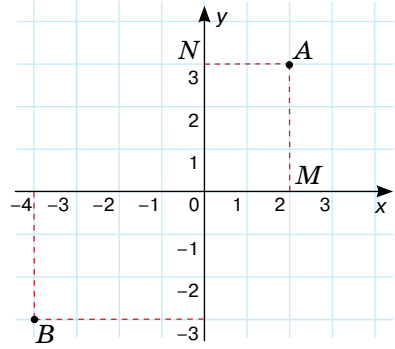
$$= \frac{1}{2} (\angle AOB + \angle BOC) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

Отже, $OK \perp OP$.

2. Познач на координатній площині точки $A(2; 3)$ і $B(-4; -3)$. Знайди відстань від цих точок до осей координат, якщо довжина одиничного відрізка дорівнює 1 см.



- З точок A і B опустимо перпендикуляри на осі координат (мал. 6.12). Довжина відрізка AM — відстань від точки A до осі Ox , а довжина відрізка AN — відстань від точки A до осі Oy . З малюнка видно, що $AM = 3$ см, а $AN = 2$ см. Аналогічно встановлюємо, що відстань від точки B до осей координат дорівнює 3 см і 4 см.



Мал. 6.12

ВИКОНАЄМО УСНО



215. Наведи приклади матеріальних моделей:



- а) перпендикулярних прямих;
- б) паралельних прямих.

216. На яких прапорах (мал. 6.13) можна побачити:

- а) паралельні відрізки; б) перпендикулярні відрізки?



Республіка
Тринідад і Тобаго



ПАР



Македонія



Ісландія

Мал. 6.13

217. Чи є в записі однієї з волинських мелодій, яку Леся Українка вибрала до «Лісової пісні» (мал. 6.14):

- а) паралельні відрізки;
- б) перпендикулярні відрізки?



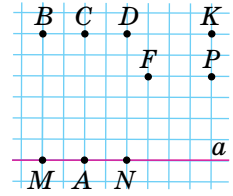
Мал. 6.14



218. Скориставшись малюнком 6.15 (с. 58), укажи:

- 1) через яку точку пройде пряма, що:

- а) перпендикулярна до прямої a і проходить через точку A ;
 б) перпендикулярна до прямої a і проходить через точку D ;
 в) паралельна прямій a і проходить через т. P ;
 г) паралельна прямій a і проходить через т. K .



Мал. 6.15

2) Яке з тверджень правильне:

- а) $AB \perp a$; в) $KP \perp a$; г) $BC \parallel a$;
 б) $BM \perp a$; г) $FK \parallel a$; д) $KP \parallel a$?

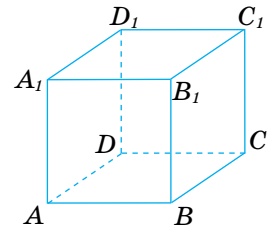
219. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямокутний паралелепіпед (мал. 6.16).

1) Назви відрізки:

- а) паралельні відрізку AA_1 ;
 б) паралельні відрізку AD ;
 в) перпендикулярні до відрізка AA_1 ;
 г) перпендикулярні до відрізка AD .

2) Яке з тверджень правильне:

- а) $AA_1 \perp AD$; в) $DC \perp AB$; г) $CD \parallel C_1 D_1$; е) $DD_1 \parallel A_1 D_1$;
 б) $B_1 C_1 \perp A_1 B_1$; г) $D_1 B \perp DB$; д) $A_1 D_1 \parallel AD$; є) $CD \parallel AB$?



Мал. 6.16

220. Відомо, що $a \parallel b$. Чи правильно, що $b \parallel a$?

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

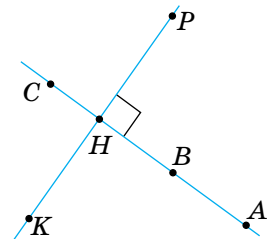
221. Проведи пряму a й познач точки M і N такі, що $M \in a$, $N \notin a$. Користуючись клітинками зошита, проведи через точки M і N прямі, перпендикулярні до прямої a .

222. Точки M і N лежать по різні боки від прямої a . Користуючись клітинками зошита, проведи через точки M і N прямі, паралельні прямій a .

223. Точка A не лежить на прямій c . Скільки прямих, перпендикулярних до прямої c , можна провести через точку A ?

224. Точка K не лежить на прямій a . Користуючись косинцем, побудуй перпендикуляр, проведений із точки K до прямої a .

225. Запишіть десять пар перпендикулярних відрізків, що є на малюнку 6.17. Чи є перпендикулярами до прямої KP відрізки AH , BH , CH , AB , BC ?



Мал. 6.17



226. Промені AB і CD не перетинаються.



Чи можна стверджувати, що вони паралельні?

227. Використовуючи малюнок 6.18 та символи \perp і \parallel , заповни пропуски:

а) $a \dots b$; в) $n \dots c$; г) $m \dots c$;

б) $m \dots n$; г) $a \dots d$; д) $b \dots d$.

228. Які зі стін на плані (мал. 6.19):

а) перпендикулярні; б) паралельні?

Зроби відповідні записи в зошиті.

229. Перпендикулярні прямі AB і CD перетинаються в точці O . OM — бісектриса кута COB . Знайди $\angle AOM$ і $\angle MOD$.

230. Познач на координатній площині точки $A(-3; 4)$, $B(1; 8)$, $C(4; 5)$ і $D(-2; -1)$. Знайди відстань від цих точок до осей координат, якщо довжина одиничного відрізка дорівнює 1 см. Перевір, чи перпендикулярні прямі AD і DC , AB і BC . Чи паралельні прямі AB і CD , AD і BC ?

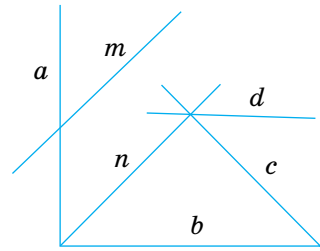
231. Познач на координатній площині точки $A(-3; -1)$ і $B(2; 4)$. Знайди відстань від цих точок до осей координат, якщо довжина одиничного відрізка дорівнює 1 см. Через ці точки проведи прямі, перпендикулярні до прямої AB . Знайди координати точок перетину побудованих прямих з осями координат. Чи паралельні побудовані прямі?

232. За допомогою транспортира побудуй $\angle AOB = 30^\circ$. Познач точку M таку, що $M \in OA$ і $OM = 4$ см. Із точки M опустити перпендикуляр на пряму OB . Вимірй відстань від точки M до OB .

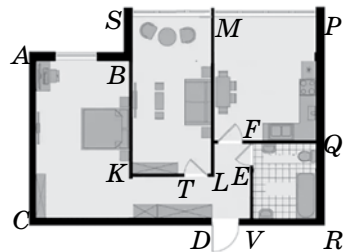
233. За допомогою транспортира побудуй $\angle AOB = 130^\circ$. Познач точку M таку, що $M \in OA$. Із точки M опустити перпендикуляр на пряму OB . Чи лежатиме основа перпендикуляра на промені OB ? А на прямій OB ?

234. $\angle AOB = 90^\circ$. M — внутрішня точка кута AOB . Через точку M проведи прямі, паралельні сторонам кута. Переконайся, що побудовані прямі — перпендикулярні.

235. $\angle AOB = 90^\circ$. M — довільна точка бісектриси кута AOB . Вимірй відстані від точки M до променів OB і OA . Порівняй ці відстані.



Мал. 6.18



Мал. 6.19

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



236. $\angle AOB$ і $\angle BOC$ — суміжні кути. OM — внутрішній промінь кута AOB , $OM \perp AC$. Чому дорівнює $\angle MOB$, якщо:

а) $\angle BOC = 40^\circ$; в) $\angle AOB : \angle BOC = 3 : 2$;

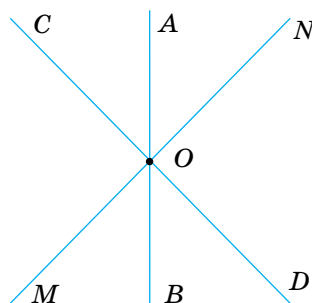
б) $\angle AOB - \angle BOC = 30^\circ$; г) $\angle BOC = \frac{1}{3} \angle AOB$?

237. Три прямі AB , CD і MN перетинаються в точці O (мал. 6.20). Доведіть, що $CD \perp MN$, якщо:

а) $\angle AOM = 130^\circ$, $\angle COB = 140^\circ$;

б) $\angle COM = \angle AOC + \angle MOB$;

в) $\angle AOM = 135^\circ$, OB — бісектриса кута MOD .




Мал. 6.20

238. $\angle AOB = 90^\circ$. Побудуй точку M , яка лежить у внутрішній області кута AOB на відстані 2 см від кожної сторони кута.

239. Побудуй перпендикулярні прямі a , c і точку M , яка лежить на відстані 3 см від прямої a і на відстані 1 см від прямої c .

240. Draw the perpendicular lines a , b and the point K , which lies at a distance of 2 cm from line a and 2 cm from line b .

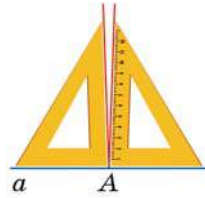
241.  За допомогою транспортира побудуй $\angle AOB = 80^\circ$ і проведи його бісектрису OM . Через довільну точку K цієї бісектриси проведи прямі, перпендикулярні до сторін кута. Виміряй відстані від точки K до сторін кута й порівняй їх.

242. Розв'яжи попередню задачу, якщо $\angle AOB$ дорівнює: 60° ; 90° ; 130° . Сформулюй припущення про відстань від точок бісектриси кута до сторін цього кута.

243. За допомогою транспортира побудуй $\angle AOB = 60^\circ$ і проведи його бісектрису OM . Через довільну точку K цієї бісектриси проведи пряму EF , перпендикулярну до OM . Порівняй довжини відрізків OE і OF , якщо $E \in OA$, $F \in OB$.

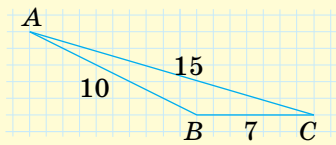
244. Розв'яжи попередню задачу, якщо $\angle AOB$ дорівнює 80° ; 90° ; 120° . Сформулюй припущення про властивість прямої, перпендикулярної до бісектриси кута.

245. Прикладаючи косинець то одним, то іншим боком, учень провів через точку A два перпендикуляри до прямої a (мал. 6.21). Що можна сказати про такий косинець?



Мал. 6.21

246. У трикутнику ABC (мал. 6.22) $AB = 10$ см, $BC = 7$ см, $AC = 15$ см. Знайди відстань від точки A до прямої BC , якщо довжина однієї клітинки дорівнює 1 см. Чи буде такою ж відстань до відрізка BC ?



Мал. 6.22

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

247. Перегни папір у формі квадрата двічі, а потім ще раз двічі, щоб вийшов менший квадрат (мал. 6.23). Зроби один надріз посередині з боку згину. Як думаєш, скільки розрізів у тебе вийде після того, як розгорнеш аркуш? Яке їх взаємне розташування? Перевір.



Мал. 6.23

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

248. Познач на прямій a точки A, B, C, D і M так, щоб точка B лежала між точками A і D , точка M — між A і B , а точка C — між B і D .
249. Чи належить точка K відрізку AB , якщо $AK = 3$ см, $BK = 5$ см, $AB = 7$ см?
250. Знайди міри суміжних кутів, якщо вони пропорційні числам:
 а) 1 і 2; б) 1 і 4; в) 4 і 5.



§ 7

ОЗНАКИ
ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ

Нехай a і b — дві довільні прямі площини. Прямую c , що їх перетинає, називають січною прямих a і b (мал. 7.1).

Прямі a і b з їх січною c утворюють 8 кутів. На малюнку 7.1 їх пронумеровано.

Деякі пари цих кутів мають спеціальні назви:

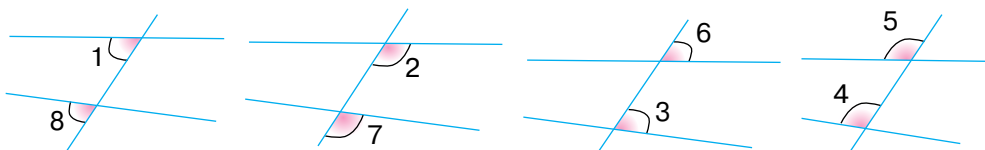
- внутрішні різносторонні кути 1 і 3, 2 і 4;



- внутрішні односторонні кути: 1 і 4, 2 і 3;



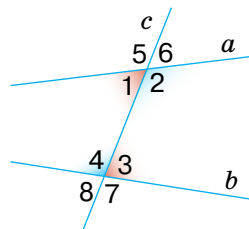
- відповідні кути: 1 і 8, 2 і 7, 3 і 6, 4 і 5.



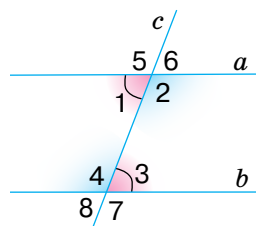
Зверни увагу! Якщо два які-небудь внутрішні різносторонні кути рівні, то рівні також внутрішні різносторонні кути іншої пари (мал. 7.2).

Якщо, наприклад, $\angle 1 = \angle 3$, то $\angle 2 = \angle 4$, бо кути, суміжні з рівними, — також рівні.

Випадок, коли внутрішні різносторонні кути рівні, заслуговує на особливу увагу, тому що саме за цієї умови прямі a і b паралельні.



Мал. 7.1

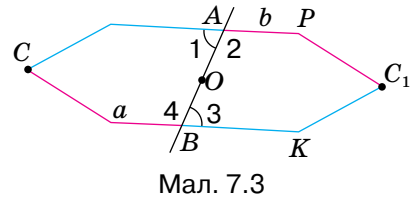


Мал. 7.2

Теорема 3 (ознака паралельності прямих).

Дві прямі паралельні, якщо із січною вони утворюють рівні внутрішні різносторонні кути.

Доведення. Нехай січна AB перетинає прямі a і b так, що утворені при цьому внутрішні різносторонні кути 1 і 3 дорівнюють один одному (мал. 7.3). Тоді кути 2 і 4 також рівні. Припустимо, що за такої умови прямі a і b перетинаються в якійсь віддаленій точці C . У результаті утвориться трикутник ABC (на малюнку 7.3 його схематично зображено у вигляді п'ятикутника).



Уявимо, що цей трикутник повернуто навколо точки O — середини відрізка AB — так, щоб відрізок OA зайняв положення OB . Тоді, оскільки $\angle 1 = \angle 3$ і $\angle 2 = \angle 4$, промінь AC суміститься з променем BK , а промінь BC — з променем AP . Оскільки промені AC і BC (за припущенням) мають спільну точку C , то промені BK і AP також мають якусь спільну точку C_1 . А це означає, що через дві точки C і C_1 проведено дві різні прямі. Такого не може бути.

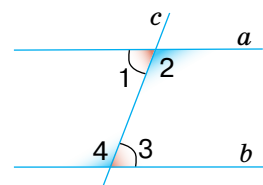
Отже, якщо $\angle 1 = \angle 3$, то прямі a і b не можуть перетинатися. А оскільки вони лежать в одній площині й не перетинаються, то вони паралельні — $a \parallel b$. Це й треба було довести.

Зверни увагу на спосіб доведення теореми 3. Щоб довести, що прямі a і b паралельні, ми припустили, що вони можуть перетинатися. Тобто припускали супротивне тому, що треба було довести. Такий спосіб міркувань називають *методом доведення від супротивного*.

На основі доведеної теореми 3 неважко довести й інші ознаки паралельності прямих.

Теорема 4. Дві прямі паралельні, якщо при перетині із січною вони утворюють внутрішні односторонні кути, сума яких дорівнює 180° .

Доведення. Нехай, наприклад, на малюнку 7.4 сума внутрішніх односторонніх кутів 1 і 4 дорівнює 180° . Сума суміжних кутів 3 і 4 також дорівнює 180° . Тому $\angle 1 = \angle 3$. Це — внутрішні різносторонні кути. Якщо вони рівні, то прямі a і b паралельні.



Мал. 7.4

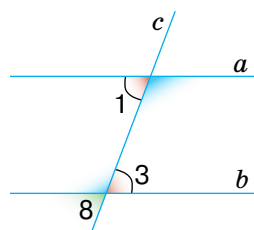
Теорема 5. Дві прямі паралельні, якщо, перетинаючись із січною, вони утворюють рівні відповідні кути.

Доведення. Нехай січна c перетинає прямі a і b так, що утворені при цьому відповідні кути 1 і 8 рівні (мал. 7.5). Кути 8 і 3 рівні, бо вертикальні. Тому, якщо $\angle 1 = \angle 8$, $\angle 8 = \angle 3$, то і $\angle 1 = \angle 3$, звідси випливає, що $a \parallel b$.

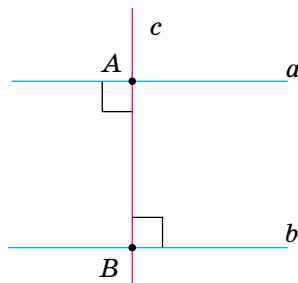
Заслуговує на увагу такий наслідок із теореми 3.

Наслідок. Дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.

Адже якщо кожна з прямих a і b перпендикулярна до прямої c , то утворені при цьому внутрішні різносторонні кути рівні, бо вони дорівнюють 90° кожний (мал. 7.6). Отже, прямі a і b — паралельні.



Мал. 7.5



Мал. 7.6

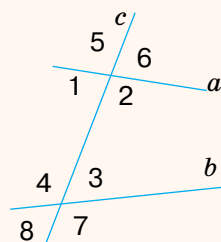
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

1. Кути 5 і 7 (а також 6 і 8) називають *зовнішніми різносторонніми*, а 5 і 8 (а також 6 і 7) — *зовнішніми односторонніми кутами* (мал. 7.7). Використовуючи ці поняття, спробуй сформулювати й довести ще дві ознаки паралельності прямих.

2. З'ясуємо сутність методу доведення від супротивного.

Якщо твердження A заперечує твердження B , то такі два твердження називають *суперечливими*, або *супротивними* одне одному. Із двох взаємно суперечливих тверджень завжди одне правильне, а інше — хибне. Тому якщо переконаємося, що твердження A і B суперечать одне одному і, наприклад, B — неправильне, то можемо бути певні, що твердження A — правильне.

Не слід плутати твердження *супротивні* з *протилежними*. Наприклад, якщо йдеться про числові вирази і натуральні числа, то твердження «вираз A — додатний» і «вираз A — від'ємний» або «число n — просте» і «число n — складене» — протилежні, але не супротивні, адже кожне з них може бути неправильним. А от твердження «вираз A — додатний» і «вираз A — недодатний» або «число n — просте» і «число n — непросте» — взаємно суперечливі. *Непросте* — означає складене або дорівнює 1; *недодатне* — від'ємне або дорівнює нулю.



Мал. 7.7

Доводячи методом від супротивного, спростувати треба не протилежне твердження, а супротивне даному.

Спростувати що-небудь — означає показати, що воно неправильне.

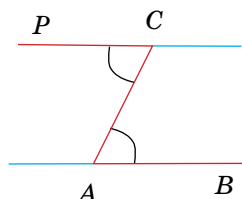
ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

- Сформулюй означення паралельних прямих.
- Що таке січна двох прямих?
- Які кути називають:
 - внутрішніми різносторонніми;
 - внутрішніми односторонніми;
 - відповідними?
 Покажи на малюнку.
- Сформулюй і доведи ознаки паралельності прямих.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

- Як побудувати паралельні прямі, користуючись лише лінійкою і транспортиром?

- Накреслимо довільний промінь AB і відкладемо рівні кути BAC і ACP , як показано на малюнку 7.8. Прямі AB і CP — паралельні, адже кути BAC і ACP — внутрішні різносторонні, а за побудовою вони рівні.

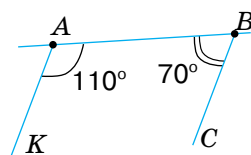


Мал. 7.8

- Через кінці відрізка AB з одного боку від прямої AB проведено промені AK і BC так, що $\angle KAB = 110^\circ$, а $\angle ABC = 70^\circ$. Чи паралельні ці промені?

- Пряму AB можна вважати січною прямих AK і BC (мал. 7.9).

Кути KAB і ABC — внутрішні односторонні. Оскільки їх сума $110^\circ + 70^\circ$ дорівнює 180° , то прямі AK і BC — паралельні (теорема 4). Тому і промені AK та BC — паралельні.



Мал. 7.9

ВИКОНАЄМО УСНО

- Скільки кутів утворюється при перетині двох прямих третьою?



252. Розглянь, як проходять вулиці міста Барселона (Іспанія) (мал. 7.10).

1) Синьою прямою позначено вулицю, що веде до Храму Святого Сімейства архітектора Антоніо Гауді. Для яких пар прямих синя пряма є січною?

2) Скільки кольорових січних є у зеленої та оранжевої прямої?

3) Чи є оранжева пряма січною до деякої пари прямих?



Мал. 7.10

253. Розглянь малюнок 7.11 і назви пари кутів:



а) внутрішніх різносторонніх;

б) внутрішніх односторонніх;

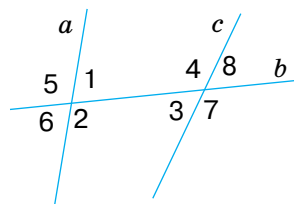
в) зовнішніх різносторонніх;

г) зовнішніх односторонніх;

ґ) відповідних;

д) суміжних;

е) вертикальних.



Мал. 7.11

254. Скориставшись малюнком 7.11, знайди суми мір кутів:

а) 1, 2, 3 і 4; б) 1, 3, 5 і 7; в) 1, 4, 5 і 8; г) 5, 6, 7 і 8.

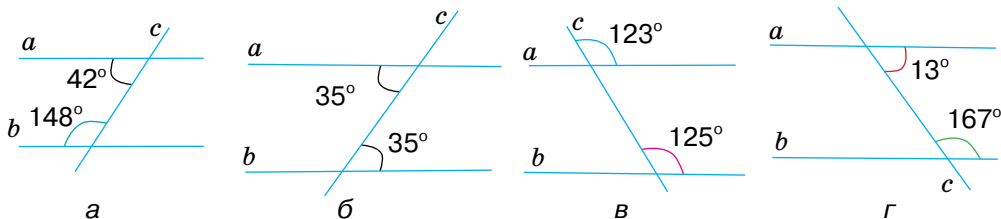
255. На малюнку 7.11 кут 1 дорівнює 63° . Яким має бути кут 4, щоб прямі a і c були паралельними?

А 63° Б 123° В 113° Г 117°

256. На малюнку 7.11 кут 2 дорівнює 127° . Яким має бути кут 7, щоб прямі a і c були паралельними?

А 127° Б 67° В 53° Г не можна встановити

257. На яких із малюнків 7.12 прямі a і b паралельні?



Мал. 7.12

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

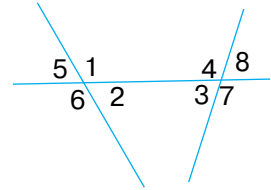
РІВЕНЬ А

258. Як розташовані прямі a і b , якщо $a \perp c$, $b \perp c$ і всі вони лежать в одній площині? Зроби відповідний малюнок.



259. Запиши назви пар кутів, зображених на малюнку 7.13.

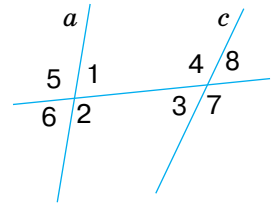
- а) $\angle 1$ і $\angle 5$; в) $\angle 7$ і $\angle 2$; г) $\angle 2$ і $\angle 3$;
 б) $\angle 6$ і $\angle 3$; г) $\angle 3$ і $\angle 1$; д) $\angle 8$ і $\angle 5$.



Мал. 7.13

260. Скориставшись малюнком 7.14, обчисли:

- а) міри кутів 2, 4, 5, 6, 7, 8,
 якщо $\angle 1 = 87^\circ$, $\angle 3 = 78^\circ$;
 б) $\angle 1 + \angle 4$ і $\angle 2 + \angle 3$,
 якщо $\angle 6 + \angle 7 = 162^\circ$;
 в) $\angle 5 - \angle 3$, якщо $\angle 5 - \angle 8 = 48^\circ$.



Мал. 7.14

261. Скориставшись малюнком 7.14, обчисли:

- а) міри кутів 1, 2, 3, 4, 5, 8,
 якщо $\angle 7 = 100^\circ$, $\angle 6 = 85^\circ$;
 б) $\angle 2 + \angle 3$ і $\angle 1 + \angle 4$,
 якщо $\angle 5 + \angle 8 = 170^\circ$;
 в) $\angle 4 - \angle 5$, якщо $\angle 4 - \angle 2 = 10^\circ$.

262. Чи паралельні прямі a і c (мал. 7.14), якщо:



- а) $\angle 6 = 50^\circ$, $\angle 7 = 130^\circ$; б) $\angle 6 = 65^\circ$, $\angle 8 = 65^\circ$?

263. Are the lines a and c parallel (Figure 7.14) if:

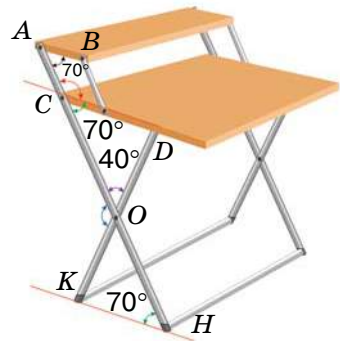
- а) $\angle 1 + \angle 7 = 180^\circ$; б) $\angle 2 = 140^\circ$, $\angle 4 = \angle 1 + 80^\circ$?

264. Чи паралельні прямі a і c на малюнку 7.14, якщо:

- а) $\angle 6 = \angle 8$; в) $\angle 7 = 101^\circ$ і $\angle 5 = 101^\circ$;
 б) $\angle 5 + \angle 8 = 180^\circ$; г) $\angle 1 + \angle 7 = 180^\circ$.

265. 1) Чи паралельні відрізки (мал. 7.15):

- а) AB та CD ; б) CD та KH ?
 2) Знайди кут $\angle KOH$ та $\angle СОК$.



Мал. 7.15

266. Пряма KP перетинає пряму AB в точці K , а пряму CD — у точці P . Чи паралельні прямі AB і CD , якщо $\angle AKP = 90^\circ$ і $\angle KPC = 90^\circ$?

267. Пряма KP перетинає пряму AB в точці K , а пряму CD — у точці P так, що точки B і D лежать по один бік від прямої KP . Чи паралельні прямі AB і CD , якщо $\angle BKP = 89^\circ 39'$ і $\angle KPD = 90^\circ 21'$?

268. Через кінці відрізка AB з одного боку від нього проведено промені AP і BC . Чи паралельні ці промені, якщо:

- а) $\angle PAB = 105^\circ$, а $\angle ABC = 75^\circ$;
 б) $\angle PAB = 93^\circ$, а $\angle ABC = 87^\circ$?

269. Через кінці відрізка PK з одного боку від нього проведено промені PA і KB . Чи паралельні ці промені, якщо:

- а) $\angle APK = 62^\circ$, $\angle PKB = 118^\circ$;
 б) $\angle APK = 88^\circ$, $\angle PKB = 102^\circ$?

270. BM — бісектриса кута KBC (мал. 7.16). Чи паралельні прямі AC і BM , якщо $\angle A = 40^\circ$ і:

- а) $\angle KBC = 80^\circ$;
 б) $\angle ABM = 140^\circ$;
 в) $\angle ABC = 50^\circ$;
 г) $\angle ABM$ на 100° більший за $\angle CAB$.

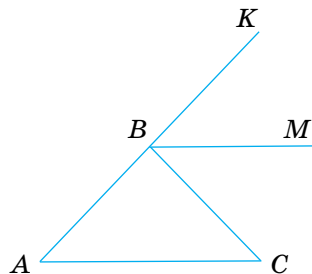
271. BM — бісектриса кута KBC (мал. 7.16). Чи паралельні прямі AC і BM , якщо $\angle A = 50^\circ$ і:

- а) $\angle CBM = 50^\circ$; в) $\angle BCA = \angle KBM$;
 б) $\angle ABM = 130^\circ$; г) $\angle ABM$ на 50° більший за $\angle CAB$.

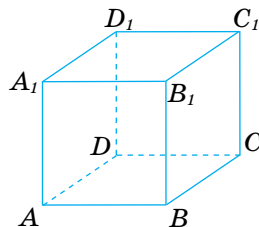
272. Доведи, що протилежні сторони прямокутника лежать на паралельних прямих.

273. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб (мал. 7.17). Доведи, що сторони $A_1 A$ і $B_1 B$ лежать на паралельних прямих.

274. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб (мал. 7.17). Доведи, що сторони $A_1 B_1$ і AB лежать на паралельних прямих.



Мал. 7.16



Мал. 7.17

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

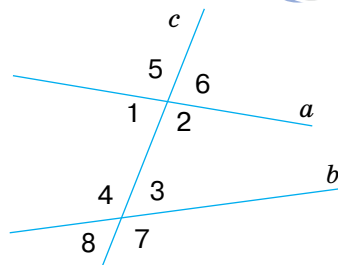
275. Прямі a і b із січною c утворюють рівні гострі кути. Чи впливає із цього, що $a \parallel b$?

276. Чи паралельні прямі a і b , зображені на малюнку 7.18, якщо:

- а) $\angle 4 - \angle 1 = 30^\circ$ і $\angle 3 = 75^\circ$;
 б) $\angle 1 = 60^\circ$ і $\angle 2 : \angle 3 = 2 : 1$?

277. Чи паралельні прямі a і b , зображені на малюнку 7.18, якщо:

- а) $\angle 2 - \angle 3 = 40^\circ$, $\angle 4 = 110^\circ$;
 б) $\angle 3 = 45^\circ$, $\angle 1 : \angle 4 = 1 : 3$?



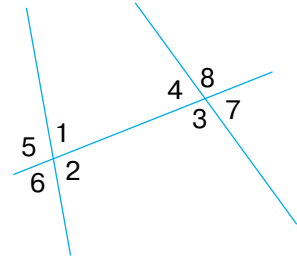
Мал. 7.18



278. Знайдіть міри кутів 1 і 2, зображених на малюнку 7.19, якщо $\angle 1 + \angle 4 = 160^\circ$ і:



- а) $\angle 4$ на 20° менший від $\angle 1$;
- б) $\angle 2$ у 2 рази більший за $\angle 4$;
- в) $\angle 4 : \angle 2 = 2 : 3$;
- г) $\angle 4$ становить 60 % кута 2.



Мал. 7.19

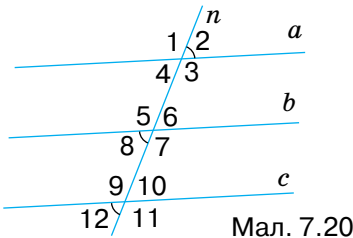
279. Знайди міри кутів 3 і 4, зображених на малюнку 7.19, якщо $\angle 1 + \angle 4 = 150^\circ$ і:

- а) $\angle 4$ у два рази менший від $\angle 1$;
- б) $\angle 1 = 80^\circ$;
- в) $\angle 3 : \angle 1 = 4 : 3$.

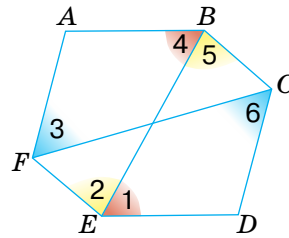
280. Установи взаємне розташування прямих a , b і c , зображених на малюнку 7.20, якщо:

- а) $\angle 3 = \angle 5 = \angle 9$;
- б) $\angle 2 = \angle 8$ і $\angle 7 = \angle 9$;
- в) $\angle 12 = \angle 8$ і $\angle 6 + \angle 3 = 180^\circ$.

281. Січна n перетинає прямі a , b і c так, що кути, позначені на малюнку 7.20 числами 2, 8 і 12, дорівнюють один одному. Доведи, що прямі a , b і c попарно паралельні.



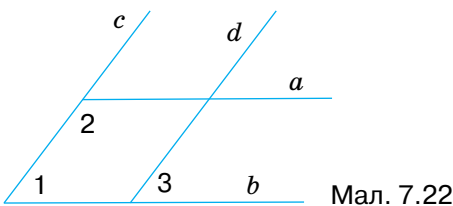
Мал. 7.20



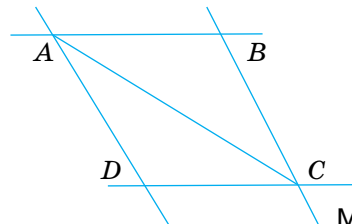
Мал. 7.21

282. У зображеному на малюнку 7.21 шестикутнику $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 5$ і $\angle 3 = \angle 6$. Доведи, що кожна сторона даного шестикутника паралельна протилежній стороні.

283. Чи паралельні прямі a і b , c і d , якщо: $\angle 1 = 60^\circ$, $\angle 2$ — удвічі більший, а $\angle 2 - \angle 3 = 60^\circ$ (мал. 7.22)?



Мал. 7.22

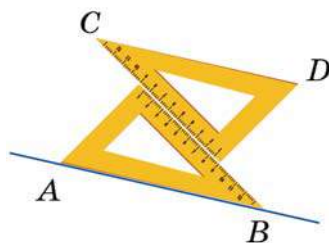


Мал. 7.23

284. У чотирикутнику, зображеному на малюнку 7.23, $\angle BAD = \angle BCD$, $\angle DAC = \angle ACB$. Доведіть, що $AD \parallel BC$, $AB \parallel CD$.



285. Як можна побудувати паралельні прямі, користуючись косинцем?
286. Користуючись двома однаковими косинцями, паралельні прямі можна проводити, як показано на мал. 7.24. Обґрунтуй таку побудову.
287. Закінчи речення: «Щоб дізнатися, чи паралельні дані прямі, треба провести їх січну й виміряти відповідні кути. Якщо...»



Мал. 7.24

288. Чи паралельні прямі MP і KT , якщо $\angle MPT = 100^\circ$, а $\angle PTK = 80^\circ$?

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

289. Зроби модель для ілюстрації доведення теореми 3.
290. Як можуть бути розміщені в просторі прямі a і b , якщо $a \perp c$, $b \perp c$? Змоделюй різні випадки за допомогою олівців.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

291. Точки K , L і M лежать на одній прямій. $KL = 7$ см, $LM = 3$ см. Знайди KM . Розглянь всі можливі варіанти.
292. Прямі AB і CD перетинаються в точці O , OM — бісектриса кута AOC . Знайди міри кутів MOB і MOD , якщо $\angle COB = 70^\circ$.
293. Один із двох кутів, утворених при перетині двох прямих, на 90° більший за інший. У скільки разів він більший за інший кут?



§ 8

ВЛАСТИВОСТІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- властивості паралельних прямих — properties of parallel lines
- січна — transversal
- внутрішні односторонні кути — consecutive interior angles
- внутрішні різносторонні кути — alternate interior angles
- відповідні кути — corresponding angles

Як провести через точку P , що не лежить на прямій a , пряму, паралельну прямій a ? За допомогою лінійки й косинця (мал. 8.1).

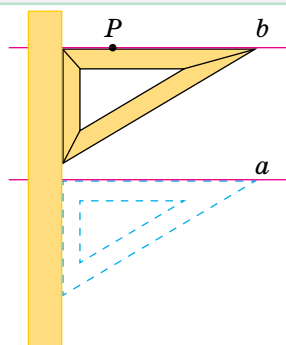
Чи можна через точку P провести дві різні прямі, паралельні прямій a ?

Геометри здавна вважали, що:

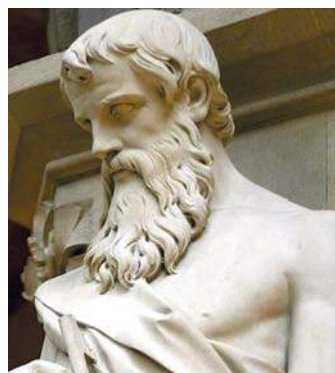
Через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Давньогрецький геометр Евклід це твердження прийняв без доведення. Його назвали **аксіомою Евкліда**, тому що всі твердження, які приймають без доведення, називають **аксіомами**.

Геометрію, у якій визнається правильною аксіома Евкліда, називають **евклідовою геометрією**. Ти вивчаєш евклідову геометрію.



Мал. 8.1



Евклід

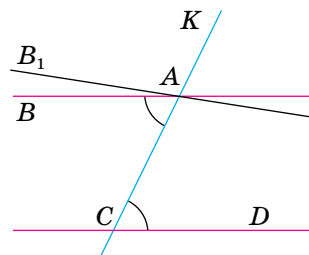
Теорема 6 (обернена до теореми 3).

Якщо прямі паралельні, то внутрішні різносторонні кути, утворені ними із січною, — рівні.

Доведення. Нехай прямі AB і CD — паралельні, а KC — їх січна, яка проходить через точку A (мал. 8.2). Доведемо, що $\angle CAB = \angle ACD$.

Припустимо, що $\angle CAB \neq \angle ACD$. Проведемо пряму AB_1 так, щоб виконувалася рівність $\angle CAB_1 = \angle ACD$. За ознакою паралельності прямих $AB_1 \parallel CD$, а за умовою $AB \parallel CD$.

Виходить, що через точку A проведено дві різні прямі, паралельні прямій CD . Це суперечить аксіомі Евкліда. Отже, зроблене вище припущення призводить до суперечності. Тому $\angle CAB = \angle ACD$.



Мал. 8.2

Наслідок 1. Якщо прямі паралельні, то відповідні кути, утворені цими прямими із січною, — рівні.

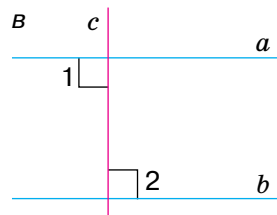
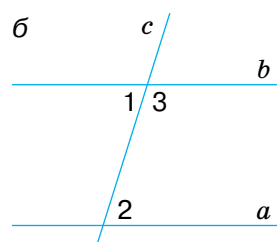
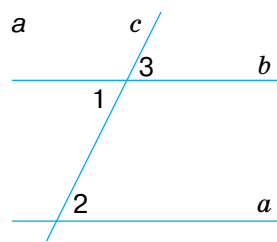
Доведення. Якщо $a \parallel b$, то за теоремою 6: $\angle 1 = \angle 2$ (мал. 8.3, а), $\angle 1$ і $\angle 3$ — вертикальні, тому $\angle 1 = \angle 3$. Оскільки $\angle 2 = \angle 1$, а $\angle 1 = \angle 3$, то $\angle 2 = \angle 3$.

Наслідок 2. Якщо прямі паралельні, то сума внутрішніх односторонніх кутів, утворених цими прямими із січною, дорівнює 180° .

Доведи самостійно, скориставшись малюнком 8.3, б).

Наслідок 3. Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до іншої прямої.

Справді, якщо $c \perp a$ і $a \parallel b$ то $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$, тобто $c \perp b$ (мал. 8.3, в).

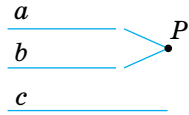


Мал. 8.3

Теорема 7. Дві прямі, паралельні третій, паралельні одна одній.

Доведення. Нехай кожна з прямих a і b паралельна прямій c . Доведемо, що $a \parallel b$.

Припустимо, що прямі a і b не паралельні, а перетинаються в деякій точці P (мал. 8.4). Виходить, що через точку P проходять дві різні прямі a і b , паралельні прямій c . Це суперечить аксіомі Евкліда. Отже, прямі a і b не можуть перетинатися. Тоді вони паралельні.



Мал. 8.4

Зверни увагу! Доведення теореми правильне й для випадку, коли пряма c лежить між прямими a і b .

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

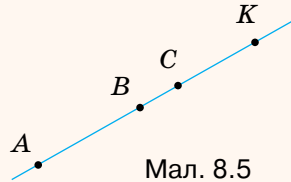
1. Теорему 7 називають теоремою про **транзитивність паралельності прямих** (латинською *transitivus* — «перехідний»), бо вона стверджує, що паралельність двох пар паралельних прямих переходить на третю пару: якщо $a \parallel b$ і $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

Щоб це твердження виконувалося завжди, домовилися вважати, що кожна пряма паралельна сама собі, тобто $a \parallel a$. Адже якщо $a \parallel b$ і $b \parallel a$, то $a \parallel a$.

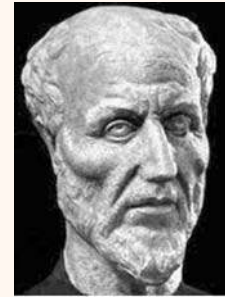
2. Відрізки однієї прямої також вважають паралельними. Наприклад, якщо A, B, C і K — точки однієї прямої, то кожний із відрізків AB, AC, AK, BC, BK, CK паралельний будь-якому з них (мал. 8.5).

3. Є геометрії, у яких аксіома Евкліда не вважається правильною. Їх називають **неевклідовими геометріями**. Такою, наприклад, є геометрія Лобачевського.

Подане формулювання аксіоми Евкліда насправді належить грецькому математику Проклу Діадоху (V ст. н. е.), який сформулював її майже на 1000 років пізніше. Евклід же формулював цю аксіому інакше: «Якщо пряма, що падає на дві прямі, утворює внутрішні і по одну сторону кути, менші від двох прямих, то необмежено продовжені ці прямі зустрінуться з тієї сторони, де кути менші від двох прямих».



Мал. 8.5

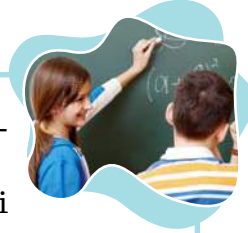


Прокл Діадоху

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюй аксіому Евкліда про паралельність прямих.
2. Сформулюй і доведи теорему про внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих та січній.
3. Сформулюй і доведи властивості відповідних і внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих та січній.
4. Сформулюй і доведи теорему про дві прямі, паралельні третій.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

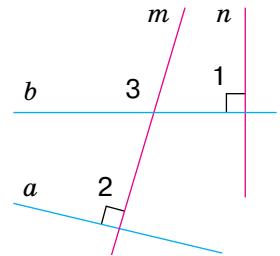


1. Доведи, що прямі, перпендикулярні до непаралельних прямих, перетинаються.

- Нехай прямі a і b перетинаються, а прямі m і n — перпендикулярні до них: $m \perp a$, $n \perp b$ (мал. 8.6).

Тоді $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$. Припустимо, що $m \parallel n$, тобто $\angle 1 = \angle 3$.

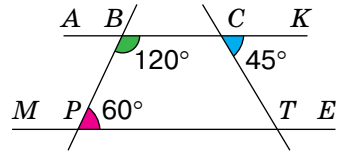
Тоді $\angle 2 = \angle 3 = 90^\circ$, а звідси випливає, що $a \parallel b$. Це суперечить умові задачі. Отже, прямі m і n не можуть бути паралельними. Тоді вони перетинаються.



Мал. 8.6

2. Користуючись мал. 8.7, знайди кут $\angle CTP$.

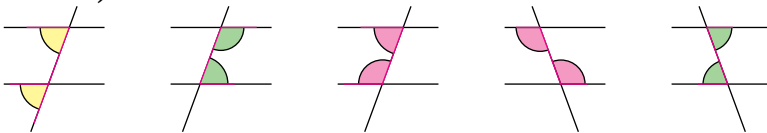
- Кути $\angle PBC$ і $\angle BPT$ — внутрішні односторонні при прямих AK і ME та січній BP . Оскільки їх сума дорівнює 180° (бо $120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$), то прямі AK і ME — паралельні. А якщо прямі паралельні, то внутрішні різносторонні кути рівні. Тоді $\angle CTP = \angle TCK = 45^\circ$.



Мал. 8.7

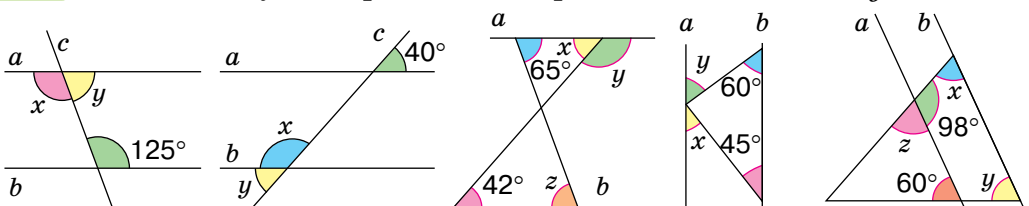
ВИКОНАЄМО УСНО

294. Як називають пари кутів у кожному з випадків (мал. 8.8)?



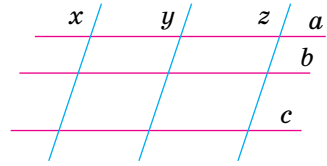
Мал. 8.8

295. На малюнку 8.9 прямі a і b паралельні. Знайди x , y і z .



Мал. 8.9

296. Скільки пар паралельних прямих є на малюнку 8.10? А скільки пар не-паралельних прямих?

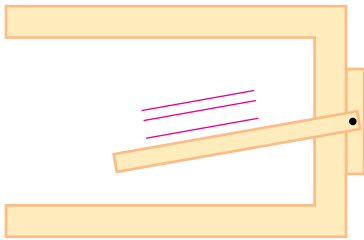


Мал. 8.10

297. Кут між прямими a і x дорівнює 70° (мал. 8.10). Знайди кут між прямими для кожної пари прямих, що є на малюнку.

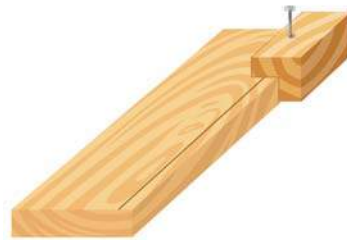
298. Прямі a і b не паралельні прямій c . Чи впливає із цього, що прямі a і b не паралельні?

299. Поясни за малюнком 8.11, як можна проводити паралельні прямі, користуючись рейсшиною.



Мал. 8.11

300. На малюнку 8.12 зображено саморобний рейсмус. Як таким рейсмусом можна проводити на бруску прямі, паралельні його ребрам?

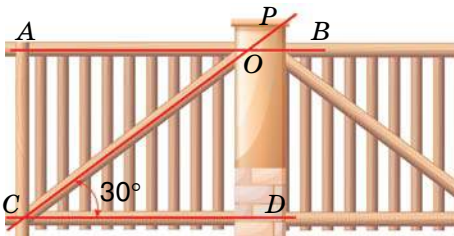


Мал. 8.12

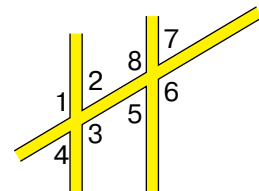
ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

301. Пряма AB паралельна CD (мал. 8.13). Знайди кут AOP .

302. Міра одного з кутів, утвореного двома паралельними вулицями і третьою, що їх перетинає, дорівнює 137° (мал. 8.14). Знайди міри інших кутів. Зроби відповідний малюнок до задачі в зошиті та розв'яжи її.



Мал. 8.13



Мал. 8.14

303. Міра одного з кутів, утвореного двома паралельними прямими вулицями і третьою, що їх перетинає, дорівнює 35° (мал. 8.14). Знайди міри інших кутів.

304. Знайди усі кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один із них на 46° більший за другий.

305. Знайди усі кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один із них на 52° менший за другий.

306. На стороні кута ABC взято точку A . Через неї проведено пряму, паралельну стороні BC . Знайдіть міри кутів при вершині A , якщо: а) $\angle ABC = 50^\circ$; б) $\angle ABC = 178^\circ$.

307. У прямокутнику $ABCD$ $\angle BAC$ на 20° більший за $\angle DAC$. Знайди $\angle ACB$ і $\angle ACD$.

308. У прямокутнику $ABCD$ $\angle ABD$ у два рази більший за $\angle DBC$. Знайди $\angle ADB$ і $\angle CDB$.

309. Знайди міри всіх кутів, зображених на малюнку 8.15, якщо $a \parallel b$ і:

а) $\angle 4 = 110^\circ$; в) $\angle 4 - \angle 1 = 30^\circ$;

б) $\angle 6 + \angle 8 = 144^\circ$; г) $\angle 3 : \angle 2 = 1 : 2$.

310. Знайди міри всіх кутів, зображених на малюнку 8.15, якщо $a \parallel b$ і:

а) $\angle 1 = 60^\circ$; в) $\angle 2 - \angle 3 = 50^\circ$;

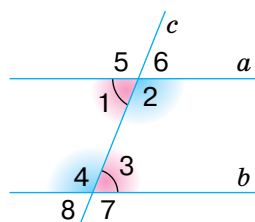
б) $\angle 5 + \angle 7 = 250^\circ$; г) $\angle 4 : \angle 1 = 3 : 2$.

311. Кут між однією з двох паралельних прямих і їх січною дорівнює: а) 80° ; б) 100° . Під яким кутом бісектриса цього кута перетинає іншу пряму? Доповніть малюнок 8.16 даними та розв'яжіть задачу.

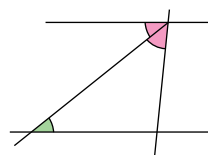
312. На сторонах KP і PC трикутника KPC взято точки A і B так, що $AB \parallel KC$. Знайди кути чотирикутника $KABC$, якщо $\angle PAB = 80^\circ$, $\angle PBA = 48^\circ$.

313. На сторонах AB і BC трикутника ABC взято точки K і P так, що $KP \parallel AC$. Знайди кути чотирикутника $AKPC$, якщо $\angle BKP = 60^\circ$, $\angle BPK = 80^\circ$.

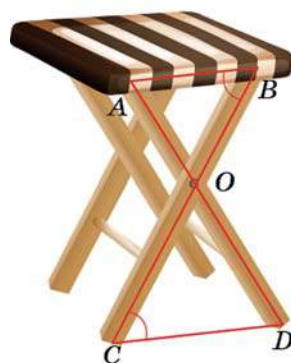
314. Розглянь малюнок 8.17. Доведи, що $\angle A = \angle D$.



Мал. 8.15



Мал. 8.16



Мал. 8.17

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

315. Якщо прямі із січною утворюють нерівні відповідні кути, то вони перетинаються. Доведи це.

316. Доведи, що бісектриси двох відповідних кутів при паралельних прямих — паралельні.

317. Доведи, що коли одна січна з двома прямими утворює рівні відповідні кути, то й кожна інша січна із цими прямими утворює рівні відповідні кути (мал. 8.18).

318. Промені AB , AC і KP — різні й такі, що $AB \parallel KP$, $AC \parallel KP$. Знайди міру кута BAC .

319. Скориставшись малюнком 8.19, на якому $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$, обчисліть міри кутів 2 і 6, якщо:

- а) $\angle 2 - \angle 3 = 36^\circ$;
- б) $\angle 3$ у 2 рази менший за $\angle 2$.

320. Скориставшись малюнком 8.19, на якому $\angle 1 = \angle 3$, обчисли міри кутів 3 і 4, якщо:

- а) $\angle 4 - \angle 1 = 50^\circ$;
- б) $\angle 4$ в 3 рази більший за $\angle 6$.

321. Кожна сторона чотирикутника $ABCD$ паралельна протилежній стороні (мал. 8.20). Доведи, що:

- а) $\angle A + \angle B = 180^\circ$;
- б) $\angle B = \angle D$.

322. Each side of the quadrilateral $ABCD$ is parallel to the opposite side (Figure 8.20). Prove that:

- а) $\angle B + \angle C = 180^\circ$;
- б) $\angle A = \angle C$.

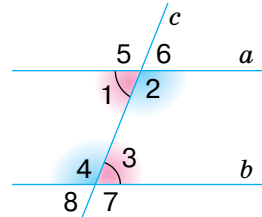
323. У чотирикутнику $ABCD$ $BC \parallel AD$ і $\angle B = \angle C$ (мал. 8.21).

Доведи, що:

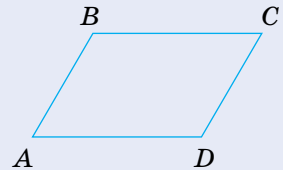
- а) $\angle A = \angle D$;
- б) $\angle A + \angle C = 180^\circ$.



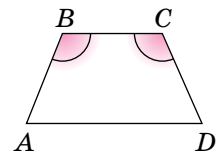
Мал. 8.18



Мал. 8.19



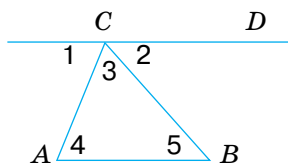
Мал. 8.20



Мал. 8.21

324. На малюнку 8.22 $\angle 1 = 55^\circ$, $\angle 2 = 60^\circ$ і $AB \parallel CD$. Установи відповідність між кутами, заданими умовами (1–3), та їх градусними мірами (А–Д).

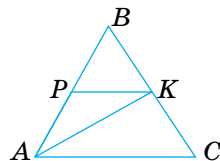
1	$\angle CAB$	А	65°
2	$\angle ACB$	Б	55°
3	$\angle ABC$	В	60°
		Г	110°
		Д	125°



Мал. 8.22

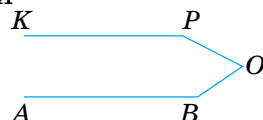
325. На малюнку 8.22 $\angle 1 = 70^\circ$, $\angle 2 = 50^\circ$ і $AB \parallel CD$. Знайди міри кутів трикутника ACB .

326. На малюнку 8.23 AK — бісектриса кута BAC , $\angle BAC = 80^\circ$, $PK \parallel AC$. Знайди кути трикутника APK .



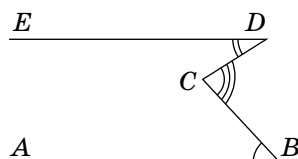
Мал. 8.23

327. На малюнку 8.23 AK — бісектриса кута BAC , $\angle BAC = 70^\circ$, $\angle ACB = 60^\circ$, $PK \parallel AC$. Знайди $\angle BKP$, $\angle AKP$ і $\angle AKC$.



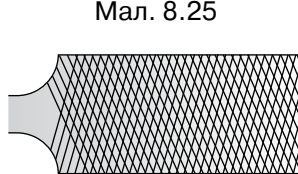
Мал. 8.24

328. На малюнку 8.24 $\angle ABO = 140^\circ$, $\angle OPK = 158^\circ$, $AB \parallel KP$. Знайди $\angle BOP$.



Мал. 8.25

329. На малюнку 8.25 $\angle ABC = 50^\circ$, $\angle CDE = 36^\circ$, $AB \parallel DE$. Знайди $\angle BCD$.

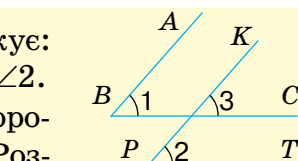


Мал. 8.26

330. Доведи, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й іншу пряму.

331. Через точку, яка не лежить на прямій a , проведено три прямі. Доведи, що принаймні дві з них перетинають пряму a .

332. Одна насічка напилка утворює з його ребром кут 65° , а інша — 74° (мал. 8.26). Знайди міру гострого кута між двома різними насічками.



Мал. 8.27

333. Дивлячись на малюнок 8.27, Марко міркує: «Якщо $AB \parallel PK$ і $BC \parallel PT$, то $\angle 1 = \angle 3 = \angle 2$. Отже, кути з відповідно паралельними сторонами — рівні». Чи правильно він міркує? Розглянь інші можливі варіанти.

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

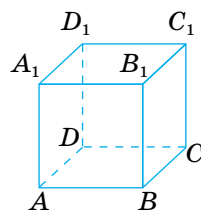
334. Виміряй потрібні кути (мал. 8.28) і встанови, чи є паралельними жовті та сині лінії, які визначають елементи схеми для вишивання українського рушника.



Мал. 8.28

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

335. Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, на 16° більший за інший. Знайди всі інші кути, які при цьому утворилися.
336. Скільки спільних точок можуть мати:
а) пряма і коло; в) коло і коло?
б) пряма і круг;
337. Перемалюй у зошит фігуру з малюнка 8.29. Як називають таку фігуру? Назви її вершини, ребра, грані. Випиши всі ребра, паралельні ребру: а) AA_1 ; б) AB .



Мал. 8.29

§ 9 ТЕОРЕМИ Й АКСІОМИ

Теорема — це твердження, в істинності якого переконуються за допомогою логічних міркувань, доведень.

Умову теореми записують після слова «Дано», а висновок — після слова «Довести».

Наприклад, теорему про вертикальні кути (мал. 9.1) можна оформити так.

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- теорема — theorem
- аксіома — axiom

Дано: $\angle AOD$, $\angle BOC$ — вертикальні кути.

Довести: $\angle AOD = \angle BOC$.

Доведення.

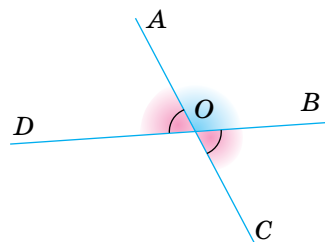
$$\angle AOD = 180^\circ - \angle AOB$$

(бо $\angle AOD$ і $\angle AOB$ — суміжні),

$$\angle BOC = 180^\circ - \angle AOB$$

(бо $\angle BOC$ і $\angle AOB$ — суміжні).

Отже, $\angle AOD = \angle BOC$.



Мал. 9.1

Зазвичай теорема містить **умову** (те, що дано) і **висновок** (що вимагається довести). Щоб виокремити умову й висновок теореми, її зручно подати у формі «Якщо.., то...». Наприклад: «Якщо кути вертикальні, то вони — рівні». Тут слова перед комою виражають умову теореми, а після коми — висновок.

Помінявши умову й висновок теореми місцями, одержимо нове твердження (істинне або хибне). Якщо одержане таким способом твердження істинне, його називають **теоремою, оберненою до даної**. Наведемо приклад.

1. «Якщо кути вертикальні, то вони — рівні» — дана теорема. «Якщо кути рівні, то вони — вертикальні» — обернене твердження. Оскільки це твердження хибне, то воно не є теоремою.

2. «Якщо відповідні кути рівні, то прямі — паралельні» — дана теорема. «Якщо прямі паралельні, то відповідні кути — рівні» — теорема, обернена до даної.

Найважливіші теореми, у яких зазначається, *за яких умов* правильні ті чи інші твердження, називають **ознаками**. Наприклад, розглядають ознаки рівності трикутників, ознаки паралельності прямих, ознаки подільності чисел.

Доводячи теорему, показують, що вона впливає з інших істинних тверджень. Однак на початку вивчення геометрії ще ніяких «інших істинних тверджень» немає. Тому кілька перших тверджень зазвичай приймають без доведень. Їх називають **аксіомами**.

Деякі аксіоми ти вже знаєш.

- Хоч би яка була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що їй не належать.
- Через будь-які дві різні точки можна провести пряму, і тільки одну.
- Із трьох різних точок прямої одна, і тільки одна, лежить між двома іншими.
- Кожний відрізок має певну довжину.
- Кожний кут має певну міру.
- Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Від теорем і аксіом слід відрізняти **означення**, у яких розкривається зміст поняття. Наприклад: «Відрізком називають частину прямої, обмежену двома її точками» — означення відрізка; «Гострим кутом називають кут, менший від прямого» — означення гострого кута.

В означеннях, аксіомах і теоремах — основний зміст геометрії, їх треба знати, але формулювати (правильно!) можна і своїми словами. Наприклад, означення відрізка можна формулювати й так: «Відрізок — це частина прямої, обмежена двома її точками» або так: «Частину прямої, обмежену двома її точками, називають відрізком».

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

1. Слово *аксіома* — грецького походження. Спочатку це слово означало: повага, авторитет, незаперечність. Згодом словом «аксіома» стали називати твердження, яке приймається без обґрунтування.

2. Слово *теорема* також грецького походження. Спочатку теоремою називали видовище, театральну виставу. Першим геометрам доведені ними теореми здавалися досить несподіваними, дивними, мов цікаві видовища. І справді дивно: з небагатьох примітивних тверджень, які приймають без доведень, шляхом самих міркувань, людина може отримати мільйони неочевидних наслідків. Навіть таких, які в природі не спостерігають. І таких, про існування яких не здогадувався жоден мислитель.



ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке: а) теорема; б) аксіома; в) означення?
Наведи приклади теорем.
2. Яке твердження називають теоремою, оберненою до даної?
3. Що таке ознака?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Бісектриси внутрішніх різносторонніх кутів, утворених січною з двома паралельними прямими, паралельні одна одній. Доведи. Сформулюй обернене твердження.



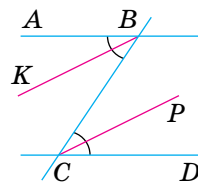
- Нехай BC — січна прямих AB і CD , кути ABC і BCD — внутрішні різносторонні, а BK і CP — їх бісектриси (мал. 9.2). Покажемо, що коли $AB \parallel CD$, то $BK \parallel CP$.

Якщо $AB \parallel CD$, то $\angle ABC = \angle BCD$ (як внутрішні різносторонні при паралельних прямих). Половини рівних кутів — рівні, тому $\angle KBC = \angle BCP$.

Ці кути — внутрішні різносторонні для прямих KB і CP та січної BC . Оскільки ці кути рівні, то прямі KB і CP — паралельні.

А це й треба було довести.

Обернене твердження: «Якщо бісектриси внутрішніх різносторонніх кутів, утворених двома прямими з їх січною, — паралельні, то паралельні й дані прямі».

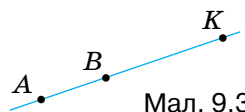


Мал. 9.2

2.

Два промені називають *співнапрямленими*, якщо один із них є частиною другого або якщо вони паралельні й розміщені по один бік від прямої, що проходить через їх початки. Наведи приклади.

- Наприклад, промені AK і BK (мал. 9.3), а також промені AK і BT (мал. 9.4).



Мал. 9.3

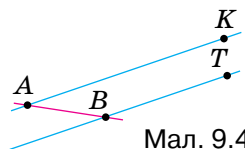
3.

Доведи, що кути із співнапрямленими сторонами рівні.

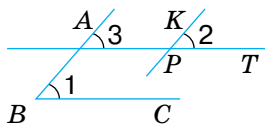
- Доведемо, що коли промені BA і PK , BC і PT — співнапрямлені, то кути 1 і 2 — рівні.

Якщо дані кути розміщені, як показано на малюнку 9.5, то $\angle 1 = \angle 3$ і $\angle 3 = \angle 2$. Отже, $\angle 1 = \angle 2$.

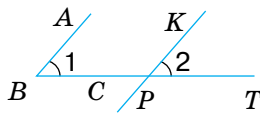
Якщо дані кути розміщені, як показано на малюнку 9.6, то промінь PT становить частину променя BC . У цьому випадку $\angle 1 = \angle 2$ як відповідні кути при паралельних прямих BA і PK .



Мал. 9.4



Мал. 9.5



Мал. 9.6

ВИКОНАЄМО УСНО



338. Сформулюй означення:



а) вертикальних кутів; б) суміжних кутів.

339. Сформулюй аксіому про розміщення точок на прямій.

340. Сформулюй аксіому про вимірювання відрізків.

341. Сформулюй аксіому Евкліда про паралельність прямих.

342. Чи існують 4 точки, через які можна провести пряму?

343. Сформулюй ознаку подільності натуральних чисел на 3. Як її можна сформулювати інакше?

344. Сформулюй означення паралельних прямих. Чи можна слова «на площині» пропустити? Чому?

345. Яке з тверджень правильне?

а) Якщо кожне з двох натуральних чисел ділиться на 10, то і їх сума ділиться на 10;

б) Якщо сума двох натуральних чисел ділиться на 10, то кожне з них ділиться на 10.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ А

346. Сформулюй теорему про суміжні кути. Подай її у формі «Якщо..., то...». Зазнач її умову й висновок.

347. Сформулюй теорему про дві прямі, паралельні третій. Запиши її за допомогою математичних символів.

348. Які з даних тверджень істинні?

а) Якщо кути рівні, то вони вертикальні;

б) Якщо кути не вертикальні, то вони не рівні;

в) Якщо кути не рівні, то вони не вертикальні.

349. Сформулюй твердження, обернене до: «Сума мір двох суміжних кутів дорівнює 180° ». Чи можна вважати його теоремою? Чому?

350. Сформулюйте твердження, обернене до: «Дві прямі паралельні, якщо, перетинаючись із січною, вони утворюють рівні відповідні кути». Чи є воно теоремою?



351. Чи можна вважати правильними такі означення?
- Бісектрисою кута називають пряму, яка ділить цей кут навпіл;
 - Бісектрисою кута називають промінь, який ділить цей кут на рівні частини.
352. Прочитай перші три абзаци параграфа «Кути і їх міри». Чи є в них означення? Сформулюй і випиши одне з них.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



353. Яке з тверджень правильне?
- Якщо кожне з трьох натуральних чисел ділиться на 5, то їх сума також ділиться на 5;
 - Якщо сума трьох натуральних чисел ділиться на 5, то кожне з них ділиться на 5.
354. Доведи, що кут між бісектрисами двох вертикальних кутів — розгорнутий. Сформулюй і доведи аналогічне твердження про бісектриси двох суміжних кутів.
355. Сформулюй словами і доведи твердження:
- якщо $a \parallel b$ і $b \parallel c$, то $a \parallel c$;
 - якщо $a \perp b$ і $b \perp c$, то $a \parallel c$.
- Чи правильні ці твердження, якщо прямі a , b і c не лежать в одній площині?
356. Доведи, що:
- якщо кут A дорівнює куту B , а кут B дорівнює куту C , то кути A і C дорівнюють один одному;
 - якщо відрізок AB дорівнює відрізку KP , а відрізок KP дорівнює відрізку MT , то відрізок AB дорівнює відрізку MT .
357. Чи правильні твердження?
- Якщо кут A суміжний з кутом B , а кут B суміжний з кутом C , то кути A і C — суміжні;
 - Якщо кут A вертикальний із кутом B , а кут B вертикальний із кутом C , то кути A і C — вертикальні;
 - Якщо прямі a і c лежать в одній площині та прямі c і n лежать в одній площині, то прямі a і n також лежать в одній площині.

358. Доведи, що січна, перетинаючи паралельні прямі, утворює з ними:

- а) рівні зовнішні різносторонні кути;
- б) зовнішні односторонні кути, які в сумі становлять 180° .

359. Доведи, що кути з відповідно перпендикулярними сторонами рівні або в сумі становлять 180° .

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

360. Паралельні залізничні рейки, промені сонця та багато інших моделей прямих на світлинах і картинах часто зображують у вигляді непаралельних прямих (мал. 9.7).

- Сфотографуй об'єкти з життя або зображення, на яких:
- а) паралельні прямі мають вигляд непаралельних;
 - б) непаралельні прямі мають вигляд паралельних.



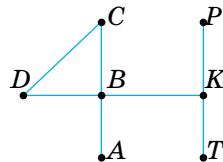
Мал. 9.7

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

361. Скільки існує точок на прямій, які лежать між її точками A і B ?

362. Скільки різних відрізків зображено на малюнку 9.8? Запиши їх.

363. Дюйм — це 2,5 см. Скільки квадратних сантиметрів має квадратний дюйм?



Мал. 9.8

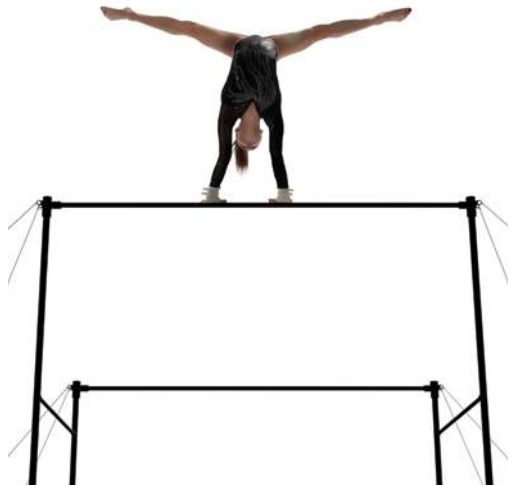


ГЕОМЕТРІЯ НАВКОЛО НАС

Ересуннський міст
між Данією і Швецією



Закарпаття. Україна

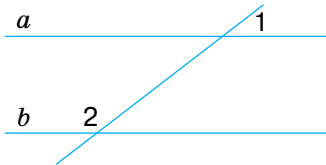


ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

А

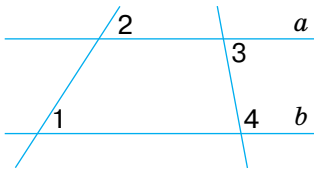
1 $\angle 1 = 50^\circ, \angle 2 = 130^\circ.$

Довести: $a \parallel b.$



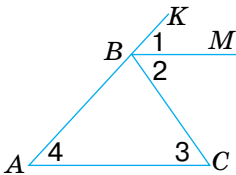
2 $\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = 80^\circ.$

$\angle 4$



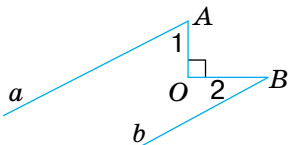
3 $\angle 2 = \angle 3.$

Довести: $\angle 1 = \angle 4.$



4 $a \parallel b, \angle 1 = 60^\circ.$

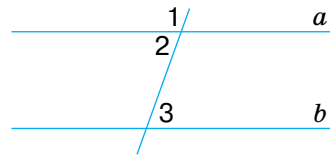
$\angle 2$



Б

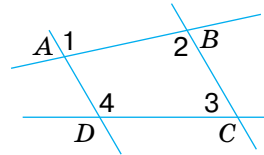
$\angle 1 : \angle 2 = 3 : 2, \angle 3 = 72^\circ.$

Довести: $a \parallel b.$



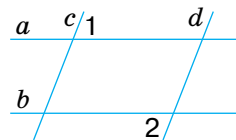
$\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ.$

Довести: $\angle 1 = \angle 2.$



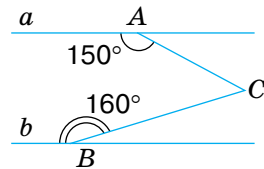
$a \parallel b, \angle 1 = \angle 2.$

Довести: $c \parallel d.$



$a \parallel b.$

$\angle ACB$



САМОСТІЙНА РОБОТА

ВАРІАНТ 1

1. Знайди усі кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один з них дорівнює 36° .
2. Один із внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, більший за інший на 18° . Знайди ці кути.
3. Через кінці відрізка AB з одного боку від прямої AB проведи промені AK і BC так, щоб $\angle KAB = 107^\circ$, а $\angle ABC = 73^\circ$. Чи паралельні ці промені? Чому?

ВАРІАНТ 2

1. Знайди усі кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один із них дорівнює 112° .
2. Один із внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, утричі більший за інший. Знайди ці кути.
3. Через кінці відрізка AB з одного боку від прямої AB проведи промені AM і BC так, щоб $\angle MAB = 102^\circ$, а $\angle ABC = 77^\circ$. Чи паралельні ці промені? Чому?

ВАРІАНТ 3

1. Знайди всі кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один із них дорівнює 62° .
2. Один із внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, на 54° менший за інший. Знайди ці кути.
3. Через кінці відрізка KP з одного боку від прямої KP проведи промені KA і PB так, щоб $\angle AKP = 97^\circ$, а $\angle KPB = 83^\circ$. Чи паралельні ці промені? Чому?

ВАРІАНТ 4

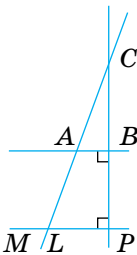
1. Знайди усі кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один із них дорівнює 134° .
2. Один із внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, удвічі менший за інший. Знайди ці кути.
3. Через кінці відрізка AB з одного боку від прямої AB проведи промені AK і BM так, щоб $\angle KAB = 58^\circ$, а $\angle ABM = 123^\circ$. Чи паралельні ці промені? Чому?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

- | | | |
|--|---|---|
| <p>1 Міра одного з відповідних кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 100°. Яку міру має другий кут?</p> | <p>A 100°
B 80°</p> | <p>B 8°
Г 50°</p> |
| <p>2 Один із внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, тупий. Яким є другий кут?</p> | <p>A тупим
Б прямим
В гострим
Г розгорнутим</p> | |
| <p>3 $\angle AOP$ і $\angle OPC$ — внутрішні різносторонні кути, $AO \parallel PC$. Який знак слід поставити замість * у записі $\angle AOP * \angle OPC$?</p> | <p>A $<$
Б $=$</p> | <p>В $>$
Г $>$</p> |

Для виконання завдань 4–10 скористайся малюнком 9.9.

- 4 Який знак слід поставити замість * у записі: $CB * LP$?



Мал. 9.9

- 5 Які з прямих паралельні?

- 6 Яким є кут $\angle ABC$?

- A** \parallel
Б $=$
- В** \in
Г \perp

- A** BP і LC
Б CP і AB
- В** AB і LP
Г CB і LP

- A** гострим
Б тупим
В прямим
Г розгорнутим

- 7 $\angle ALM = 130^\circ$. Знайди $\angle LAB$.

- 8 Знайди $\angle CAB$, якщо $\angle MLA = 145^\circ$.

- 9 Знайди $\angle ALP$, якщо $\angle ALP : \angle LAB = 2 : 3$.

- 10 Відстань від точки C до прямої MP дорівнює 12 см. Знайди відстань від точки C до прямої AB , якщо $CB = BP$.

- A** 50°
Б 80°
- В** 130°
Г 120°

- A** 145°
Б 45°
- В** 25°
Г 35°

- A** 108°
Б 36°
- В** 90°
Г 72°

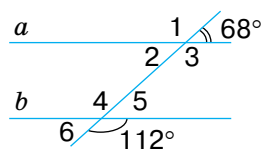
- A** 12 см
Б 4 см
- В** 6 см
Г 24 см

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТЕМАТИЧНОГО КОНТРОЛЮ

1. Побудуй гострий кут AOB . Через точку C , взяту всередині кута, проведи прямі a і b такі, що $a \parallel OA, b \perp OB$.

2. Знайди міри всіх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один із них дорівнює 45° .

3. Доведи, що $a \parallel b$ (мал. 9.10).

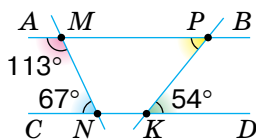


Мал. 9.10

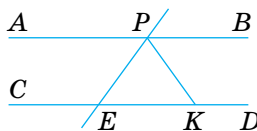
4. Дві паралельні прямі перетинає третя пряма так, що сума двох із восьми утворених кутів дорівнює 240° . Знайди міри всіх утворених кутів.

5. Знайди міри внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один із них на 36° більший за інший.

6. За допомогою малюнка 9.11 знайди міру кута KPM .



Мал. 9.11



Мал. 9.12

7. $AB \parallel CD, PK$ — бісектриса кута BPE (мал. 9.12). Знайди $\angle PEK$, якщо $\angle PKE = 58^\circ$.

8. Відрізок PK перетинає сторони AB і BC трикутника ABC у точках P і K відповідно. Знайди кути чотирикутника $APKC$, якщо $\angle BAC = \angle BPK = 62^\circ$ і $\angle BCA = 48^\circ$.

Додаткове завдання

9. Відрізки AB і KP перетинаються в точці O . Доведи: якщо $\angle AKO = \angle OPB$, то $\angle KAO = \angle OBP$.

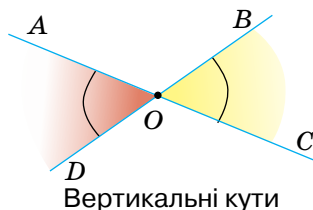
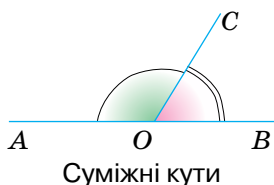
ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які кути називають суміжними?
2. Сформулуй і доведи властивість суміжних кутів.
3. Які кути називають вертикальними?
4. Сформулуй і доведи властивість вертикальних кутів.
5. Що таке кут між прямими?
6. Сформулуй означення перпендикулярних прямих.
7. Які відрізки називають перпендикулярними?
8. Які дві прямі називають паралельними?
9. Які відрізки називають паралельними?
10. За допомогою яких креслярських інструментів можна провести пряму, перпендикулярну до даної прямої? Як це роблять?
11. Як можна провести пряму, паралельну даній прямій?
12. Що таке січна двох прямих?
13. Які кути називають внутрішніми різносторонніми?
14. Які кути називають внутрішніми односторонніми?
15. Які кути називають відповідними? Покажи на малюнку.
16. Сформулуй і доведи ознаку паралельності прямих.
17. Сформулуй аксіому Евкліда про паралельність прямих.
18. Що ти знаєш про Евкліда, про його «Основи»?
19. Сформулуй і доведи теорему про внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих і січній.
20. Сформулуй і доведи властивості відповідних та внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих і січній.
21. Сформулуй і доведи теорему про дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої.
22. Що означає слово *транзитивний*? Сформулуй теорему про транзитивність паралельності прямих.
23. Що таке теорема? Наведи приклади теорем.
24. Що таке аксіома? Наведи приклади аксіом.
25. Що таке означення? Наведи приклади означень.
26. Яке твердження називають теоремою, оберненою до даної?
27. Що таке ознака?

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 2

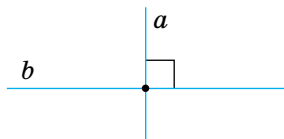
Два кути, на які розгорнутий кут розбивається його внутрішнім променем, називають **суміжними**. Сума мір двох суміжних кутів дорівнює 180° .

Два кути називають **вертикальними**, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого. Вертикальні кути — рівні.

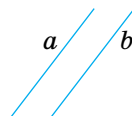


Якщо дві прямі перетинаються, вони утворюють чотири кути (дві пари вертикальних кутів). Менший із них — кут між даними прямими.

Дві прямі називають **перпендикулярними**, якщо вони перетинаються під прямим кутом. Якщо прямі a і b перпендикулярні, пишуть: $a \perp b$. Відрізки чи промені називають перпендикулярними, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.



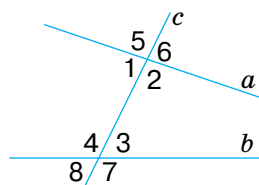
Дві прямі на площині називають **паралельними**, якщо вони не перетинаються. Якщо прямі a і b паралельні, то пишуть: $a \parallel b$. Два відрізки або промені називають паралельними, якщо вони лежать на паралельних прямих.



Через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Пряму, яка перетинає дві інші прямі, називають їх січною. З двома даними прямими вона утворює 8 кутів. Деякі пари цих кутів мають окремі назви:

- 1 і 3, 2 і 4 — внутрішні різносторонні;
- 1 і 4, 2 і 3 — внутрішні односторонні;
- 1 і 8, 2 і 7, 3 і 6, 4 і 5 — відповідні;
- 5 і 7, 6 і 8 — зовнішні різносторонні;
- 5 і 8, 6 і 7 — зовнішні односторонні.



Ознаки паралельності прямих

- Дві прямі паралельні, якщо із січною вони утворюють рівні внутрішні різносторонні кути, або рівні відповідні кути, або такі внутрішні односторонні кути, сума яких дорівнює 180° .
- Дві прямі, паралельні третій, паралельні одна одній.
- Дві прямі, перпендикулярні до третьої, — паралельні.

Властивості паралельних прямих

- Січна з двома паралельними прямими утворює рівні внутрішні різносторонні кути; рівні відповідні кути; такі внутрішні односторонні кути, сума яких дорівнює 180° .
- Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна й до іншої.

РОЗДІЛ 3

Трикутники

Основна ідея, якою пройнята вся математика, – це ідея рівності.

Герберт Спенсер



КЛЮЧОВІ СЛОВА

- трикутники — triangles
- прямокутний трикутник — right triangle
- тупокутний трикутник — obtuse triangle
- гострокутний трикутник — acute triangle
- вершини — vertices
- сторони — sides
- кути — angles



У цьому розділі ти розшириш свої знання про трикутники й дізнаєшся про багато інших властивостей цих фігур. Основне в розділі — три ознаки рівності трикутників. Їх часто використовують у геометрії. Тому від того, чи добре ти вивчиш ці ознаки, залежить, як ти засвоїш наступні розділи підручника.

§ 10 ТРИКУТНИК І ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ

Якщо три точки, які не лежать на одній прямій, послідовно сполучити відрізками, матимемо *трикутник* (мал. 10.1).

Пишуть: $\triangle ABC$.

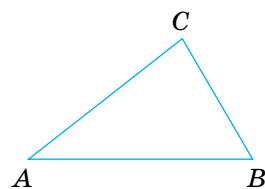
Точки A , B і C — *вершини* цього трикутника, відрізки AB , BC і CA — його *сторони*.

Кожний трикутник має три вершини і три сторони.

Багато різних моделей трикутників можна розглядати в підйомних кранах, заводських конструкціях, різних архітектурних спорудах (мал. 10.2).

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- нерівність трикутника — triangle inequality
- бісектриса — bisector
- висота — altitude
- медіана — median



Мал. 10.1

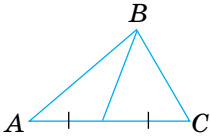


Мал. 10.2

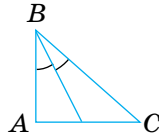
Нерівність трикутника. Кожна сторона трикутника коротша за суму двох інших його сторін.

Суму довжин усіх сторін трикутника називають його *периметром*. Периметр трикутника ABC позначають так: $P_{\triangle ABC}$.

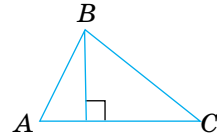
Відрізок, який сполучає вершину трикутника із серединою його протилежної сторони, — *медіана трикутника*.



Відрізок бісектриси кута трикутника, проведений від його вершини до протилежної сторони, — *бісектриса трикутника*.



Перпендикуляр, опущений із вершини трикутника на пряму, яка містить його протилежну сторону, — *висота трикутника*.



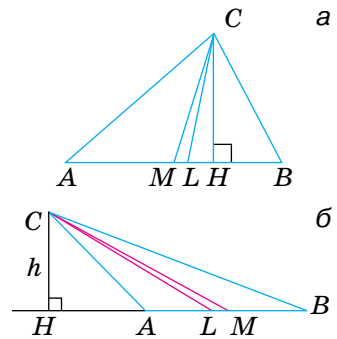
На малюнку 10.3 (а, б) зображено $\triangle ABC$, у якому з вершини C проведено: медіану CM , бісектрису CL і висоту CH .

Кожний трикутник має три медіани, три бісектриси і три висоти.

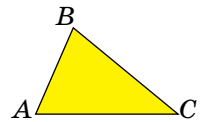
Трикутник розбиває площину на дві області: внутрішню й зовнішню. Фігуру, яка складається з трикутника і його внутрішньої області, також називають *трикутником* (мал. 10.4).

Кутами трикутника ABC називають кути $\angle BAC$, $\angle ABC$ і $\angle ACB$. Їх позначають і так: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Кожний трикутник має три кути.

У трикутнику ABC кут C називають протилежним стороні AB , а кути A і B — прилеглими до сторони AB . Сторону AB називають протилежною куту C , а сторони AC і BC — прилеглими до кута C .



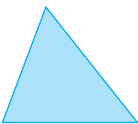
Мал. 10.3



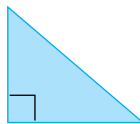
Мал. 10.4

Види трикутників (за кутами)

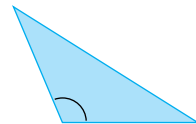
гострокутний



прямокутний



тупокутний



Мал. 10.5

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ



1. Словом *трикутник* геометри називають два різні поняття: і замкнену ламану з трьох ланок, і внутрішню частину площини, обмежену такою ламаною.

Так само *стороною трикутника* іноді називають відрізок, іноді — довжину цього відрізка; *висотою трикутника* — і певний відрізок, і його довжину.

Так роблять для зручності. Щоб кожного разу не говорити, наприклад, «довжина висоти трикутника дорівнює 5 см», домовилися говорити простіше: «висота трикутника дорівнює 5 см».

2. Кожний многокутник можна розрізати на кілька трикутників. Тому трикутники в геометрії відіграють таку саму важливу роль, як атоми у фізиці чи цеглини в будинку. Існує навіть окрема частина геометрії — досить цікава й багата за змістом: *геометрія трикутника*.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що таке трикутник? Назви елементи трикутника.
2. Які види трикутників ти знаєш? Сформулуй їх означення.
3. Що таке бісектриса, медіана й висота трикутника?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

Середнє арифметичне всіх сторін трикутника дорівнює m . Знайди периметр трикутника.

- Якщо a, b, c — сторони трикутника, а P — його периметр, то $\frac{a+b+c}{3} = m$, або $\frac{P}{3} = m$, звідси

$$P = 3m.$$

$$\text{Отже, } P = 3m.$$



ВИКОНАЄМО УСНО

364. Чим відрізняється бісектриса трикутника від бісектриси кута?

365. Чи можуть дві сторони трикутника бути перпендикулярними до його третьої сторони?

366. Скільки висот трикутника можуть лежати зовні нього?



367. Чи може висота трикутника збігатися з його стороною?

368. Знайди периметр трикутника ABC , якщо:

а) $AB = 6$ см, $BC = 3$ см, $AC = 7$ см;

б) $AB = 2,2$ дм, $BC = 8,5$ дм, $AC = 8,8$ дм.

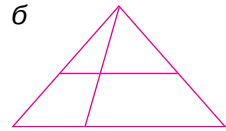
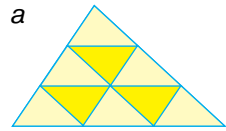
369. Чи існує трикутник зі сторонами:

а) 3 см, 4 см і 8 см;

б) 3 см, 4 см і 5 см;

в) 5 м, 5 м і 10 м?

370. Скільки різних трикутників зображено на малюнку 10.6 (a , b)?



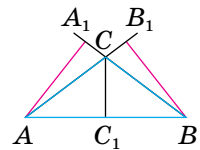
Мал. 10.6

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

371. Накресли будь-який трикутник. Познач його вершини буквами K , P і T . Назви сторони й кути трикутника. Виміряй сторони побудованого трикутника та знайди його периметр.

372. Накресли гострокутний трикутник ABC . Проведи з його вершини A медіану, бісектрису й висоту.

373. Чи правильно, що на малюнку 10.7 відрізки AA_1 , BB_1 , CC_1 — висоти трикутника ABC ? Побудуй тупокутний трикутник. Проведи в ньому висоти.



Мал. 10.7

374. Побудуйте: а) гострокутний; б) тупокутний трикутник. Проведіть його медіани одним кольором і висоти — іншим.

375. Побудуй прямокутний трикутник. Проведи в ньому висоти.

376. Довжини сторін трикутної кахлі дорівнюють 2,6 дм, 5,3 дм і 6,8 дм. Знайди її периметр.

377. Довжини сторін трикутної клумби дорівнюють 3,8 м, 4,5 м і 7,5 м (мал. 10.8). Знайди довжину декоративного паркану для огорожі цієї клумби.



Мал. 10.8

378. CK і BE — медіани трикутника ABC , $AK = 8$ см, $CE = 10$ см. Знайди периметр трикутника ABC , якщо $BC = 28$ см.

379. AM і BN — медіани трикутника ABC , $AN = 5$ см, $BM = 7$ см. Знайди периметр трикутника ABC , якщо $AB = 15$ см.



380. Периметр трикутника ABC дорівнює 26 см. Знайди його невідомі сторони, якщо $AC = 10$ см і:
- а) $BC = 3AB$; в) $AB = BC$; г) $AB = AC - 2$ см;
 б) $AB : BC = 3 : 5$; г) $BC - AB = 6$ см; д) $AC = 0,5AB + 6$ см.
381. Периметр трикутника ABC дорівнює 38 см. Знайди його невідомі сторони, якщо $AB = 14$ см і:
- а) $BC = AC$; б) $AC : BC = 3 : 1$; в) $AC - BC = 8$ см.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

382. Накресліть довільний трикутник і проведіть усі його бісектриси. Що ви помітили? Чи можна стверджувати, що всі три бісектриси трикутника проходять через одну точку? А всі три медіани трикутника?



383. M і N — середини сторін AB і BC трикутного вікна ABC (мал. 10.9). Периметр трикутника MN у 2 рази менший від периметра трикутника ABC . Знайди MN , якщо $AC = 10$ см.

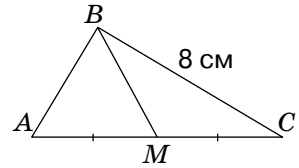


Мал. 10.9

384. Знайди сторони трикутника, якщо одна з них більша за другу вдвічі, менша від третьої на 3 см і друга сторона менша від третьої на 8 см.
385. Знайди сторони трикутника, якщо одна з них більша за другу вдвічі, а за третю — на 4 см, сума другої та третьої сторін дорівнює 14 см.
386. Сторони трикутника пропорційні числам 4, 5 і 8. Знайди периметр трикутника, якщо найбільша його сторона більша за найменшу на 24 см.
387. Знайди периметр трикутника, якщо він більший від першої сторони на 7 м, від другої — на 8 м, а від третьої — на 9 м.
388. Find the perimeter of the triangle if it is 7 meters longer than the first side, 8 meters longer than the second side, and 9 meters longer than the third side.

389. Середнє арифметичне всіх сторін трикутника дорівнює 10 дм. Знайди периметр трикутника.

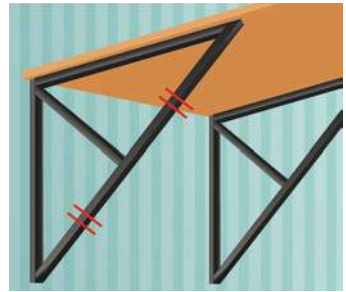
390. BM — медіана трикутника ABC і $BM = MC$ (мал. 10.10). Знайди периметр трикутника ABC , якщо периметр трикутника ABM дорівнює 16 см, $BC = 8$ см.



Мал. 10.10

391. AK — медіана трикутника ABC і $AK = KC$. Знайди периметр трикутника ABC , якщо периметр трикутника ABK дорівнює 10 см, $AC = 6$ см.

392. Трикутну підпірку з периметром 22 см поділено медіаною на два трикутники з периметрами 12 см і 16 см (мал. 10.11). Знайдіть довжину медіани підпірки.



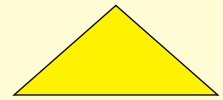
Мал. 10.11

393. Знайди висоту VH трикутника ABC , якщо периметри трикутників ABC , AVH і BVC дорівнюють відповідно 26 см, 14 см і 18 см.

394. BM — медіана трикутника ABC , а периметри трикутників ABM і BCM — рівні. Доведи, що $AB = BC$.

395. На сторонах AB і BC трикутника ABC взято точки M і K так, що $MK \parallel AC$. Доведи, що кути трикутника MVK дорівнюють відповідно кутам трикутника ABC .

396. Трикутник ділить площину на дві частини: обмежену й необмежену (мал. 10.12). На скільки частин можуть ділити площину розташовані на ній:
а) трикутник і пряма; б) два трикутники;
в) трикутник і коло?



Мал. 10.12

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

397. Виріж стрічки завдовжки 8 см, 5 см, 3 см і 9 см. Скільки трикутників можна утворити з будь-яких трьох із цих стрічок?



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



398. Скільки квадратних метрів містить 1 км², 1 га, 1 ар?
399. Поле прямокутної форми має площу 20 га, а одна його сторона — завдовжки півкілометра. Знайди довжину іншої сторони поля.
400. Сума кутів $\angle AOB$ і $\angle BOC$ дорівнює 100° . Знайди кут між їх бісектрисами, якщо промінь OB для кута $\angle AOC$ — внутрішній.

§ 11 КУТИ ТРИКУТНИКА

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- внутрішній кут трикутника — interior angle of a triangle
- зовнішній кут трикутника — exterior angle of a triangle

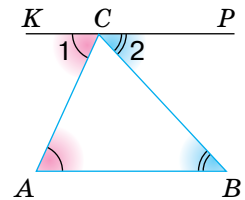
Теорема 8. Сума кутів трикутника дорівнює 180° .

Доведення. Нехай ABC — довільний трикутник (мал. 11.1). Через його вершину C проведемо пряму KP , паралельну стороні AB .

Утворені кути $\angle ACK$ і $\angle BCP$ позначимо цифрами 1 і 2. Тоді $\angle A = \angle 1$, $\angle B = \angle 2$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AB і KP та січних AC і BC . Кути 1, 2 і C в сумі дорівнюють розгорнутому куту, тобто 180° . Тому:

$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle 1 + \angle 2 + \angle C = 180^\circ.$$

Отже, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.



Мал. 11.1

Наслідок. Трикутник не може мати двох прямих або двох тупих кутів. У кожному трикутнику принаймні два кути — гострі.

Зверни увагу! У доведеній теоремі йдеться про суму мір кутів трикутника. Але для спрощення формулювань замість «міра кута» часто вживають слово «кут».

Іноді крім кутів трикутника (внутрішніх), розглядають також його зовнішні кути.

Зовнішнім кутом трикутника називають кут, утворений стороною трикутника і продовженням його іншої сторони. Наприклад, зовнішнім кутом трикутника ABC при вершині A є кут KAC (мал. 11.2).

Теорема 9. Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів трикутника, не суміжних із ним.

Доведення. Нехай $\angle KAC$ — зовнішній кут трикутника ABC (мал. 11.2). Тоді:

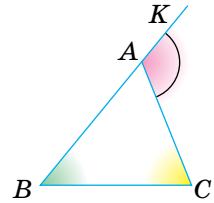
$$\angle KAC = 180^\circ - \angle BAC \text{ (згідно з теоремою про суміжні кути);}$$

$\angle B + \angle C = 180^\circ - \angle BAC$ (згідно з теоремою про суму кутів трикутника).

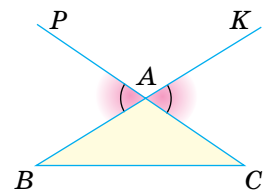
Отже, $\angle KAC = \angle B + \angle C$.

Наслідок. Зовнішній кут трикутника більший за кожний внутрішній кут, не суміжний із ним.

Зверни увагу! При кожній вершині трикутника можна побудувати два зовнішні кути, продовживши одну чи іншу його сторону. Наприклад, кожний із кутів KAC і PAB — зовнішній кут трикутника ABC при вершині A (мал. 11.3). Такі два зовнішні кути — вертикальні, тому дорівнюють один одному.



Мал. 11.2

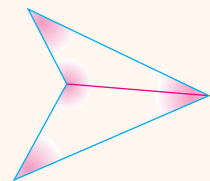


Мал. 11.3

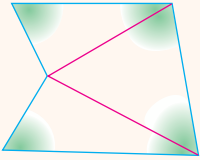
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Теорему про суму кутів трикутника можна узагальнити й поширити на довільні многокутники.

Кожний чотирикутник можна розрізати на два трикутники, сполучивши його протилежні вершини відрізком. (Якщо один із кутів чотирикутника більший від розгорнутого, то саме його вершину слід сполучити з протилежною, як на малюнку 11.4.) Сума всіх кутів чотирикутника дорівнює сумі всіх кутів двох утворених трикутників, тобто $180^\circ \cdot 2$. Отже, сума кутів будь-якого чотирикутника дорівнює 360° .



Мал. 11.4



Мал. 11.5

Довільний п'ятикутник можна розрізати на чотирикутник і трикутник або на 3 трикутники (мал. 11.5).

Отже, сума кутів п'ятикутника дорівнює $180^\circ \cdot 3$, тобто 540° .

Спробуй написати формулу, за якою можна обчислити суму кутів довільного n -кутника.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюй та доведи теорему про суму кутів трикутника.
2. Що таке зовнішній кут трикутника?
3. Сформулюй та доведи теорему про зовнішній кут трикутника.
4. Чи правильно, що зовнішній кут трикутника більший за кожний внутрішній кут, не суміжний із ним?
5. Чому дорівнює сума кутів чотирикутника?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Чому дорівнює сума зовнішніх кутів трикутника, узятих по одному при кожній вершині?

- Нехай ABC — довільний трикутник. Позначимо його зовнішні кути цифрами 1, 2 і 3 (мал. 11.6).

Перший спосіб:

Згідно з теоремою про зовнішній кут трикутника

$$\angle 1 = \angle B + \angle C, \quad \angle 2 = \angle A + \angle B,$$

$$\angle 3 = \angle A + \angle C.$$

Додавши окремо ліві й праві частини цих рівностей, матимемо:

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle B + \angle C + \angle A + \angle B + \angle A + \angle C =$$

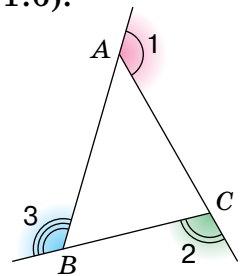
$$= 2(\angle A + \angle B + \angle C) = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ.$$

Другий спосіб:

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ - \angle A + 180^\circ - \angle C + 180^\circ - \angle B =$$

$$= 540^\circ - (\angle A + \angle C + \angle B) = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ.$$

Отже, сума зовнішніх кутів трикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360° .



Мал. 11.6

2. Доведи, що в кожному трикутнику є кут, не більший за 60° , і кут, не менший від 60° .

- Якби кожний кут трикутника був менший від 60° , то сума всіх його кутів становила б менше 180° , а це неможливо. Якби кожний кут трикутника був більший за 60° , то сума всіх його кутів була б більшою за 180° , що також неможливо.

Отже, у кожному трикутнику є кут, не більший за 60° , і кут, не менший від 60° .

ВИКОНАЄМО УСНО



401. Сума двох кутів трикутника дорівнює 80° . Знайди третій кут.
402. Два кути трикутника дорівнюють 30° кожний. Знайди третій кут.
403. Два кути трикутника дорівнюють 20° і 80° . Знайди третій кут.
404. Чи існує трикутник із кутами: 60° , 70° і 80° ?
405. Знайди кути прямокутного трикутника, якщо один із них дорівнює 30° .
406. Чи може кожний зовнішній кут трикутника дорівнювати 100° ?

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

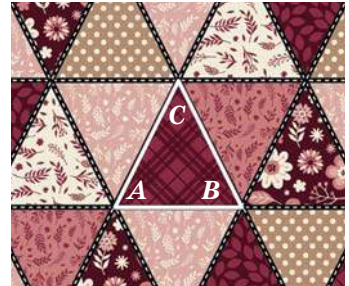
407. Заповни порожні клітинки таблиці про кути трикутника ABC .

$\angle A$	30°	20°		83°	95°		54°
$\angle B$	70°		45°		35°	47°	
$\angle C$		100°	45°	17°		67°	54°

408. Знайди невідомі кути трикутника, якщо один із них дорівнює 42° , а другий:
- на 15° менший за перший кут;
 - у два рази більший за перший кут;
 - дорівнює третьому куту.
409. Знайди невідомі кути трикутника, якщо один із них дорівнює 102° , а другий:
- на 54° менший за перший кут;
 - у три рази менший за перший кут;
 - дорівнює третьому куту.



410. Знайди кути трикутника, якщо один із них:
 а) дорівнює другому і менший від третього на 30° ;
 б) більший за другий на 20° , а за третій — на 40° ;
 в) більший за другий у 2 рази, а за третій — на 10° .
411. Знайди кути трикутника, якщо один із них:
 а) дорівнює другому і більший від третього на 24° ;
 б) менший за другий на 28° , а за третій — на 14° ;
 в) більший за другий у 3 рази, а за третій — на 16° .
412. Знайдіть кути трикутної металевої конструкції, якщо вони пропорційні числам:
 а) 2, 3 і 5; в) 2, 3 і 4; г) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$;
 б) 1, 5 і 6; г) 3, 4 і 11; д) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$.
413. Кути трикутника пропорційні числам 3, 5 і 10. Доведи, що цей трикутник тупокутний.
414. Кути трикутника пропорційні числам 1, 2 і 3. Доведи, що цей трикутник прямокутний.
415. Доведи, що сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90° .
416. У $\triangle ABC$ кути A і B дорівнюють 65° кожний. Знайди зовнішній кут трикутника при вершині C (мал. 11.7).
417. У трикутнику ABC кути B і C дорівнюють 36° і 48° . Знайди зовнішній кут трикутника при вершині A .



Мал. 11.7

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

418. Знайди кути трикутника ABC , якщо $\angle A + \angle B = 100^\circ$ і $\angle B + \angle C = 120^\circ$.
419. Find the angles of the triangle $F EK$, if $\angle E + \angle F = 130^\circ, \angle E + \angle K = 80^\circ$.
420. $\angle ABC = 30^\circ$. Під яким кутом пряма AC перетинає промінь BC , якщо промінь BA вона перетинає під кутом 45° ?
421. $\angle AOB = 50^\circ$. Під яким кутом пряма AB перетинає промінь OA , якщо промінь OB вона перетинає під кутом 70° ?



422. CH і CL — висота і бісектриса трикутника ABC , $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$. Знайдіть $\angle HCL$.

423. BM і BK — висота й бісектриса трикутника PBC , $\angle P = 60^\circ$, $\angle C = 50^\circ$. Знайди $\angle MBK$.

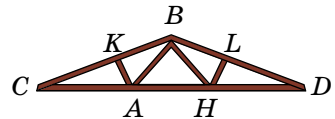
424. CL — бісектриса трикутника ABC , $\angle A = 80^\circ$, $\angle B = 40^\circ$. Знайди: $\angle CLB$ і $\angle CLA$.

425. BE — бісектриса трикутника ABC , $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 70^\circ$. Знайди: $\angle BEA$ і $\angle BEC$.

426. У трикутнику ABC бісектриси AP і CK перетинаються в точці O . Знайди $\angle AOC$, якщо $\angle B = 70^\circ$.

427. У трикутнику ABC бісектриси AP і CK перетинаються в точці O . Знайди $\angle B$, якщо $\angle AOC = 130^\circ$.

428. У фермі (тримальна конструкція) AK — висота трикутника ABC (мал. 11.8). Знайди $\angle BAK$ і $\angle CAK$, якщо:



Мал. 11.8

а) $\angle CBA = 50^\circ$ і $\angle C = 20^\circ$;

б) $\angle CBA = 30^\circ$ і $\angle C = 20^\circ$.

429. CH — висота трикутника ABC . Знайди $\angle ACH$ і $\angle BCH$, якщо:

а) $\angle A = 30^\circ$ і $\angle B = 70^\circ$;

б) $\angle A = 30^\circ$ і $\angle B = 120^\circ$.

430. Знайдіть міри зовнішніх кутів трикутника ABC , якщо:

а) $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 50^\circ$;

б) $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 40^\circ$;

в) $\angle A + \angle C = 95^\circ$, $\angle B + \angle C = 135^\circ$.

431. Знайди міри зовнішніх кутів трикутника MPK , якщо:

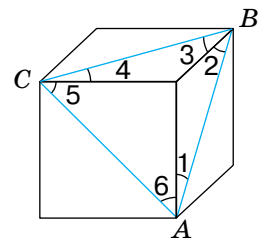
а) $\angle M = 30^\circ$, $\angle K = 85^\circ$;

б) $\angle P = 130^\circ$, $\angle K = 25^\circ$;

в) $\angle M + \angle P = 110^\circ$, $\angle M + \angle K = 130^\circ$.

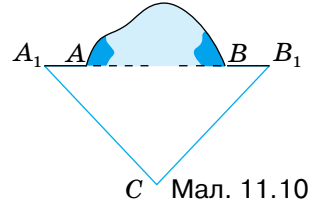
432. Кути A і B трикутника ABC — рівні. Доведи, що бісектриса зовнішнього кута трикутника ABC при вершині C паралельна стороні AB .

433. Знайди суму кутів, позначених на поверхні куба числами (мал. 11.9).

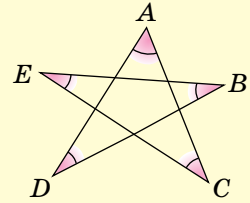


Мал. 11.9

434. Прямолінійний тунель AB пробивають із двох боків гори (мал. 11.10). Чи правильно вибрано напрямки A_1A і B_1B , якщо вимірювання показали, що $\angle A_1 = 50^\circ 10'$, $\angle B_1 = 48^\circ 20'$ і $\angle C = 80^\circ 5'$?

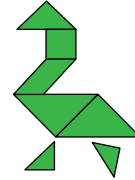
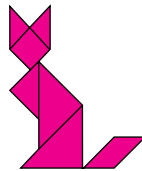
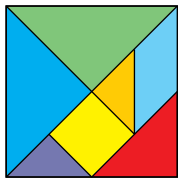


435. Знайди суму кутів A , B , C , D та E п'ятикутної зірки (мал. 11.11).



ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

436. Перемалюй малюнок 11.12 на картон і розріж на 7 частин. Склади із них кілька цікавих фігур, наприклад, як на малюнках 11.13, 11.14. Як називається така гра?



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

437. Відрізок, довжина якого дорівнює a , поділено на два нерівні відрізки. Знайди відстань між серединами утворених відрізків.
438. Один із суміжних кутів на 20° більший за інший. У скільки разів перший кут більший за другий?
439. Січна c з паралельними прямими a і b утворює внутрішні односторонні кути, що відносяться як $2 : 3$. Як відносяться кути, утворені бісектрисами цих кутів і січною c ?



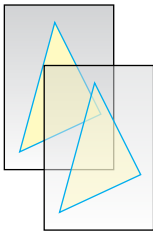
§ 12 ПРО РІВНІСТЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР

На малюнку 12.1 зображено два трикутники. Уяви, що один із них накреслений на папері, а інший — на прозорій плівці. Переміщаючи плівку, другий трикутник можна сумістити з першим. Кажуть: якщо дані трикутники можна сумістити накладанням, то вони — *рівні*. Рівними один одному бувають не тільки трикутники, а й відрізки, кути, кола та інші фігури.

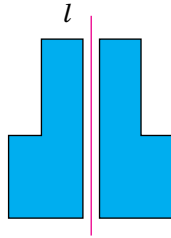
КЛЮЧОВІ СЛОВА

рівні фігури —
congruent figures

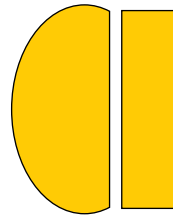
Зображені на малюнку 12.2 фігури також рівні, бо їх можна сумістити, перегнувши аркуш паперу по прямій l . А фігури, зображені на малюнку 12.3, — нерівні, їх не можна сумістити.



Мал. 12.1



Мал. 12.2



Мал. 12.3

Цій загальній трактовці рівності геометричних фігур не суперечить поняття рівності відрізків і кутів, бо якщо відрізки (кути) мають рівні довжини (міри), то їх можна сумістити накладанням.

Для позначення рівних фігур використовують знак рівності «=». Наприклад, $AB = KP$, $\angle A = \angle B$, $\triangle ABC = \triangle KPT$.

Якщо кожна з двох фігур дорівнює третій, то перша і друга фігури також рівні.

З рівними фігурами часто доводиться мати справу багатьом фахівцям. У формі рівних фігур випускають листи жерсті, фанери, скла, облицювальні плитки, паркетини, розгортки для коробок тощо (мал. 12.4, с. 108). Рів-

ні всі аркуші паперу з однієї пачки, відповідні деталі двох машин однієї марки.



Мал. 12.4

Щоб з'ясувати, чи рівні дві фігури, можна спробувати їх су-містити. Але на практиці це не завжди можна зробити. Напри-клад, таким способом не можна з'ясувати, чи рівні дві земельні ділянки. Тому доводиться шукати інші способи виявлення ознак рівності тих чи інших фігур. Наприклад, якщо радіуси двох кіл рівні, то рівні й самі кола. Це — ознака рівності кіл. У наступно-му параграфі ми розглянемо ознаки рівності трикутників.

Зверни увагу! Трикутник із вершинами A , B і C можна познача-ти по-різному: $\triangle ABC$, $\triangle BCA$, $\triangle CAB$, $\triangle BAC$ тощо. Однак для зручно-сті домовимося, що коли пишуть $\triangle ABC = \triangle KPT$, то розуміють, що $\angle A = \angle K$, $\angle B = \angle P$, $\angle C = \angle T$, $AB = KP$, $AC = KT$, $BC = PT$.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Слово «рівність» у математиці й інших науках вживається досить часто. Говорять, зокрема, про рівність чисел, рів-ність виразів, рівність значень величин. Рівність геометрич-них фігур — це *відношення*. Воно має такі **властивості**:

- 1) **кожна фігура дорівнює сама собі;**
- 2) **якщо фігура A дорівнює фігурі B , то й фігура B дорівнює фігурі A ;**
- 3) **якщо фігура A дорівнює фігурі B , а фігура B дорівнює фігурі C , то фігури A і C — також рівні.**

Нерідко з рівності одних фігур чи величин впливає рівність інших, але не завжди. Наприклад, якщо трикутники рівні, то і їхні периметри рівні. Але якщо периметри двох трикутників рівні, то це не означає, що рівні й самі трикутники. Так само: якщо прямокутники рівні, то і їхні площі рівні. Але якщо площі двох прямокутників рівні, це не означає, що й прямокутники рівні.

Досить часто для обґрунтування рівності тих чи інших фігур треба обґрунту-вати рівність деяких трикутників. Ось чому питання про рівність трикутників у геометрії дуже важливе: більшість теорем шкільної геометрії доводять, корис-туючись ознаками рівності трикутників.



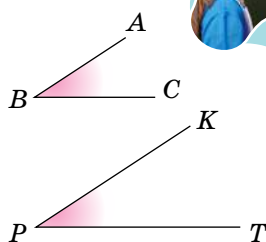
ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Які фігури називають рівними?
2. Яким знаком позначають рівність фігур?
3. Наведи приклади предметів довкілля, що мають форму рівних геометричних фігур.
4. Сформулюй ознаку рівності двох кіл.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Чи рівні кути, зображені на малюнку 12.5?

- Сторони кута — промені. Хоч на малюнку вони зображені нерівними відрізками, але слід уявляти їх нескінченними променями. Оскільки кожний із цих кутів дорівнює 35° (перевір), то вони — рівні.



Мал. 12.5

2. Доведи, що трикутники не можуть бути рівними, якщо не рівні їх найбільші кути.

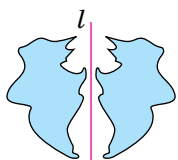
- Нехай у $\triangle ABC$ найбільший кут A , а у $\triangle KPT$ найбільший кут K . Якби дані трикутники були рівні, їх можна було б сумістити. Тоді найбільший кут A трикутника ABC сумістився б із найбільшим кутом K трикутника KPT . Це неможливо, оскільки $\angle A \neq \angle K$. Отже, дані трикутники не можуть бути рівними.

ВИКОНАЄМО УСНО

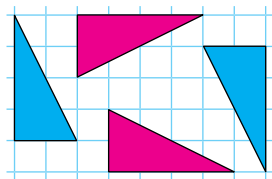
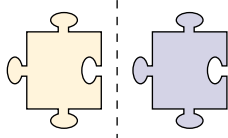
440. Чи рівні дві фігури на малюнку 12.6?

441. Чи рівні трикутники, зображені на малюнку 12.7?

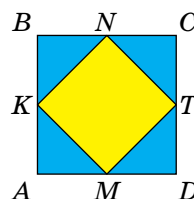
442. Середини сторін квадрата $ABCD$ послідовно сполучили відрізками так, що утворилося 4 трикутники (мал. 12.8). Чи правильно, що кожний із цих трикутників дорівнює іншому?



Мал. 12.6



Мал. 12.7



Мал. 12.8



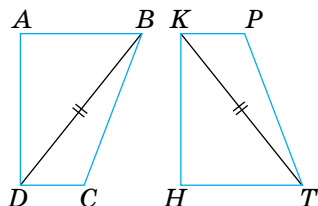
443. Чи рівні як геометричні фігури символи:
а) O і 0 ; б) $< i >$; в) $=$ і \parallel ; г) Γ і L ?
444. Чи можуть бути рівними прямокутний і тупокутний трикутники? А прямокутний і гострокутний?
445. а) Трикутники ABC і KPT — рівні. Чи рівні їх периметри?
б) Периметри трикутників ABC і KPT — рівні. Чи рівні трикутники?
446. Один із двох суміжних кутів можна сумістити з іншим. Які це кути?
447. Які з фігур, зображених на малюнку 12.9, — рівні?



Мал. 12.9

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

448. Чи можуть бути рівними дві трикутні серветки, найменші сторони яких не рівні?
449. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ наклали один на одний так, що сумістилися вершини A і A_1 , B і B_1 , C і C_1 . Чи сумістяться сторони AB і A_1B_1 , AC і A_1C_1 , BC і B_1C_1 ? А медіани AM і A_1M_1 ?
450. Знайди периметр трикутника KPT , якщо $\Delta KPT = \Delta ABC$, $AB = 3$ см, $BC = 4$ см і $AC = 5$ см.
451. Find the perimeter of the triangle ABC , if $\Delta KPT = \Delta ABC$, $KP = 13$ mm, $PT = 24$ mm і $KT = 15$ mm.
452. Знайди кути трикутника ABC , якщо $\Delta ABC = \Delta KPT$, $\angle K = 60^\circ$ і $\angle P = 60^\circ$.
453. Фігури $ABCD$ і $HTPK$ — рівні (мал. 12.10). Знайди кут T і відстань KT , якщо $BD = 3,8$ см і $\angle B = 70^\circ$.



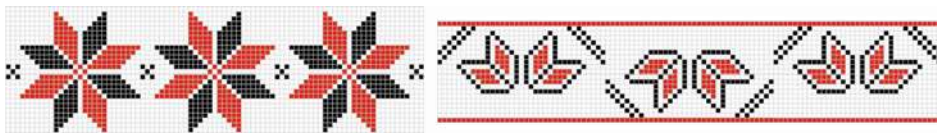
Мал. 12.10



454. Сторони AB і PT — не рівні. Чи можуть бути рівними трикутники ABC і KPT ?



455. В основу багатьох українських вишивок і орнаментів покладено рівні ромби різного кольору (мал. 12.11). Створи орнамент із рівних: а) квадратів; б) трикутників; в) відрізків.



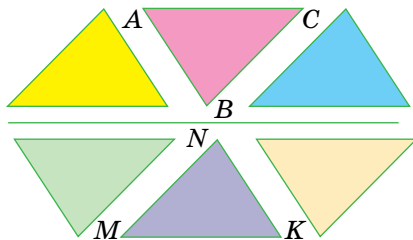
Мал. 12.11

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ Б

456. $\triangle ABC$ — тупокутний, а кути трикутника $A_1B_1C_1$ пропорційні числам 5, 6 і 7. Чи можуть бути рівними ці трикутники?

457. $\triangle ABC = \triangle KNM$, $\angle N = 2\angle A$ (мал. 12.12). Знайди кути трикутників, якщо $\angle C = 60^\circ$.



Мал. 12.12

458. $\angle AOB$ і $\angle BOC$ — суміжні, $\angle BOC - \angle AOB = 30^\circ$, $\angle MKP$ і $\angle PKN$ — суміжні, $\angle MKP : \angle PKN = 7 : 5$. Укажіть пари рівних кутів, якщо вони є.


459. Периметри прямокутників $ABCD$ і $MNPK$ дорівнюють 28 см кожний. Побудуй ці прямокутники так, щоб:
а) вони були рівними;
б) вони не були рівними.

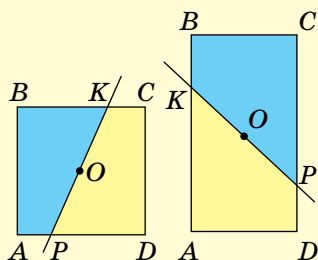
460. Одна зі сторін прямокутника $ABCD$ на 3 см більша за іншу, а його периметр дорівнює 34 см. Площа прямокутника $MNPK$ дорівнює 70 см^2 . Чи можуть бути рівними ці прямокутники? А якщо площа прямокутника $MNPK$ дорівнює 72 см^2 ?



461. На координатній площині дано точки $A(1; 4)$, $B(2; 7)$, $C(2; 4)$, $D(2; 1)$, $K(4; 1)$. Чи рівні трикутники ABC і ADC ?
А трикутники ABC і CDK ?

462. Прямокутники $ABCD$ і $KPTM$ дорівнюють один одному і $AB = KP = 10$ см. Знайди KM , якщо $AC = 26$ см і периметр трикутника KPT дорівнює 60 см.

463.  Чи правильно, що кожна пряма, проведена через центр O квадрата або прямокутника (мал. 12.13), поділяє його на дві рівні фігури?



Мал. 12.13

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

464. а) Виріж круг. Пряма, яка проходить через центр круга, розбиває його на два півкруга. Чи рівні вони? Як можна один півкруг сумістити з іншим? Покажи.

б) Зроби розгортку куба. Чи рівними фігурами є грані куба?



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

465. Накресли круг із діаметром 6 см. Чому дорівнюють його площа й довжина кола, яке його обмежує?

466. У трикутнику ABC $\angle A = 70^\circ$, а $\angle B$ — на 20° більший за $\angle C$. Під яким кутом перетинаються висоти кутів B і C ?

467. У трикутнику ABC всі кути рівні. Доведи, що бісектриси будь-яких двох із них перетинаються під рівними кутами.



§ 13 ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- ознаки рівності трикутників — triangle congruence theorems
- перша ознака рівності трикутників — SAS triangle congruence
- друга ознака рівності трикутників — ASA triangle congruence

Якщо трикутні серветки ABC і $A_1B_1C_1$ рівні одна одній, то їх можна сумістити (мал. 13.1).

Тож якщо сумістяться вершини A і A_1 , B і B_1 , C і C_1 , то сумістяться й сторони:

AB з A_1B_1 , BC з B_1C_1 , CA з C_1A_1 ,
і кути: $\angle A$ з $\angle A_1$, $\angle B$ з $\angle B_1$, $\angle C$ з $\angle C_1$.

Отже, якщо $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, то $\begin{cases} AB = A_1B_1, BC = B_1C_1, CA = C_1A_1, \\ \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1. \end{cases}$

Щоб з'ясувати, що два трикутники рівні, не обов'язково їх суміщати. Простіше скористатися ознаками рівності трикутників.

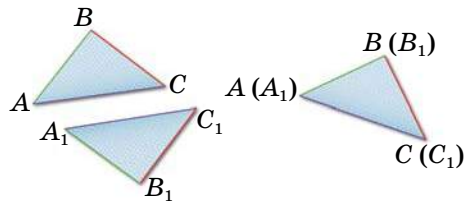
Теорема 10 (перша ознака рівності трикутників).

Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники — рівні.

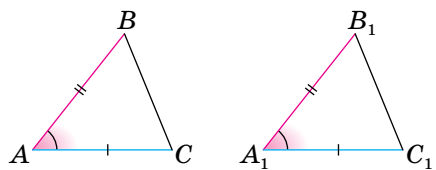
Доведення. Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — два трикутники, у яких $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ і $\angle A = \angle A_1$ (мал. 13.2).

Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Накладемо $\triangle A_1B_1C_1$ на $\triangle ABC$ так, щоб вершина A_1 сумістилася з вершиною A , вершина B_1 — з вершиною B , а сторона A_1C_1 наклалися на промінь AC . Це зробити можна, бо згідно з умовою, $A_1B_1 = AB$ і $\angle A_1 = \angle A$. Оскільки $A_1C_1 = AC$, то при такому накладанні точка C_1 суміститься з точкою C . У результаті всі вершини трикутника $A_1B_1C_1$ сумістяться з відповідними вершинами трикутника ABC . Отже, $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.



Мал. 13.1



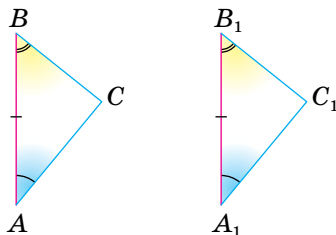
Мал. 13.2

Теорема 11 (друга ознака рівності трикутників).
Якщо сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні й прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники — рівні.

Доведення. Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — два трикутники, у яких $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, і $\angle B = \angle B_1$ (мал. 13.3).

Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Накладемо $\triangle A_1B_1C_1$ на $\triangle ABC$ так, щоб вершина A_1 сумістилася з вершиною A , вершина B_1 — з вершиною B , а сторона A_1C_1 накладалася на промінь AC . Це зробити можна, бо $AB = A_1B_1$ і $\angle A = \angle A_1$. Оскільки $\angle B = \angle B_1$, то сторона B_1C_1 накладеться на промінь BC . Отже, при такому накладанні промінь A_1C_1 суміститься з променем AC , а промінь B_1C_1 — з променем BC . Точка C_1 , у якій перетинаються промені A_1C_1 і B_1C_1 , суміститься з точкою C — точкою перетину променів AC і BC . Як бачимо, трикутник $A_1B_1C_1$ можна сумістити з трикутником ABC , а це означає, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.



Мал. 13.3

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Існує ще одна ознака рівності трикутників (див. теорему 18).

На ознаки рівності трикутників згодом доведеться посилалися часто. Щоб не сплутати, яку з них названо першою, яку — другою і т. д., їх краще розрізняти за змістом, говорити про **ознаку рівності трикутників:**

- 1) **за двома сторонами і кутом між ними;**
- 2) **за стороною і двома прилеглими кутами;**
- 3) **за трьома сторонами** (її доведемо пізніше).

Ці ознаки рівності трикутників називають загальними ознаками, бо вони правильні для будь-яких трикутників. Крім них, існують ще ознаки рівності прямокутних трикутників, рівнобедрених трикутників тощо.

Два рівносторонні трикутники рівні, якщо сторона одного з них дорівнює стороні іншого.

Спробуй довести цю ознаку, користуючись загальними ознаками.



ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюй ознаку рівності трикутників.
2. Доведи кожную з ознак рівності трикутників.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $AO = DO$ і $CO = BO$. Доведи, що $AC = DB$.

- Розглянемо трикутники ACO і DBO (мал. 13.4).

Їх кути при вершині O — вертикальні, отже, рівні. Відповідні сторони також рівні: $AO = DO$, $CO = BO$. Згідно з першою ознакою рівності трикутників $\triangle ACO = \triangle DBO$. Сторони AC і DB цих трикутників відповідні, бо лежать проти рівних кутів при вершині O .

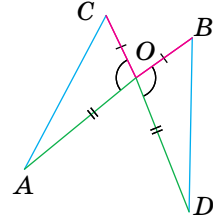
Отже, $AC = DB$.

2. Дві сторони трикутника дорівнюють одна одній. Доведи, що медіани, проведені до цих сторін, також рівні.

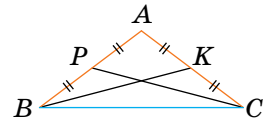
- Нехай у трикутнику ABC $AB = AC$, а BK і CP — медіани (мал. 13.5).

$AP = AK$ як половини рівних сторін.

$\triangle ABK = \triangle ACP$ (за першою ознакою рівності трикутників), бо $AB = AC$, $AK = AP$ і $\angle A$ — спільний. Отже, $BK = CP$.



Мал. 13.4



Мал. 13.5

ВИКОНАЄМО УСНО

468. Чи рівні грані намету, якщо під час його складання вони суміщаються (мал. 13.6)?



Мал. 13.6



Мал. 13.7



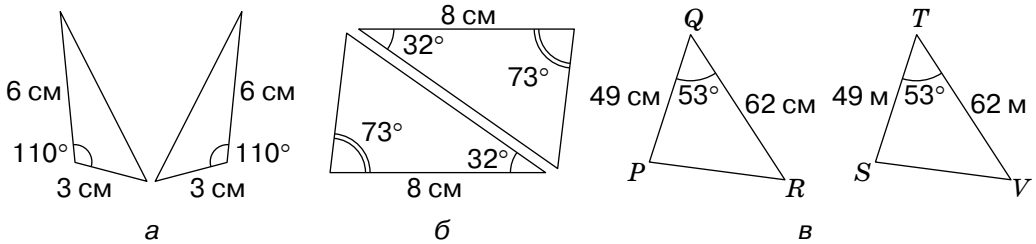
Мал. 13.8

469. Як найпростіше перевірити, чи рівні:

- металеві пластини на сережках (мал. 13.7);
- права й ліва входні арки будівлі (мал. 13.8)?



470. Чи рівні трикутники на малюнку 13.9, *a*–*в*? Якщо так, то за якою ознакою?



Мал. 13.9

471. Учні та учениці побудували в зошитах трикутники за стороною 5 см і прилеглими до неї кутами 30° і 70° . Чи рівні ці трикутники?

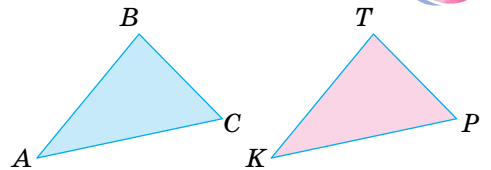
472. Учні побудували в зошитах трикутники за двома сторонами 3 см і 5 см та кутом 60° між ними. Чи рівні ці трикутники?

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



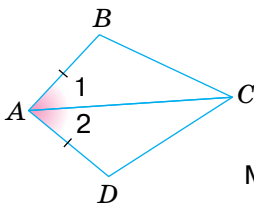
473. Запиши алгоритм доведення рівності трикутників: а) за першою ознакою; б) за другою ознакою.

474. Зробіть необхідні вимірювання на малюнку 13.10 і доведіть рівність трикутників: а) за першою ознакою; б) за другою ознакою.

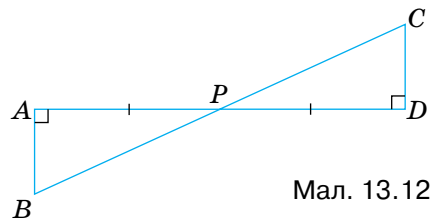


Мал. 13.10

475. Користуючись малюнком 13.11, доведи: якщо $AB = AD$ і $\angle 1 = \angle 2$, то $\triangle ABC = \triangle ADC$.



Мал. 13.11



Мал. 13.12

476. За малюнком 13.12 доведи рівність трикутників *PAB* та *PDC*.

477. Відрізки *AB* і *CD* перетинаються в точці *O* так, що $AO = OB$ і $CO = OD$. Доведи, що $\triangle AOC = \triangle BOD$.

478. Відрізки KP і EF перетинаються в точці M так, що $KM = MP$ і $EM = MF$. Знайди відстань між точками K і E , якщо $PF = 12$ см.

479. У рівносторонньому трикутнику ABC проведи бісектрису BM і доведи, що $AM = MC$.

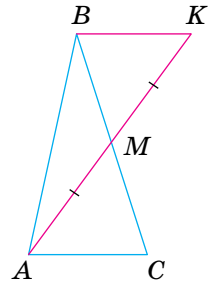
480. In an equilateral triangle ABC , draw the bisector AL and prove that $AL \perp BC$.

481. Нехай AM — медіана трикутника ABC і $MK = MA$ (мал. 13.13). Доведи, що $\triangle ACM = \triangle KBM$.

482. Нехай AM — медіана трикутника ABC і $MK = MA$ (мал. 13.13). Доведи, що $BK = AC$ і $BK \parallel AC$.

483. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O , яка є серединою кожного з них. Доведи, що $AC \parallel BD$.

484. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $AO = OB$ і $\angle CAO = \angle DBO$ (мал. 13.14). Доведи, що $\triangle AOC = \triangle BOD$.



Мал. 13.13

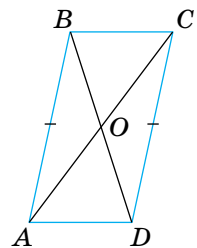


Мал. 13.14

485. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $CO = OD$ і $\angle ACO = \angle BDO$ (мал. 13.14). Доведи, що $\triangle AOC = \triangle BOD$.

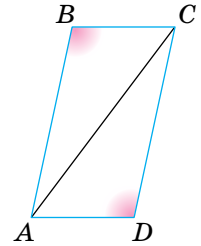
486. На малюнку 13.15 $AB = CD$, $AB \parallel CD$. Доведіть, що $\triangle AOB = \triangle COD$. Обговоріть план доведення.

487. На малюнку 13.15 $BC = AD$, $BC \parallel AD$. Доведи, що $\triangle BOC = \triangle DOA$.



Мал. 13.15

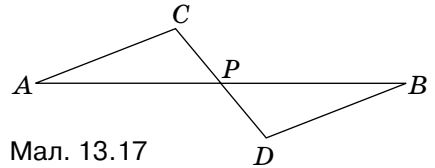
488. У чотирикутнику $ABCD$ $AB \parallel CD$ і $BC \parallel AD$ (мал. 13.16). Доведи, що $\angle B = \angle D$.



Мал. 13.16

489. У чотирикутнику $ABCD$ $AB \parallel CD$ і $BC \parallel AD$. Проведи відрізок BD і доведи, що:
а) $AB = CD$; б) $BC = AD$; в) $\angle A = \angle C$.

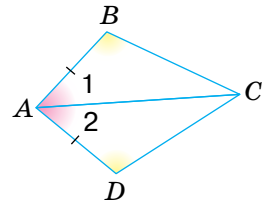
490. Через кінці відрізка AB проведено паралельні прямі AC і BD , а через середину P відрізка AB — пряму, яка перетинає прямі AC і BD в точках C і D (мал. 13.17). Знайди відстань між точками A і C , якщо $BD = 8$ см.



Мал. 13.17

491. Через кінці відрізка AB проведено паралельні прямі AC і BD , а через середину P відрізка AB — пряму, яка перетинає прямі AC і BD в точках C і D (мал. 13.17). Доведи, що P — середина CD .

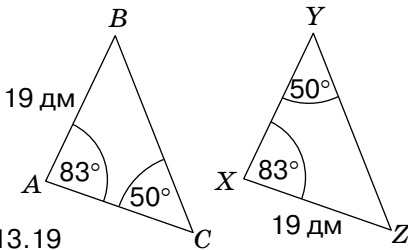
492. На малюнку 13.18 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle B = \angle D$ і $AB = AD$. Доведи, що $\triangle ABC = \triangle ADC$.



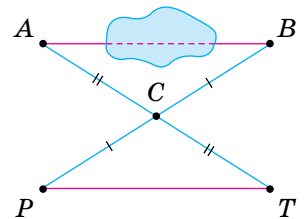
Мал. 13.18

493. Доведи, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, якщо $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ і $\angle B = \angle B_1$.

494. Доведи рівність трикутників ABC і XYZ (мал. 13.19).



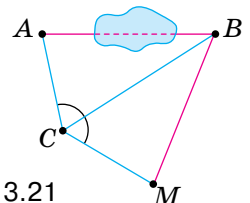
Мал. 13.19



Мал. 13.20

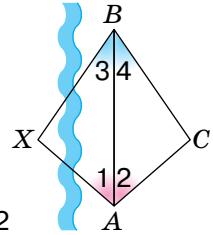
495. Щоб виміряти на місцевості відстань між пунктами A і B , між якими не можна пройти (мал. 13.20), вибирають таку точку C , від якої можна пройти і до A , і до B . Потім на прямих AC і BC відкладають відрізки $CT = AC$ і $CP = BC$. Відстань PT дорівнює AB . Чому?

496. Попередню задачу можна розв'язати іншим способом (мал. 13.21). Відкладають $\angle BCM = \angle BCA$ і $CM = CA$. Тоді $AB = MB$. Поясни чому.



Мал. 13.21

497. Щоб знайти відстань між пунктами A та X (мал. 13.22), на березі річки позначили точки B і C так, щоб виконувалися рівності $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 3 = \angle 4$. Шукана відстань AH дорівнює відстані AC . Чому?

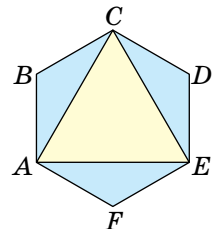


Мал. 13.22

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

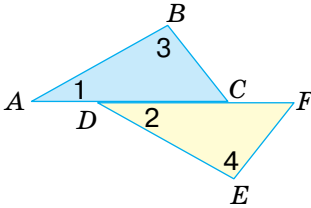


498. Рівні відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $OA = OC$. Доведіть, що $\angle ABC = \angle ADC$.
499. Рівні відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $OB = OD$. Доведи, що $\angle BAD = \angle BCD$.
500. Рівні відрізки AB і CD перетинаються в точці M так, що $AM = MD$. Доведи, що $\triangle ABC = \triangle DCB$.
501. На бісектрисі кута A позначено точку D , на сторонах цього кута — точки B і C такі, що $\angle BDA = \angle CDA$. Доведи, що:
а) $BD = CD$;
б) $BM = CM$, де M — довільна точка відрізка AD .
502. На бісектрисі кута K позначено точку M , на сторонах цього кута — точки A і B такі, що $\angle KMA = \angle KMB$. Доведи, що:
а) $AK = BK$;
б) $\angle KAC = \angle KBC$, де C — довільна точка відрізка KM .
503. Бісектриса AL трикутника ABC перпендикулярна до сторони BC . Доведи, що $AB = AC$.
504. Медіана BM трикутника ABC перпендикулярна до сторони AC . Доведи, що $AB = BC$.
505. Доведи, що медіани рівних трикутників, проведені до рівних сторін, — рівні.
506. Доведіть, що в рівних трикутниках рівні відповідні:
а) бісектриси; б) висоти.
507. У трикутнику ABC проведено медіани AP і BH . Доведи, що $\triangle APC = \triangle BHC$, якщо $AC = BC$.
508. Усі сторони шестикутника $ABCDEF$ рівні і всі його кути рівні (мал. 13.23). Доведи, що трикутник ACE — рівносторонній.

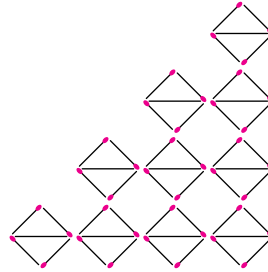


Мал. 13.23

509. На малюнку 13.24 $AD = CF$, $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 3 = \angle 4$. Доведи, що $\triangle ABC = \triangle DEF$.
510. На малюнку 13.24 $AD = CF$, $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 3 = \angle 4$. Доведи, що $AB = DE$.



Мал. 13.24



Мал. 13.25

511. За малюнком 13.25 запиши відповідну числову послідовність та продовж її.



ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

512. Скількома способами можна розрізати прямокутник на два рівні прямокутники? А на дві рівні фігури?
513. Як два рівні квадрати розрізати на рівні частини і скласти з них один квадрат?

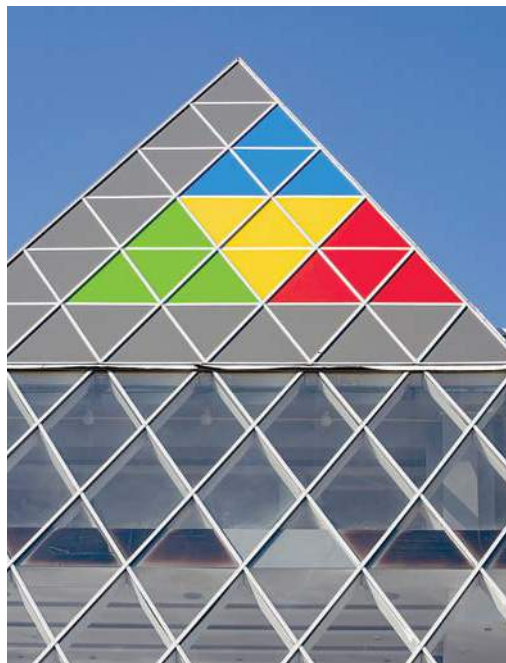
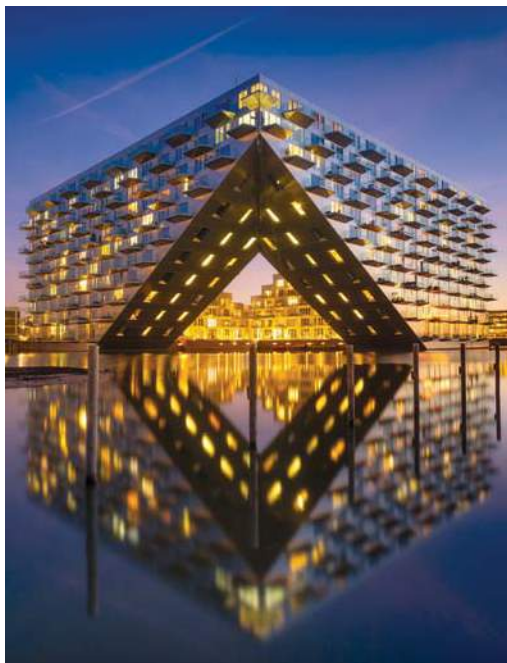


ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

514. Один із двох кутів на 40° більший за інший. Знайди ці кути, якщо суміжні з ними кути відносяться як $7 : 5$.
515. Чи має трикутник рівні сторони, якщо дві його сторони відносяться як $5 : 4$, третя — на 1 см більша за їх півсуму, а периметр трикутника дорівнює 28 см?
516. Чому дорівнює кут між бісектрисами внутрішнього й зовнішнього кутів трикутника, взятих при одній вершині?



ГЕОМЕТРІЯ НАВКОЛО НАС



м. Амстердам. Нідерланди



ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

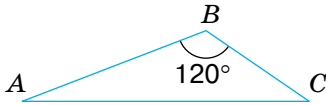
А

Б

1

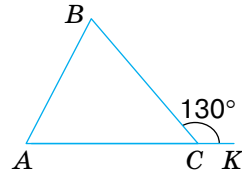
$$\angle A = \frac{2}{3} \angle C$$

$\angle A, \angle C$



$$\angle B = \angle A.$$

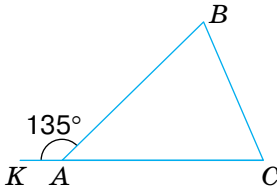
$\angle A, \angle B$



2

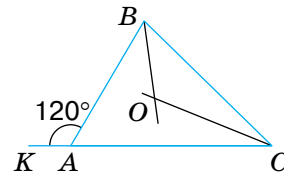
$$\angle B : \angle C = 4 : 5.$$

$\angle B, \angle C$



BO, CO — бісектриси.

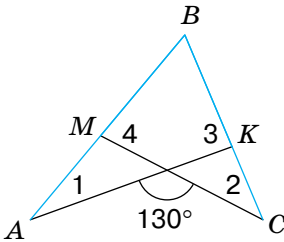
$\angle BOC$



3

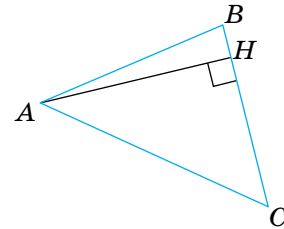
$$\angle 1 = 30^\circ, \angle 2 = 40^\circ.$$

$\angle 3, \angle 4$



$$\angle CAB = \angle ACB = 50^\circ.$$

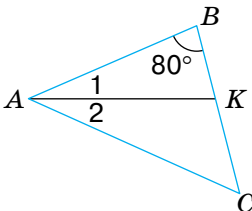
$\angle BAH, \angle CAH$



4

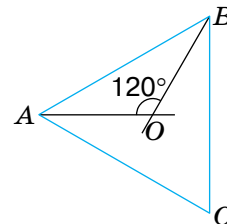
$$\angle BAC = \angle BCA, \angle 1 = \angle 2.$$

$\angle AKC$



AO, BO — бісектриси.

$\angle C$



САМОСТІЙНА РОБОТА

ВАРІАНТ 1

1. Накресли гострокутний трикутник і проведи його медіани.
2. Два кути трикутника дорівнюють 35° і 68° . Знайди третій кут.
3. Периметр трикутника дорівнює 35 см. Знайди довжини його сторін, якщо одна з них довша за другу на 3 см і коротша від третьої на 5 см.
4. У трикутнику ABC сторони AB і BC — рівні, а BH — бісектриса. Доведи, що $\triangle ABH = \triangle CBH$.

ВАРІАНТ 2

1. Накресли прямокутний трикутник і проведи його бісектриси.
2. Два кути трикутника дорівнюють 110° і 57° . Знайди третій кут.
3. Периметр трикутника дорівнює 50 м. Знайди довжини сторін трикутника, якщо одна з них довша за другу на 8 м, а за третю — на 5 м.
4. PM — висота трикутника KPT . Доведи, що $\triangle KPM = \triangle TPM$, якщо $KM = MT$.

ВАРІАНТ 3

1. Накресли тупокутний трикутник і проведи його медіани.
2. Два кути трикутника дорівнюють 87° і 56° . Знайди третій кут.
3. Периметр трикутника дорівнює 62 см. Знайди довжини його сторін, якщо одна з них довша за другу в 2 рази, а за третю — на 8 см.
4. У трикутнику ABC висота BM є одночасно й бісектрисою. Доведи, що $\triangle ABM = \triangle CBM$.

ВАРІАНТ 4

1. Накресли довільний трикутник і проведи всі його висоти.
2. Два кути трикутника дорівнюють 130° і 25° . Знайди третій кут.
3. Периметр трикутника дорівнює 85 м. Знайди довжини його сторін, якщо одна з них коротша від другої у 2 рази, а від третьої — на 1 м.
4. У трикутнику KPT висота PH є водночас і медіаною. Доведи, що $\triangle KPH = \triangle TPH$.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1 Один із кутів трикутника дорівнює 40° , а другий — на 20° більший. Третій кут трикутника дорівнює:	А 100° Б 80°	В 60° Г 120°
2 Зовнішні кути трикутника дорівнюють 100° і 120° . Знайди внутрішній кут при третій вершині.	А 60° Б 90°	В 40° Г 80°
3 Кути трикутника пропорційні числам 2, 3 і 5. Знайди найменший кут трикутника.	А 30° Б 54°	В 28° Г 36°
4 $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Який знак слід поставити замість * у записі: $\angle A * \angle A_1$?	А $<$ Б $=$	В $>$ Г \neq
5 $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Який знак слід поставити замість * у записі: $AB * A_1B_1$?	А $<$ Б $>$	В $=$ Г \neq
6 $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. $AB = 5$ см, $AC = 7$ см. Знайди BC , якщо $P_{\triangle A_1B_1C_1} = 21$ см.	А 11 см Б 19 см	В 10 см Г 9 см
7 $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 60^\circ$. Знайди $\angle C_1$.	А 50° Б 90°	В 30° Г 70°
Для виконання завдань 8–10 скористайся умовою: відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $AO = BO$ і $CO = DO$.		
8 Який трикутник дорівнює трикутнику AOC ?	А $\triangle AOD$ Б $\triangle BOD$	В $\triangle COB$ Г $\triangle CBD$
9 Якому куту дорівнює кут OAC ?	А $\angle ODB$ Б $\angle OBD$	В $\angle BOD$ Г $\angle AOD$
10 Яке з тверджень — хибне?	А $AC = BD$ Б $AC \parallel BD$	В $AB \parallel CD$ Г $AO = OB$

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називають трикутником?
2. Назви елементи трикутника.
3. Наведи приклади предметів довкілля, що мають форму рівних геометричних фігур.
4. Якими бувають трикутники?
5. Сформулюй означення прямокутного трикутника.
6. Сформулюй означення тупокутного трикутника.
7. Сформулюй означення гострокутного трикутника.
8. Що називають висотою трикутника?
9. Сформулюй означення медіани трикутника.
10. Що називають бісектрисою трикутника?
11. Чим відрізняється бісектриса трикутника від бісектриси кута?
12. Сформулюй теорему про суму кутів трикутника.
13. Доведи теорему про суму кутів трикутника.
14. Що називають зовнішнім кутом трикутника?
15. Сформулюй теорему про зовнішній кут трикутника.
16. Доведи теорему про зовнішній кут трикутника.
17. Чи правильно, що зовнішній кут трикутника більший за кожний внутрішній кут, не суміжний із ним?
18. Чому дорівнює сума кутів чотирикутника?
19. Які фігури називають рівними?
20. Яким знаком позначають рівність фігур?
21. Сформулюй властивості рівності фігур.
22. Які трикутники називають рівними?
23. Сформулюй ознаку рівності двох кіл.
24. Сформулюй першу ознаку рівності трикутників.
25. Сформулюй другу ознаку рівності трикутників.
26. Сформулюй і доведи ознаку рівності рівносторонніх трикутників.
27. Доведи ознаку рівності трикутників за двома сторонами й кутом між ними.
28. Доведи ознаку рівності трикутників за стороною і прилеглими до неї кутами.

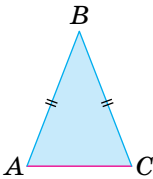
§ 14 РІВНОБЕДРЕНИЙ ТРИКУТНИК

КЛЮЧОВІ СЛОВА

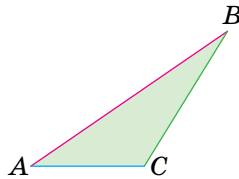
- різносторонній трикутник — scalene triangle
- рівнобедрений трикутник — isosceles triangle
- рівносторонній трикутник — equilateral triangle

Трикутник називають *рівнобедреним*, якщо в нього дві сторони рівні. Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають *бічними сторонами*, а третю його сторону — *основою*.

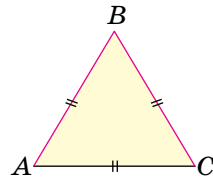
Трикутник, у якого всі сторони різні, називають *різностороннім*. Трикутник, у якого всі сторони рівні, називають *рівностороннім*. Рівносторонній трикутник є окремим видом рівнобедреного трикутника (мал. 14.1).



Рівнобедрений трикутник



Різносторонній трикутник



Рівносторонній трикутник

Мал. 14.1

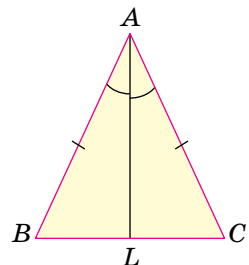
Властивості рівнобедреного трикутника, наведені в теоремах 12–13.

Теорема 12. У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.

Доведення. Нехай ABC — рівнобедрений трикутник з основою BC (мал. 14.2).

Проведемо бісектрису AL , яка розіб'є його на трикутники ABL і ACL .

Оскільки $AB = AC$, AL — спільна сторона, $\angle BAL = \angle CAL$, то за двома сторонами й кутом між ними $\triangle ABL = \triangle ACL$. Із рівності цих трикутників випливає, що $\angle B = \angle C$, тобто кути при основі трикутника ABC — рівні.



Мал. 14.2

Теорема 13. У рівнобедреному трикутнику бісектриса, проведена до основи, є медіаною і висотою.

трикутники ABL і ACL . Оскільки $AB = AC$, AL — спільна сторона, $\angle BAL = \angle CAL$, то за двома сторонами й кутом між ними $\triangle ABL = \triangle ACL$. Із рівності цих трикутників випливає, що:

- 1) $BL = CL$, тобто AL — медіана трикутника ABC ;
- 2) $\angle ALB = \angle ALC = 90^\circ$, тобто AL — висота трикутника ABC .

Щоб з усіх трикутників можна було відшукати рівнобедрені, використовують ознаки **рівнобедреного трикутника**, наведені в теоремах 14–17.

Теорема 14. Якщо в трикутнику два кути рівні, то він — рівнобедрений.

кутників на два: $\triangle ABL$ і $\triangle ACL$. У них $\angle B = \angle C$ і $\angle BAL = \angle CAL$, тому $\angle ALB = \angle ALC$. За стороною AL і прилеглими до неї кутами $\triangle BAL = \triangle CAL$. Отже, $AB = AC$.

Із теорем 12 і 14 випливає такий наслідок.

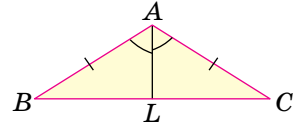
Наслідок. У трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути, а проти рівних кутів — рівні сторони.

Теорема 15. Якщо медіана трикутника є його висотою, то цей трикутник — рівнобедрений.

Якщо AL — медіана, то $BL = CL$. Якщо AL — висота, то $\angle ALB = \angle ALC = 90^\circ$, AL — спільна сторона цих трикутників. Тоді $\triangle ABL = \triangle ACL$ за двома сторонами й кутом між ними.

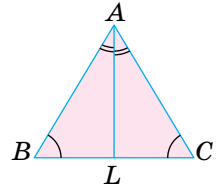
Із рівності цих трикутників випливає, що $AB = AC$. Отже, $\triangle ABC$ — рівнобедрений.

Доведення. Нехай ABC — рівнобедрений трикутник з основою BC (мал. 14.3). Проведемо бісектрису AL , яка розіб'є його на



Мал. 14.3

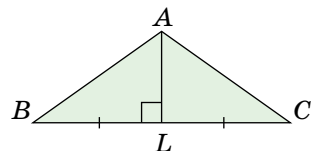
Доведення. Нехай у трикутнику ABC $\angle B = \angle C$ (мал. 14.4). Доведемо, що $AB = AC$. Проведемо бісектрису AL . Вона розбиває даний три-



Мал. 14.4

Доведення. Нехай у $\triangle ABC$ відрізок AL — медіана й висота (мал. 14.5). Доведемо, що цей трикутник — рівнобедрений.

Розглянемо $\triangle ABL$ і $\triangle ACL$.



Мал. 14.5

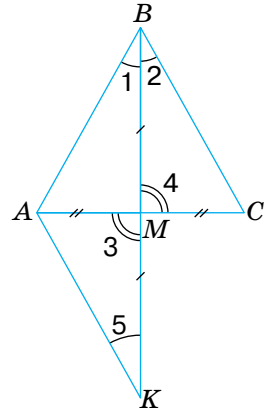
Теорема 16. Якщо бісектриса трикутника є його висотою, то цей трикутник — рівнобедрений.

Доведи цю теорему самостійно.

Теорема 17. Якщо медіана трикутника є його бісектрисою, то цей трикутник — рівнобедрений.

Доведення. Нехай BM — медіана й бісектриса трикутника ABC (мал. 14.6), тобто $AM = MC$ і $\angle 1 = \angle 2$. Доведемо, що $\triangle ABC$ — рівнобедрений.

На промені BM відкладемо відрізок MK , який дорівнює відрізку BM . Розглянемо трикутники AMK і CMB . Ці трикутники рівні за двома сторонами й кутом між ними, бо $AM = CM$ за умовою, $MK = MB$ за побудовою, $\angle 3 = \angle 4$ як вертикальні. Із рівності цих трикутників випливає, що $AK = CB$ і $\angle 5 = \angle 2$. А оскільки $\angle 2 = \angle 1$, то $\angle 5 = \angle 1$. Отже, $\triangle KAB$ — рівнобедрений, тобто $AK = AB$. Але за доведеним $AK = CB$. Тоді $AB = CB$. Отже, $\triangle ABC$ — рівнобедрений.



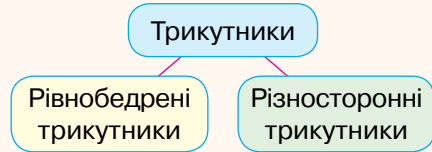
Мал. 14.6

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Як співвідносяться між собою *трикутники* й *рівнобедрені трикутники*? Рівнобедрені трикутники становлять тільки частину всіх трикутників. Говорять, що поняття *трикутники* ширше ніж поняття *рівнобедрені трикутники*. Такі співвідношення прийнято зображати наочно діаграмами Ейлера (мал. 14.7).



Мал. 14.7



Мал. 14.8

Трикутники, які не є рівнобедреними, називають *різносторонніми* трикутниками. Отже, загальне поняття *трикутники* можна розбити на два класи: рівнобедрені трикутники й різносторонні трикутники (мал. 14.8). Різносторонні трикутники — окремий вид рівнобедрених трикутників.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Який трикутник називають рівнобедреним?
2. Як називають сторони рівнобедреного трикутника?
3. Сформулюй і доведи властивості рівнобедреного трикутника.
4. Сформулюй і доведи ознаки рівнобедреного трикутника.
5. Який трикутник називають рівностороннім?
6. Як співвідносяться поняття *трикутники* і *рівнобедрені трикутники*?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

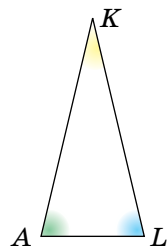
1. Дві сторони рівнобедреного трикутника мають довжини 2 см і 6 см. Знайди довжину третьої його сторони.
 - Основа даного трикутника не може дорівнювати 6 см, бо $2\text{ см} + 2\text{ см} < 6\text{ см}$. Отже, йдеться про трикутник з основою 2 см і бічними сторонами по 6 см.
2. Покажи на діаграмі співвідношення між поняттями: трикутники, рівнобедрені трикутники й рівносторонні трикутники.
 - Рівносторонній трикутник є водночас і рівнобедреним трикутником. Отже, співвідношення між названими видами трикутників можна зобразити, як на малюнку 14.9.



Мал. 14.9


ВИКОНАЄМО УСНО

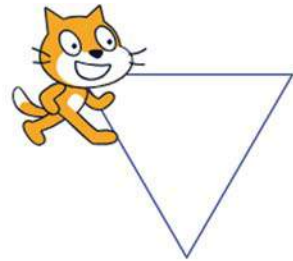
517. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 120° . Знайди кут при основі.
А 60° Б 50° В 30° Г 25°
518. Гра. Один із учнів / одна з учениць задає кут при вершині рівнобедреного трикутника, а інший / інша — визначає його кути при основі. Потім поміняйтеся ролями.
519. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 70° . Знайди кут при вершині (мал. 14.10).



Мал. 14.10




520. Доведи, що кут при основі рівнобедреного трикутника не може бути прямим.
521. Знайди периметр рівнобедреного трикутника, якщо його основа дорівнює 10 см, а бічна сторона — 20 см.
А 30 см Б 40 см В 50 см Г 60 см
522.  Сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 5 см і 10 см. Яка з них — основа?
523. Поясни, яка градусна міра кута має стояти в частині коду, щоб кіт намалював рівносторонній трикутник у середовищі Scratch (мал. 14.11)?



Мал. 14.11

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



524. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 15 см, а бічна сторона — 26 см. Знайди периметр трикутника.
525. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см, а бічна сторона — 5 см. Знайди основу трикутника.
526. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 26 см, а основа — 10 см. Знайди бічну сторону трикутника.
527.  Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 35 см. Знайдіть його сторони, якщо:
- а) основа на 8 см більша за бічну сторону;
 - б) бічна сторона у три рази більша за основу;
 - в) сторони пропорційні числам 1, 2 і 2.
528. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 50 см. Знайди його сторони, якщо:
- а) основа на 4 см менша за бічну сторону;
 - б) бічна сторона у два рази більша за основу;
 - в) сторони пропорційні числам 3, 3 і 4.

529. За допомогою завдання <https://www.geogebra.org/m/cw5aFZP9> в GeoGebra (автори Віннічук А., Бучок О.), переміщуючи вершину рівнобедреного трикутника, переконайся у властивостях рівнобедреного трикутника.

530. Знайди кути рівнобедреного трикутника, якщо:

- а) кут при вершині трикутника дорівнює 80° ;
- б) кут при основі трикутника дорівнює 30° .

531. Знайди кути рівнобедреного трикутника, якщо:

- а) кут при основі трикутника дорівнює 50° ;
- б) кут при вершині трикутника дорівнює 100° .

532. Знайди кути рівнобедреного трикутника, якщо:

- а) кут при основі на 30° більший за кут при вершині;
- б) кут при вершині вдвічі менший за кут при основі.

533. Знайди кути рівнобедреного трикутника, якщо:

- а) кут при основі на 15° менший за кут при вершині;
- б) кут при вершині вдвічі більший за кут при основі.

534. Доведи, що якщо який-небудь кут рівнобедреного трикутника дорівнює 60° , то цей трикутник рівносторонній.

535. Знайди кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при його вершині дорівнює куту при основі.

536. Доведи, що в рівносторонньому трикутнику всі кути — рівні.

537. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 80° .



Знайдіть кут між:

- а) основою і бісектрисою, проведеною до бічної сторони;
- б) бічною стороною і бісектрисою, проведеною до неї.

538. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 50° .

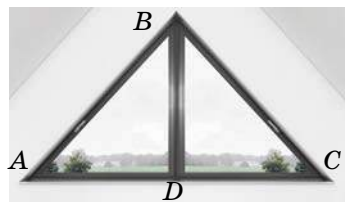
Знайди кут між основою й висотою, проведеною до бічної сторони.

539. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 30° . Знайди кут між висотами, проведеними до бічних сторін.

540. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 80° .

Знайди кут між бісектрисами, проведеними до бічних сторін.

541. У трикутнику ABC медіана BD є його висотою (мал. 14.12). Знайди довжину BD , якщо периметри трикутників ABD і ABC дорівнюють відповідно 4 м і 5 м.



Мал. 14.12

542. У трикутнику MKP медіана KO є його бісектрисою. Знайди довжину KO , якщо периметри трикутників MKP і MKO дорівнюють відповідно 32 см і 24 см.
543. Знайди кути трикутника ABC , якщо висота BH ділить сторону AC навпіл і $\angle A = 40^\circ$.
544. Знайди сторони $\triangle ABC$, периметр якого дорівнює 40 см, якщо бісектриса BM перпендикулярна до сторони AC і $AM = 8$ см.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ Б

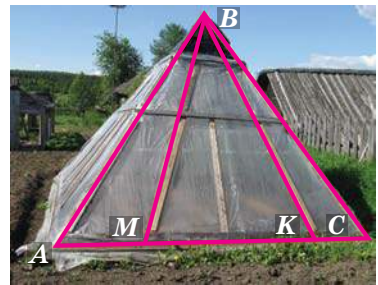


545. Розглянь будову теплиці. $\triangle ABC$ — рівнобедрений (мал. 14.13), $AM = KC$. Доведи, що $\triangle MBK$ — рівнобедрений.

546. $\triangle MBK$ — рівнобедрений (мал. 14.13), $AM = KC$. Доведи, що $\triangle ABC$ — рівнобедрений.

547. O — точка перетину бісектрис AL і CP рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$). Доведи, $AL = CP$ і $AO = OC$.

548. M — точка перетину медіан AF і CK рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$). Доведи, що $AF = CK$ і $AM = MC$.



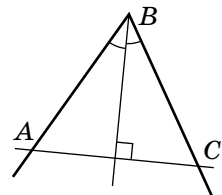
Мал. 14.13

549. У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, $\angle B = 36^\circ$, AK — бісектриса. Доведи, що $BK = KA = AC$.

550. Доведіть, що в кожному рівнобедреному трикутнику бісектриси, проведені до бічних сторін, — рівні.

551. Доведи, що в кожному рівнобедреному трикутнику медіани, проведені до бічних сторін, — рівні.

552. Пряма, перпендикулярна до бісектриси кута B , перетинає його сторони в точках A і C (мал. 14.14). Визнач вид трикутника ABC та знайди його кути, якщо:
а) $\angle B = 80^\circ$; б) $\angle B = 60^\circ$.



Мал. 14.14

553. На стороні BC трикутника ABC взято точку M так, що $\angle BAM = 60^\circ$, $\angle AMC = 120^\circ$. Знайди периметр трикутника ABM , якщо $AM = a$. Доведи, що $AM \perp BL$, де BL — бісектриса трикутника ABC .

554. Знайди сторони рівнобедреного трикутника, якщо одна з них менша від периметра на 30 см, а друга — на 40 см.

555. Доведи, що сума двох нерівних кутів рівнобедреного трикутника більше 90° .

556. Знайди кути рівнобедреного трикутника, якщо:

- сума двох із них дорівнює 60° ;
- один з його зовнішніх кутів дорівнює 115° .

557. Find the measures of the angles of the isosceles triangle if:

- the sum of the measures of two angles is 60° ;
- the measure of one exterior angle is 115° .

558. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо:



- один із них на 30° більший за інший;
- один із них удвічі більший за інший.

Розгляньте два варіанти.

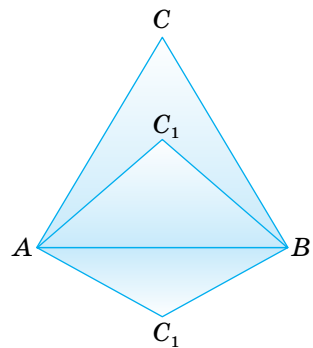
559. Сформулюй і доведи ознаки рівності рівнобедрених трикутників:

- за основою і прилеглим кутом;
- за основою і протилежним кутом;
- за бічною стороною й кутом при основі.

560. Доведи, що в рівносторонньому трикутнику:

- всі медіани рівні;
- всі висоти рівні;
- всі бісектриси рівні.

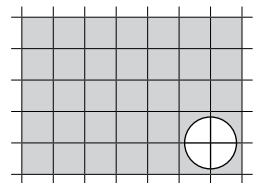
561. Як розташовані вершини всіх рівнобедрених трикутників, що мають спільну основу (мал. 14.15)?



Мал. 14.15

562. Приклавши один до одного два рівнобедрені трикутники, кожен з яких має кут 100° , утворили чотирикутник. Визнач кути чотирикутника.

563. Перемалюй у зошит фігуру, що на малюнку 14.16, і проведи пряму так, щоб вона розрізала зафарбовану фігуру на дві частини з рівними площами.



Мал. 14.16

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

564. Покажи, що рівносторонній трикутник можна розрізати на 4 рівні рівносторонні трикутники.
565. Як можна розрізати рівносторонній трикутник на три рівні рівнобедрені трикутники?
566. Виріж із паперу гострокутний, прямокутний і тупокутний рівнобедрені трикутники. Перегинаючи їх по бісектрисі кута при вершині, повтори доведення теорем 12 та 13.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

567. Знайди міру кута, якщо його бісектриса зі стороною утворює кут 48° .
568. Знайди міри двох суміжних кутів, якщо вони відносяться як: а) $1 : 2$; б) $2 : 3$.
569. Знайди периметр прямокутника, якщо одна з його сторін дорівнює 5 см, а площа — 20 см^2 .



§ 15 ТРЕТЯ ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

Тобі вже відомі дві ознаки рівності трикутників. Знаючи властивості рівнобедреного трикутника, можна довести ще одну ознаку.

КЛЮЧОВІ СЛОВА

третя ознака рівності трикутників — SSS triangle congruence

Теорема 18 (третя ознака рівності трикутників).
Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники — рівні.

Доведення. Нехай у трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ відомо, що $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ і $BC = B_1C_1$ (мал. 15.1, а, с. 136). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Прикладемо трикутник $A_1B_1C_1$ до трикутника ABC так, щоб вершина A_1 сумістилася з вершиною A , B_1 — з B , а C_1 і C виявилися по різні боки від прямої AB . Тоді $\Delta A_1B_1C_1$ займе положення трикутника ABC_2 (мал. 15.1, б). Провівши відрізок CC_2 , одержимо рівнобедрені трикутники CAC_2 і CBC_2 , бо $AC = AC_2$ і $BC = BC_2$. У цих трикутниках кути при основах рівні: $\angle ACC_2 = \angle AC_2C$, $\angle BCC_2 = \angle BC_2C$. Отже, рівні також кути ACB і AC_2B . Тому за двома сторонами й кутом між ними $\Delta ABC = \Delta ABC_2$. За побудовою $\Delta ABC_2 = \Delta A_1B_1C_1$. Таким чином, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, що й треба було довести.

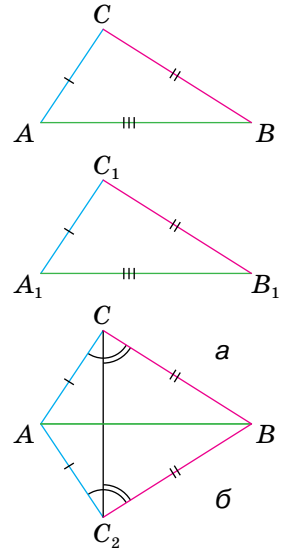
Зверни увагу! Ми розглянули випадок, коли відрізки AB і CC_2 перетинаються. Для випадків, коли ці відрізки не перетинаються, доведення теореми треба дещо змінити. Розглянь ці випадки самостійно, скориставшись малюнками 15.2 і 15.3.

Третя ознака рівності трикутників стверджує, що трьома сторонами трикутник визначається однозначно. Уявімо, що кожний семикласник / кожна семикласниця побудував / побудувала в зошиті трикутник, сторони якого дорівнюють, наприклад, 3 см, 4 см і 5 см. Хтось спочатку відкладає найбільший відрізок, а з його кінців проводить дуги радіусів 3 см і 4 см (мал. 15.4). Хтось спочатку відкладає найменший із даних відрізків тощо. Хоч будували вони різними способами, у результаті одержали рівні трикутники.

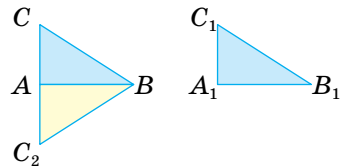
Трикутник однозначно визначається (задається):

- 1) двома сторонами й кутом між ними;
- 2) стороною і двома прилеглими кутами;
- 3) трьома сторонами.

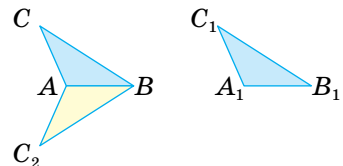
Зверни увагу! У пункті 2 йдеться про кути, сума яких менша від 180° , а в пункті 3 — про три відрізки, кожний із яких менший від суми двох інших.



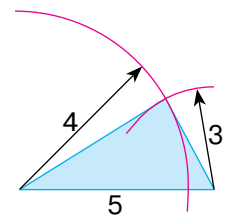
Мал. 15.1



Мал. 15.2



Мал. 15.3



Мал. 15.4

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

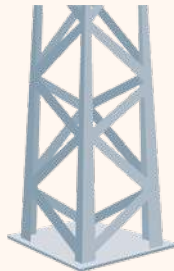
Третя ознака рівності трикутників засвідчує, що трикутник — фігура жорстка. Щоб краще зрозуміти, про що йдеться, уяви збиті цвяхами з окремих планок трикутник і чотирикутник (мал. 15.5). Такий чотирикутник неважко деформувати: змінити кути, не змінюючи довжин сторін.

Трикутник так деформувати не можна. Три сторони трикутника однозначно визначають його кути! Так само, знаючи дві сторони трикутника й кут між ними, можна однозначно визначити третю сторону і два інші кути; знаючи сторону і два прилегли кути, можна визначити дві інші його сторони тощо. Як це робити, дізнаєшся в старших класах.

Знаючи, що з усіх багатокутників тільки трикутник — фігура жорстка, ажурні конструкції виготовляють так, щоб вони мали якомога більше трикутників (мал. 15.6).



Мал. 15.5



Мал. 15.6

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

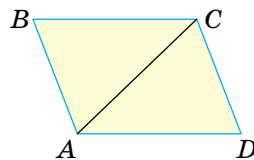
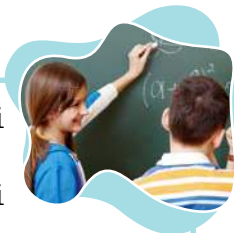
1. Сформулюй три ознаки рівності трикутників.
2. Якими елементами визначається трикутник?
3. Як слід розуміти, що трикутник — фігура жорстка?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Доведи, що якщо в чотирикутнику протилежні сторони рівні, то і протилежні кути — рівні.

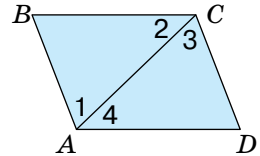
- Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $AB = CD$ і $BC = AD$ (мал. 15.7). Проведемо відрізок AC .

У результаті утворюються два трикутники: ABC і CDA . Вони рівні за трьома сторонами, бо $AB = CD$ і $BC = AD$, а сторона AC у них спільна. Отже, $\triangle ABC = \triangle CDA$. А в рівних трикутниках проти рівних сторін лежать рівні кути. Тому $\angle B = \angle D$.



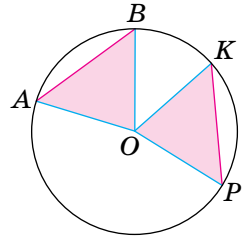
Мал. 15.7

Рівність кутів BAD і BCD можна довести двома способами: або показати, що кожний із них складається з двох рівних кутів: $\angle 1 = \angle 3$ і $\angle 2 = \angle 4$ (мал. 15.8), або — провівши відрізок BD .



Мал. 15.8

2. На колі із центром O позначено точки A , B , K і P такі, що $AB = KP$ (мал. 15.9). Доведи, що $\triangle AOB = \triangle KOP$.



Мал. 15.9

- Провівши в дані точки радіуси, одержимо трикутники AOB і KOP . Вони рівні за трьома сторонами, бо $AB = KP$ за умовою і $OA = OB = OK = OP$ (як радіуси). Отже, $\triangle AOB = \triangle KOP$.

ВИКОНАЄМО УСНО

570. Як ти розумієш вислів «трикутник визначається трьома його сторонами»?

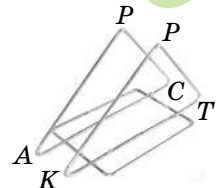


571. $\triangle ABC = \triangle KPT$. (мал. 15.10). Знайди периметр трикутника KPT , якщо:

а) кожна сторона трикутника ABC дорівнює 5 см;

б) $AB = BC = 3$ дм, $AC = 4$ дм.

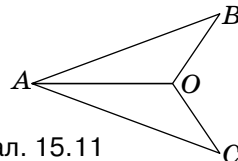
572. Два рівні рівносторонні трикутники ABC і KPT можна сумістити тільки одним способом. Два рівні рівнобедрені трикутники — двома способами, суміщаючи сторону AB із KP або із TP . Скількома способами можна сумістити два рівні рівносторонні трикутники? Перевір це на практиці.



Мал. 15.10

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

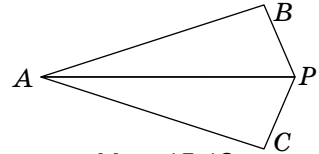
573. Доведи рівність трикутників AOB і AOC (мал. 15.11), якщо $AB = AC$ і $BO = OC$. Чи буде AO бісектрисою кута BAC ? Відповідь обґрунтуй.



Мал. 15.11



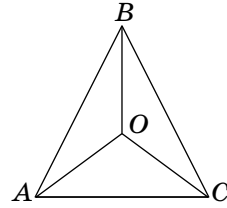
574. Доведи рівність трикутників ABP і ACP (мал. 15.12), якщо $AB = AC$ і $BP = PC$. Чи буде PA бісектрисою кута BPC ? Відповідь обґрунтуй.



Мал. 15.12

575. Точка O рівновіддалена від вершин A , B і C рівностороннього трикутника (мал. 15.13).

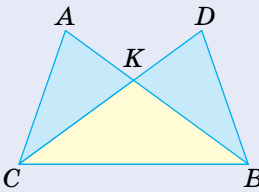
Доведи, що $\angle AOB = \angle BOC = \angle AOC$.



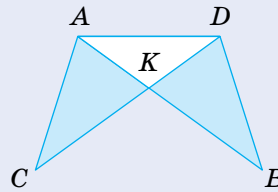
Мал. 15.13

576. Точка O рівновіддалена від вершин A , B і C рівностороннього трикутника. Доведи, що $\angle OAB = \angle OBC = \angle OCA$.

577. На малюнку 15.14 $AB = DC$ і $AC = DB$. Доведи, що:
а) $\triangle ABC = \triangle DCB$; б) $\angle A = \angle D$; в) $BK = CK$; г) $\angle ACK = \angle DBK$.



Мал. 15.14



Мал. 15.15

578. In the figure 15.15 $AB = DC$ and $AC = DB$. Prove that: а) $\triangle ADC = \triangle DAB$; б) $\angle C = \angle B$; в) $AK = DK$.

579. Якщо відрізки OA і OB рівні, а точка X рівновіддалена від точок A і B , то точка X лежить на прямій, яка ділить $\angle AOB$ навпіл. Доведи.

580. Якщо відрізки OA і OB рівні, а точка X рівновіддалена від точок A і B , то кути OAX і OBX рівні. Доведи.

581. Якщо M — довільна точка висоти BH трикутника ABC (мал. 15.16), у якому $AB = BC$, то:
а) $MA = MC$; б) $\triangle ABM = \triangle CBM$; в) $\triangle AMH = \triangle CMH$. Доведіть.



Мал. 15.16

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



582. На колі із центром O позначено точки A , B і C так, що $AB = BC = CA$. Доведи, що:

- $\triangle OAB = \triangle OBC = \triangle OCA$;
- $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120^\circ$;
- $\angle OAB = \angle OBC = \angle OCA = 30^\circ$.

583. На колі із центром O позначено точки A , B , C так, що $AB = BC = CA$, а AM — діаметр. Доведи, що:

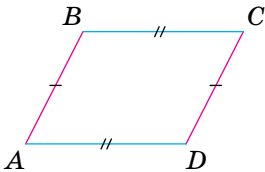
- $BM = CM$;
- $\angle OBM = \angle OCM$.

584. Доведи, що якщо основа і бічна сторона одного рівнобедреного трикутника дорівнюють відповідно основі й бічній стороні іншого рівнобедреного трикутника, то такі трикутники рівні.

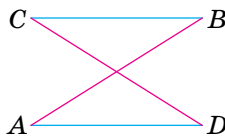
585. Доведи, що якщо сторона одного рівностороннього трикутника дорівнює стороні іншого рівностороннього трикутника, то такі трикутники рівні.

586. Доведіть рівність двох трикутників за двома даними сторонами й медіаною, проведеною до однієї з них.

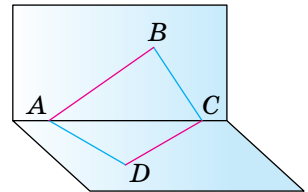
587. Замкнена ламана $ABCD$ така, що $AB = CD$ і $AD = BC$ (мал. 15.17). Доведи, що $\angle A = \angle C$ і $\angle B = \angle D$.



Мал. 15.17



Мал. 15.18



Мал. 15.19

588. Замкнена ламана $ABCD$ така, що $AB = CD$ і $AD = BC$ (мал. 15.18). Доведи, що $\angle A = \angle C$ і $\angle B = \angle D$.

589. Спробуй узагальнити задачу 587 на випадок, коли дана ламана не лежить в одній площині (мал. 15.19).

590. Рівнобедрені трикутники APC і ABC мають спільну основу AC (точки P і B лежать по різні сторони від AC). Пряма PB перетинає AC в точці O . Доведи, що:

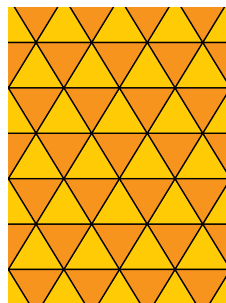
- $\angle PAB = \angle PCB$;
- $AO = OC$;
- $AC \perp BP$.

591. Рівнобедрені трикутники APC і ABC мають спільну основу AC (точки P і B лежать по одну сторону від AC). Пряма PB перетинає AC в точці O . Доведи, що:

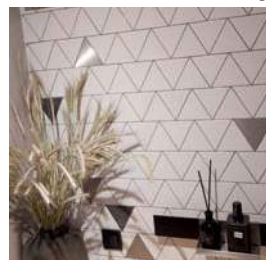
- $\angle PAB = \angle PCB$;
- $AO = OC$;
- $AC \perp BP$.

592. Чи з будь-яких чотирьох рівних трикутників можна скласти один трикутник? Покажи на малюнку за допомогою ресурсу Mathlearningcentre.

593. Рівносторонніми трикутниками, мов паркетинами, можна замостити всю площину (мал. 15.20, *а*, *б*). Чи можна замостити площину рівними нерівносторонніми трикутниками? Якщо можна, покажи на малюнку.



а



б

Мал. 15.20

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

594. Спробуй скласти 4 рівні трикутники за допомогою восьми цілих сірників. Чи можна скласти 4 рівні трикутники за допомогою шести цілих сірників?

595. Прикладаючи два рівні трикутники з кутами 30° і 70° рівними сторонами, можна утворити кілька різних чотирикутників. Які саме? Визнач кути утворених чотирикутників.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

596. Знайди кути трикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3 і 4.

597. Середнє арифметичне сторін трикутника дорівнює 20 см. Знайди його периметр.

598. Знайди середнє арифметичне кутів трикутника.



§ 16 НЕРІВНОСТІ ТРИКУТНИКА

Ви вже знаєте, що кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін. Щоб довести це твердження як теорему, спочатку розглянемо іншу теорему.

КЛЮЧОВІ СЛОВА

нерівність трикутника — triangle inequality

Теорема 19. У кожному трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, а проти більшого кута — більша сторона.

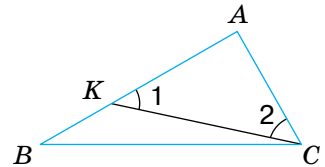
Доведення. 1) Нехай у трикутнику ABC сторона AB більша за AC . Покажемо, що кут C більший за кут B (мал. 16.1). Відкладемо на стороні AB відрізок AK , що дорівнює AC . Оскільки відкладений відрізок коротший від AB , то точка K лежить між точками A і B , а $\angle ACK$ є частиною кута ACB . Кути AKC і ACK рівні, тобто $\angle 1 = \angle 2$, бо $\triangle KAC$ — рівнобедрений. $\angle 1$ більший за $\angle B$, бо є зовнішнім для трикутника BKC . Тоді весь кут C більший за $\angle 2$, а $\angle 2$ більший за $\angle B$. Цим доведено, що якщо в трикутнику $AB > AC$, то $\angle C > \angle B$.

2) Нехай у трикутнику ABC кут C більший за кут B .

Доведемо, що тоді $AB > AC$.

Сторони AB і AC не можуть дорівнювати одна одній, бо інакше даний трикутник був би рівнобедреним і один із його кутів при основі не міг би бути більшим за інший.

Не може сторона AB бути й меншою за сторону AC , бо тоді $\angle C$ був би меншим за $\angle B$. А оскільки сторона AB не дорівнює стороні AC і не менша від AC , то вона більша за AC .

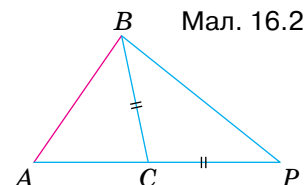


Мал. 16.1

Теорема 20. Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін.

Доведення. Розглянемо довільний $\triangle ABC$ і покажемо, що $AB < BC + CA$ (мал. 16.2).

Для доведення відкладемо на продовженні сторони AC відрізок CP , що дорівнює стороні BC , і розглянемо трикутник ABP . Куты



Мал. 16.2

CBP і CPB — рівні, бо $CB = CP$. Тоді кут ABP — більший за $\angle P$.

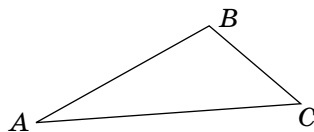
А оскільки проти більшого кута лежить більша сторона, то $AB < AP$. Врахувавши, що $AP = AC + CP = AC + CB$, маємо: $AB < AC + CB$.

Так само можна показати, що $BC < CA + AB$, $AC < CB + BA$.

З доведеної теореми випливає таке твердження.

Якщо точки A, B, C не лежать на одній прямій, то правильні нерівності:

$$\begin{aligned} AB &< AC + CB, \\ BC &< BA + AC, \\ AC &< AB + BC. \end{aligned}$$

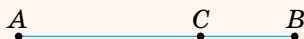


Кожну із цих трьох нерівностей називають *нерівністю трикутника*.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Якщо точки A, B, C лежать на одній прямій, то одна з наведених вище нерівностей перетворюється в рівність, а дві інші залишаються правильними. Наприклад, якщо точка C лежить між точками A і B (мал. 16.3), то правильні такі співвідношення:

$$AB = BC + CA, \quad BC < CA + AB, \quad CA < AB + BC.$$



Мал. 16.3

Враховуючи все сказане вище, можна зробити такий висновок. Хоч би як були розташовані три точки A, B і C , завжди:

$$AB \leq BC + CA,$$

$$BC \leq CA + AB,$$

$$CA \leq AB + BC.$$

Із трьох відстаней між будь-якими трьома точками кожна не перевищує суми двох інших.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюй і доведи теорему про залежність між сторонами й кутами трикутника.
2. Сформулюй і доведи теорему про нерівності трикутника.
3. Сформулюй нерівності трикутника XYZ .

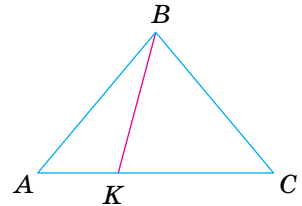


ВИКОНАЄМО РАЗОМ



1. Чи можуть сторони трикутника дорівнювати 5 см, 7 см і 13 см?
- За нерівністю трикутника кожна сторона трикутника має бути меншою за суму двох інших сторін. Оскільки $13 > 5 + 7$, то такий трикутник не існує.
2. Доведи, що відрізок, який сполучає вершину рівнобедреного трикутника з довільною внутрішньою точкою основи, коротший за бічну сторону трикутника.

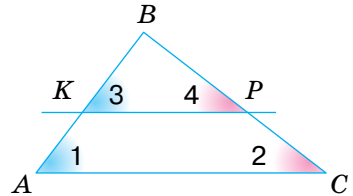
- Нехай AC — основа довільного рівнобедреного трикутника ABC , а K — довільна внутрішня точка його основи (мал. 16.4). Покажемо, що $BK < AB$.



Мал. 16.4

Кут AKB — зовнішній у трикутнику KBC , тому $\angle AKB > \angle C$. Оскільки $\angle C = \angle A$, то $\angle AKB > \angle A$. Отже, у $\triangle ABK$ сторона BK лежить проти кута, який менший від кута, проти якого лежить сторона AB . Тому $BK < AB$.

3. Пряма KP , що перетинає $\triangle ABC$, паралельна стороні AC (мал. 16.5). Яка зі сторін AB чи BC даного трикутника більша, якщо $BK < BP$?



Мал. 16.5

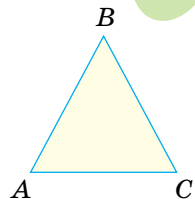
- Пронумеруємо деякі кути, як показано на малюнку 16.5. Відповідні кути при паралельних прямих і січній рівні, тому $\angle 1 = \angle 3$ і $\angle 2 = \angle 4$. Оскільки в трикутнику BKP $BK < BP$, то $\angle 4 < \angle 3$, тоді й $\angle 2 < \angle 1$. Отже, $AB < BC$.

ВИКОНАЄМО УСНО

599. Що означає вислів «точка B лежить між точками A і C »?

600. Користуючись малюнком 16.6, порівняй сторони AB і BC трикутника ABC , якщо:

- а) $\angle A < \angle C$; г) $\angle A \leq \angle C$;
 б) $\angle A > \angle C$; г) $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 70^\circ$;
 в) $\angle A = \angle C$; д) $\angle B = 80^\circ$, $\angle C = 40^\circ$.



Мал. 16.6

601. Чи існує трикутник, сторони якого пропорційні числам:
а) 5, 5, 8; б) 5, 5, 10?
602. Доведи, що коли кожную сторону рівнобедреного трикутника збільшити, наприклад, на 1 м, то утворений трикутник також буде рівнобедреним.
603. Чи можна кожний кут трикутника збільшити, наприклад, на 10° ?

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ А



604. Чи можуть сторони трикутника дорівнювати:
а) 19 см, 9 см і 12 см; б) 4 см, 5 см і 9 см?
605. Can the sides of a triangle be equal:
а) 6 cm, 8 cm and 15 cm; б) 3 cm, 5 cm and 7 cm?
606. **Гра.** Один з учнів/ одна з учениць записує довжини 3 відрізків, а другий/друга має визначити, чи можуть ці відрізки утворити трикутник. Потім поміняйтеся ролями.
607. Склади блок-схему до алгоритму перевірки, чи існує трикутник ABC із заданими довжинами сторін AB , BC і CA .
608. Яка зі сторін трикутника ABC — найбільша, а яка — найменша, якщо:
а) $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$;
б) $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 100^\circ$;
в) $\angle B = 75^\circ$, $\angle C = 90^\circ$?
609. Яка зі сторін трикутника ABC — найбільша, а яка — найменша, якщо:
а) $\angle A = 52^\circ$, $\angle B = 37^\circ$;
б) $\angle A = 48^\circ$, $\angle C = 112^\circ$;
в) $\angle B = 28^\circ$, $\angle C = 64^\circ$.
610. Який кут трикутника ABC — найбільший, а який — найменший, якщо:
а) $AB = 3$ м, $BC = 4$ м, $AC = 5$ м;
б) $AB = 2BC$, а $BC - AC = 13$ см?
611. Який кут трикутника ABC — найбільший, а який — найменший, якщо:
а) $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $AC = 10$ см;
б) $AB - BC = 2$ м, $BC - AC = 1$ м?
612. Чи може основа рівнобедреного трикутника бути вдвічі довшою за бічну сторону? А вдвічі коротшою?
613. Чи може кожний кут трикутника бути меншим від 60° ?

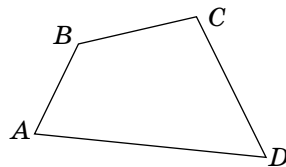
614. Чи існує трикутник, кожний кут якого більший за 60° ?
615. Доведи, що висота трикутника не довша за медіану, проведену з тієї самої вершини.
616. Доведи, що висота трикутника не довша за бісектрису, проведену з тієї самої вершини.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



617. Дві сторони трикутника дорівнюють 12 см і 7 см. Чи може периметр трикутника дорівнювати:
а) 37 см; б) 38 см; в) 39 см?
618. Сума двох сторін трикутника дорівнює 37 см. Чи може периметр трикутника дорівнювати:
а) 73 см; б) 74 см; в) 75 см?
619. Одна сторона трикутника у 2 рази більша за другу й на 5 см менша від третьої. Чи існує такий трикутник, якщо його периметр дорівнює: а) 30 см; б) 40 см?
620. Одна сторона трикутника у 2 рази менша за другу й на 4 см менша від третьої. Чи існує такий трикутник, якщо його периметр дорівнює: а) 12 см; б) 20 см?
621. У трикутнику ABC сторони AB і AC дорівнюють відповідно 5 см і 8 см. Якому цілому числу сантиметрів може дорівнювати BC ?
622. Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 4 см. Якому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона трикутника?
623. Сума двох рівних сторін трикутника становить 0,6 периметра. Чи правильно, що кут між рівними сторонами більший за 60° ? Відповідь обґрунтуй.
624. Чи може одна сторона трикутника дорівнювати половині його периметра?
625. Доведи, що кожна сторона трикутника менша від його півпериметра.
626. Чи може сума двох сторін трикутника дорівнювати його півпериметру?
627. Доведіть, що кожна сторона трикутника довша за піврізницю інших його сторін.
628. Чи існує трикутник, одна сторона якого дорівнює різниці двох інших?

629. Доведи, що кожна сторона чотирикутника коротша від суми трьох інших його сторін (мал. 16.7).



Мал. 16.7

630. Периметр квадрата дорівнює 4 дм. Чи можна з нього вирізати трикутник, периметр якого дорівнює 3 дм?

631. Чи існує трикутник, периметр якого в 1000 разів більший за одну з його сторін? А за одну з висот?

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

632. Візьми спагетти (мал. 16.8). Розламай її на дві частини, одна з яких менша за іншу. Меншу частину розламай ще на дві частини. Чи можна з цих трьох частин утворити трикутник? Яке одне слово в умові треба змінити, щоб можна було утворити трикутник?



Мал. 16.8

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

633. Сума двох кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 200° . Знайди міри двох інших кутів.
634. На сторонах PK і MK трикутника MPK взято точки A і B так, що $AB \parallel MP$. Доведи, що кути трикутника AKB дорівнюють відповідно кутам трикутника MPK .
635. Доведи, що пряма, паралельна будь-якій стороні рівнобедреного трикутника, відтинає від нього рівнобедрений трикутник.

§ 17

ПРЯМОКУТНИЙ
ТРИКУТНИК

КЛЮЧОВІ СЛОВА

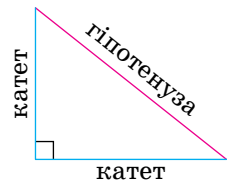
прямокутний трикутник — right triangle

ознаки рівності прямокутних трикутників — right triangle congruence theorem

Трикутник називають *прямокутним*, якщо один із його кутів — прямий.

Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90° , бо $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Сторона прямокутного трикутника, що лежить проти прямого кута, — це *гіпотенуза*, дві інші його сторони — *катети* (мал. 17.1). На малюнку прямий кут іноді позначають квадратиком. У кожному прямокутному трикутнику гіпотенуза більша від кожного катета.



Мал. 17.1

З першої та другої ознак рівності трикутників безпосередньо впливають такі ознаки.

Два прямокутні трикутники рівні, якщо:

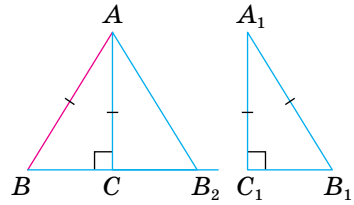
- 1) катети одного з них дорівнюють відповідно катетам іншого;
- 2) катет і прилеглий гострий кут одного трикутника дорівнюють відповідно катету і прилеглому гострому куту іншого;
- 3) гіпотенуза і гострий кут одного трикутника дорівнюють відповідно гіпотенузі й гострому куту іншого;
- 4) катет і протилежний йому гострий кут одного трикутника дорівнюють відповідно катету та протилежному гострому куту іншого.

Ще одна ознака рівності прямокутних трикутників потребує доведення.

Теорема 21. Якщо катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету й гіпотенузі іншого, то такі трикутники — рівні.

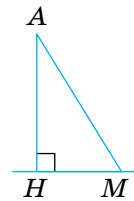
Доведення. Нехай у трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ кути C і C_1 — прямі й $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ (мал. 17.2). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Прикладемо $\Delta A_1B_1C_1$ до трикутника ABC так, щоб вершина A_1 сумістилась із вершиною A , C_1 — із C , а $\Delta A_1B_1C_1$ зайняв положення трикутника AB_2C . Оскільки кути C і C_1 прямі, то точки B, C і B_2 розмістяться на одній прямій. ΔABB_2 — рівнобедрений, $\angle B = \angle B_2 = \angle B_1$. Тоді $\angle BAC = \angle B_2AC = \angle A_1$. Отже, у даних трикутниках між відповідно рівними сторонами $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ лежать рівні кути A і A_1 . За першою ознакою рівності трикутників, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.



Мал. 17.2

Уведемо ще кілька важливих понять, пов'язаних із прямокутним трикутником. Якщо AHM — прямокутний трикутник із прямим кутом H , то його катет AH — *перпендикуляр*, проведений із точки A на пряму HM (мал. 17.3).

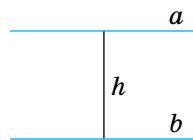


Мал. 17.3

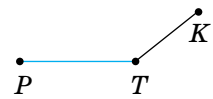
Гіпотенузу AM називають також *похилою*, проведеною з точки A до прямої HM , а катет HM — *проекцією* цієї похилої на пряму HM .

Довжину перпендикуляра AH називають також *відстанню від точки A до прямої HM* .

Загалом, відстань між двома геометричними фігурами — це відстань між їх найближчими точками (якщо такі точки існують). Наприклад, відстань між двома паралельними прямими дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки однієї прямої на іншу (мал. 17.4). А відстань від точки K до відрізка PT , зображених на малюнку 17.5, дорівнює довжині відрізка KT .



Мал. 17.4



Мал. 17.5

Теорема 22.
У прямокутному трикутнику гіпотенуза більша за катет.

Доведення. У кожному трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона (теорема 19). Оскільки гіпотенуза лежить проти прямого кута, а катет — проти гострого, і прямий кут більший за гострий, то гіпотенуза — більша за катет.

Наслідок. Якщо з однієї точки, яка не лежить на прямій, до цієї прямої проведено перпендикуляр і похило, то:

- 1) перпендикуляр менший від похилої;
- 2) проекція похилої менша від похилої.

Отже, маємо такі **властивості прямокутних трикутників**:

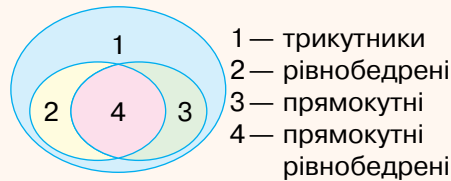
1. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90° .
 2. У прямокутному трикутнику гіпотенуза більша за катет.
 3. Катет прямокутного трикутника, який лежить проти кута 30° , дорівнює половині гіпотенузи.
 4. Якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то кут, який лежить проти цього катета, дорівнює 30° .
- Доведення третьої властивості наведено в рубриці «Виконаємо разом», а четверту властивість доведи самостійно (№663).

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Прямокутні трикутники становлять тільки частину всіх трикутників. Якщо трикутник не має прямого кута, його називають *непрямокутним* трикутником. Отже, залежно від того, має трикутник прямий кут чи не має, усі трикутники можна поділити на два класи. Схематично цей поділ можна зобразити малюнком 17.6.



Мал. 17.6



Мал. 17.7

Якщо катети прямокутного трикутника рівні, то він водночас є і рівнобедреним трикутником. Співвідношення між такими видами трикутників можна зобразити, як показано на малюнку 17.7.

Прямокутні трикутники в геометрії відіграють важливу роль, бо будь-який трикутник можна розрізати на два прямокутні трикутники, а для кожного прямокутного трикутника справджується славнозвісна теорема Піфагора: **квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів**. Докладніше про теорему Піфагора й застосування властивостей прямокутних трикутників ти дізнаєшся у 8 класі.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюй означення прямокутного трикутника.
2. Як називають сторони прямокутного трикутника?
3. Сформулюй ознаки рівності прямокутних трикутників.
4. Що називають перпендикуляром, похилою і проєкцією похилої?
5. Що називають відстанню від точки до прямої?
6. Що називають відстанню між фігурами?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ



Катет прямокутного трикутника, який лежить проти кута 30° , дорівнює половині гіпотенузи. Доведи.

- Нехай у $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$ і $\angle A = 30^\circ$ (мал. 17.8).

Доведемо, що $BC = 0,5AB$.

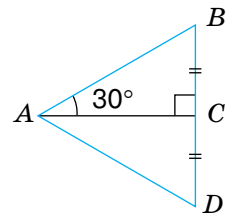
На прямій BC відкладемо відрізок CD , що дорівнює стороні CB , і проведемо відрізок AD . За двома катетами $\triangle BCA = \triangle DCA$, тоді $AB = AD$ і $\angle DAC = 30^\circ$.

Оскільки $\angle BAD = 60^\circ$,

то $\angle B = \angle D = (180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ$.

Отже, усі кути трикутника ABD дорівнюють 60° кожний. Таку властивість має тільки рівносторонній трикутник.

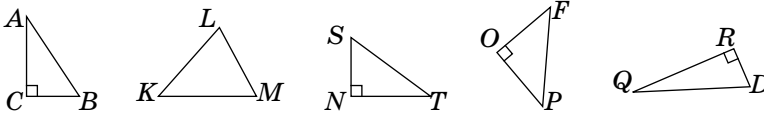
Оскільки $BD = AB$ і $BC = CD$, то $BC = 0,5AB$.



Мал. 17.8

ВИКОНАЄМО УСНО

636. Які з трикутників, зображених на малюнку 17.9, прямокутні?



Мал. 17.9

Для кожного прямокутного трикутника назви катети та гіпотенузу.

637. Сторони прямокутного трикутника дорівнюють 3 м, 4 м і 5 м. Яка з них — гіпотенуза?
638. Знайди кути прямокутного трикутника, якщо один із них дорівнює: а) 30° ; б) 45° ; в) 70° .
639. **Гра.** Один з учнів / одна з учениць називає гострий кут прямокутного трикутника, інший / інша — другий гострий кут. Потім поміняйтеся ролями.

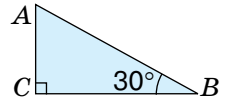
640. У конструкціях підпірок для полиць часто використовують рівнобедрені прямокутні трикутники. Знайди кути такого трикутника (мал. 17.10).



Мал. 17.10

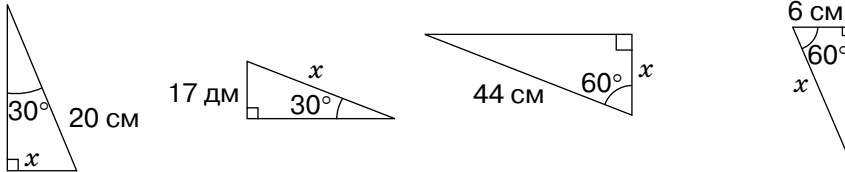
641. Користуючись малюнком 17.11, знайди довжину:

- а) катета AC , якщо $AB = 12$ см;
 б) гіпотенузи, якщо $AC = 5$ см.



Мал. 17.11

642. Знайди x для кожного з трикутників на малюнку 17.12.



Мал. 17.12

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



643. Знайди гострі кути прямокутного трикутника, якщо один із них більший за інший: а) удвічі; б) у 9 разів; в) на 30° .

644. Один із гострих кутів прямокутного трикутника: а) на 10° більший за інший; б) у 5 разів більший за інший. Знайди ці кути.

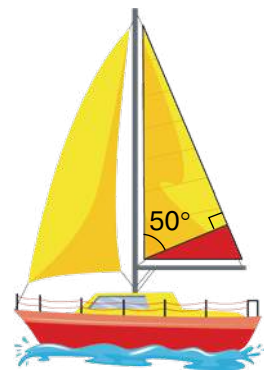
645. Кути трикутника пропорційні числам 3, 5 і 8. Доведи, що цей трикутник прямокутний.

646. Один із кутів трикутника на 30° більший за другий і на 30° менший від третього. Доведи, що цей трикутник прямокутний.

647. Знайди кути прямокутного трикутника, якщо його висота, проведена з вершини прямого кута, утворює з більшим катетом кут 50° (мал. 17.13).



648. Знайди кути прямокутного трикутника, якщо його висота, проведена з вершини прямого кута, утворює з меншим катетом кут 35° .

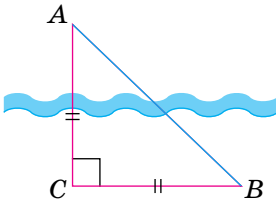
649. З точки D , яка лежить на бісектрисі кута B , на сторони кута проведено перпендикуляри DA і DC . Доведіть, що $DA = DC$.



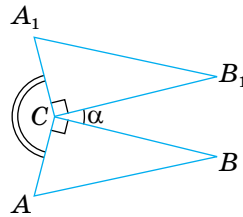
Мал. 17.13

650. З точки B , яка лежить на внутрішньому промені кута A , до сторін цього кута проведено рівні перпендикуляри BK і BM . Доведи, що AB — бісектриса кута A .

651. Побудуй на координатній площині трикутники з вершинами $A(0; 1)$, $B(2; 3)$, $C(0; 3)$ і з вершинами $K(1; 0)$, $P(3; 0)$, $T(3; 1)$. Чи рівні ці трикутники?
652. Пряма m перетинає відрізок AB у його середині O . Доведи, що точки A і B рівновіддалені від прямої m .
653. За допомогою завдання в GeoGebra (авт. Л. Кущенко)  <https://www.geogebra.org/m/at86ez8c>, переміщуючи вершину A , досліди теорему про катет, що лежить проти кута 30° .
654. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $AB = 32$ см. Знайди AC .
655. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $BC = 12$ см. Знайди AB .
656. Дано $\triangle FKE$, $\angle E = 90^\circ$, $\angle F = 60^\circ$, $FK = 18$ см. Знайди FE .
657. Given $\triangle MKP$, $\angle P = 90^\circ$, $\angle K = 60^\circ$, $PK = 6$ cm. Find MK .
658. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 45^\circ$, $BC = 10$ см. Знайди AC .
659.  За малюнком 17.14 пояснить, як можна знайти ширину річки на основі властивостей прямокутного рівнобедреного трикутника.



Мал. 17.14



Мал. 17.15

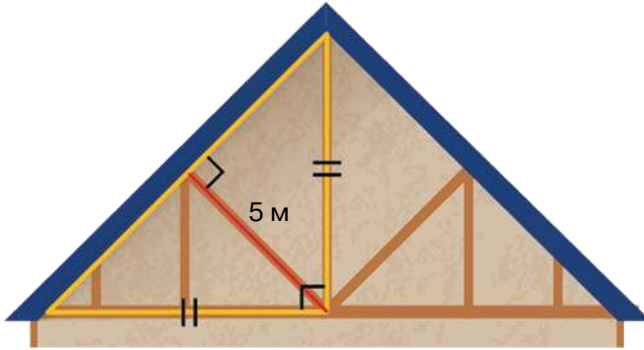
660. Прямокутні трикутники ABC і A_1B_1C розташовані, як показано на малюнку 17.15. Знайди міру кута ACA_1 , якщо $\angle BCB_1 = \alpha$ (грецька літера *альфа*).

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

661. Доведи: якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то кут, який лежить проти цього катета, дорівнює 30° .
662. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 120° , а бічна сторона 16 см. Знайди довжину медіани, проведеної до основи.

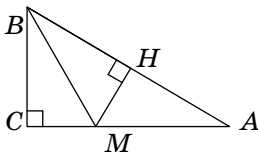


663. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 120° , а бічна сторона 24 см. Знайди довжину бісектриси, проведеної до основи.
664. Висота, проведена з вершини прямого кута рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює 5 м (мал. 17.16). Знайди довжину гіпотенузи.



Мал. 17.16

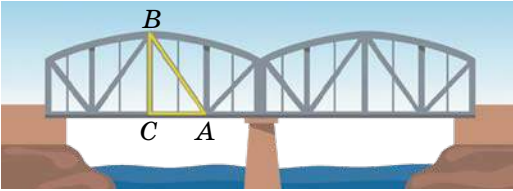
665. Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює 42 см. Знайди довжину висоти, проведеної з вершини прямого кута.
666. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 120° . Знайди висоту трикутника, проведену з вершини кута при основі, якщо основа трикутника дорівнює 32 см.
667. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 120° . Знайди основу трикутника, якщо висота, проведена з вершини кута при основі, дорівнює 17,2 см.
668. Гіпотенуза AB прямокутного трикутника ABC дорівнює 20 см, $\angle B = 30^\circ$, CK — висота. Знайди AK .
669. CH — висота трикутника ABC , у якому $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $AH = 8$ см. Знайди гіпотенузу AB .
670. У $\triangle ABC$ (мал. 17.17) $\angle C = 90^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$, BM — бісектриса, $CM = 5$ см. Установіть відповідність між довжинами відрізків, заданих умовами (1–3), та їх числовим значенням (А–Д).



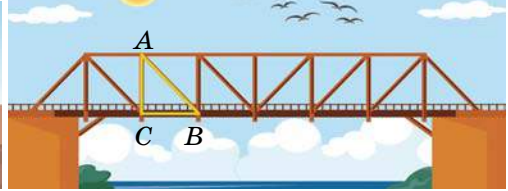
Мал. 17.17

1	BM	А	2,5 см
2	AC	Б	5 см
3	MH	В	7,5 см
		Г	10 см
		Д	15 см

671. У трикутнику ABC (мал. 17.18) $AB = 18$ м, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$. Знайди:
- відстань від точки A до прямої CB ;
 - проекцію похилої AB на пряму AC ;
 - проекцію BC на AB .



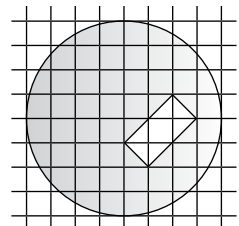
Мал. 17.18



Мал. 17.19

672. У трикутнику ABC (мал. 17.19) $\angle A = \angle B = 45^\circ$, $AB = 19$ м. Знайди:
- відстань від точки C до прямої AB ;
 - проекцію відрізка AC на пряму AB .
673. Знайди відстань між паралельними прямими, якщо від січної, яка перетинає їх під кутом 30° , прямі відтинають відрізок завдовжки 54 см.
674. Доведи, що бісектриси гострих кутів прямокутного трикутника перетинаються під кутом 45° .
675. Знайди кути прямокутного трикутника, якщо бісектриси двох його кутів перетинаються під кутом 70° .
676. Чи можуть бісектриси двох кутів прямокутного трикутника перетинатися під кутом 40° ?
677. Знаючи, що всі сторони квадрата рівні, а всі кути прямі, доведи, що квадрат $ABCD$ відрізками AC і BD розбивається на 4 рівні прямокутні рівнобедрені трикутники.
678. Медіана якого трикутника розбиває його на два менші трикутники, рівні між собою? Укажи вид утворених трикутників.

679. Перемалюй у зошит фігуру, зображену на малюнку 17.20, і проведи пряму так, щоб вона розрізала зафарбовану фігуру на дві частини рівних площ.



Мал. 17.20

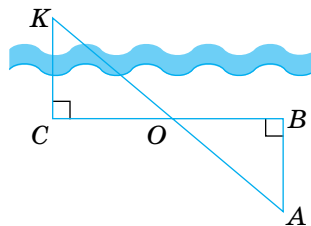
ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

680. Розглянь малюнок 17.21. У такий спосіб давньогрецький учений Фалес Мілетський запропонував вимірювати відстань KC до корабля, який був у морі.

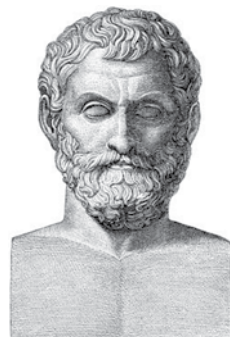
Робилося це так. Нехай у точці K розташовано корабель, а в точці C — спостерігач. Від пункту спостереження C намічали напрямок на корабель K і до цього напрямку на березі з точки C відкладали перпендикулярний напрямок, на якому будували довільний відрізок CB і знаходили його середину O .

У точці B намічався напрямок у бік суходолу, перпендикулярний до напрямку CB . Спостерігач ішов у напрямку BA , дивлячись на корабель. Як тільки корабель і пункт O опинялися на одній прямій, спостерігач фіксував точку A , і тоді відстань KC дорівнювала відстані AB , яку можна було знайти безпосереднім вимірюванням.

Спробуй і ти визначити відстань до недоступного об'єкта таким способом.



Мал. 17.21

Фалес Мілетський
(прибл. 624/623 – 548/545 до н. е.)

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

681. $\triangle ABC = \triangle MNK$, $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 80^\circ$. Знайди кути трикутника MNK .

682. Чи існує трикутник, кути якого дорівнюють 91° , 52° і 44° ?

683. Рівні відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $AO = CO$, а кути трикутника AOD — пропорційні числам 2, 3 і 5. Знайди кути трикутника COB .



САМОСТІЙНА РОБОТА

ВАРІАНТ 1

1. У трикутнику MNK $\angle K = 90^\circ$, $\angle M = 30^\circ$, $KN = 18$ см. Знайди MN .
2. $\triangle ABC$ — прямокутний ($\angle C = 90^\circ$). Знайди $\angle A$, якщо $\angle B = 70^\circ$.
3. Точки K і M лежать на основі AC рівнобедреного трикутника ABC . Доведи, що $AK = CM$, якщо $\angle ABK = \angle CBM$.
4. AP — висота рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$). Знайди кут PAC , якщо кут при вершині на 30° більший за кут при основі.

ВАРІАНТ 2

1. У трикутнику PMK $\angle K = 90^\circ$, $\angle M = 30^\circ$, $PM = 14$ см. Знайди PK .
2. $\triangle ABC$ — рівнобедрений ($AB = BC$). Знайди $\angle A$, якщо $\angle B = 70^\circ$.
3. Точки K і M лежать на основі AC рівнобедреного трикутника ABC . Доведи, що $BK = BM$, якщо $AK = CM$.
4. AM — бісектриса рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$). Знайди кут AMC , якщо кут при вершині у три рази більший за кут при основі.

ВАРІАНТ 3

1. У трикутнику BMK $\angle K = 90^\circ$, $\angle M = 30^\circ$, $KB = 8$ см. Знайди BM .
2. $\triangle ABC$ — прямокутний ($\angle C = 90^\circ$). Знайди $\angle B$, якщо $\angle A = 55^\circ$.
3. Точки K і M лежать на основі AC рівнобедреного трикутника ABC . Доведи, що $BK = BM$, якщо $\angle ABK = \angle CBM$.
4. AH — висота рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$). Знайди кут HAB , якщо кут при основі на 15° менший за кут при вершині.

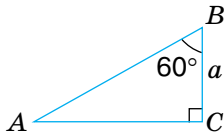
ВАРІАНТ 4

1. У трикутнику EMK $\angle K = 90^\circ$, $\angle M = 30^\circ$, $ME = 22$ см. Знайди KE .
2. $\triangle ABC$ — рівнобедрений ($AB = BC$). Знайди $\angle B$, якщо $\angle C = 50^\circ$.
3. Точки K і M лежать на основі AC рівнобедреного трикутника ABC , $AK = CM$. Доведи, що $\angle AKB = \angle CMB$.
4. AL — бісектриса рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$). Знайди кут ALB , якщо кут при вершині 12° менший за кут при основі.

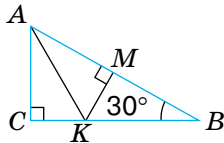
ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

А

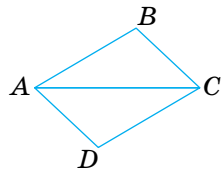
1 $BC = a$.
 AB



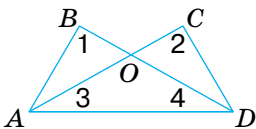
2 $AK = KB = 8$.
 CB, KM



3 $AB = CD, AD = BC$.
Довести: $AD \parallel BC$

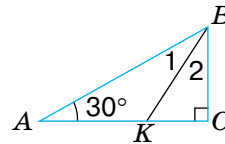


4 $\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$.
Довести: $\triangle ABO = \triangle DCO$

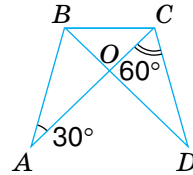


Б

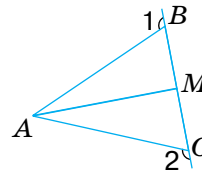
$\angle 1 = \angle 2, BK = 10$.
 AK, KC



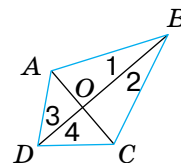
$AB = CD, AC = BD$.
 $\angle AOD$



$\angle 1 = \angle 2, BM = MC$.
Довести: $AM \perp BC$



$\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$.
Довести: $AC \perp BD$



ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1	Периметр рівнобедреного трикутника з основою 6 см і бічною стороною 5 см дорівнює:	A 17 см B 16 см	B 11 см Г 30 см
2	Один із кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 100° . Обчисли інші кути трикутника.	A 100° і 60° B 80° і 80°	B 40° і 40° Г 100° і 160°
3	Кут при вершині B рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) дорівнює 80° . Обчисли кут між бічною стороною й медіаною, проведеною з вершини B .	A 50° B 40°	B 60° Г 25°
4	Кут при основі рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює:	A 45° B 60°	B 30° Г 90°
5	Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 20 см, один із його кутів — 30° . Довжина меншого катета дорівнює:	A 20 см B 5 см	B 10 см Г 15 см
6	Кути трикутника пропорційні числам 4, 5 і 9. Даний трикутник:	A гострокутний B прямокутний B тупокутний Г рівнобедрений	
7	Діагональ AC прямокутника $ABCD$ розбиває його на два трикутники. Яке з тверджень хибне?	A $\triangle ABC = \triangle CDA$ B $\angle BAC = \angle ACD$ B $\angle ACB = \angle ACD$ Г $\angle ABC = \angle ADC$	
8	Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 5 см, а прилеглий кут — 60° . Гіпотенуза трикутника дорівнює:	A 10 см B 5 см	B 2,5 см Г 20 см
9	У трикутнику ABC $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 70^\circ$. Який знак слід поставити замість * в записі: $AB * BC$?	A < B =	B ≤ Г >
10	Один із кутів прямокутного трикутника дорівнює 60° , а сума найменшої й найбільшої його сторін — 6 см. Знайди довжину гіпотенузи.	A 7 см B 2 см	B 4 см Г 1 см

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТЕМАТИЧНОГО КОНТРОЛЮ

1. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 112 см, а основа — 34 см. Знайди бічну сторону.

A 78 см **Б** 39 см **В** 38 см **Г** 56 см

2. У $\triangle ABC$ $AB = BC = 12$ см, $\angle B = 120^\circ$.

Знайди довжину медіани BM .

A 24 см **Б** 12 см **В** 6 см **Г** не можна встановити

3. Дві сторони трикутника дорівнюють 10 см і 12 см. Якого найменшого цілого значення може набувати довжина третьої сторони, виражена в сантиметрах?

A 1 см **Б** 2 см **В** 3 см **Г** 4 см

4. BH — висота трикутника ABC , $BH = 4,5$ см, $AB = BC = 9$ см. Установи відповідність між кутами (1–3) та їх градусними мірами (A–Д).

1 $\angle BAC$	A 30°
2 $\angle HBC$	Б 45°
3 $\angle ABC$	В 60°
	Г 90°
	Д 120°

5. Через точку O — середину відрізка AB проведено пряму MK так, що $\angle AMO = \angle BKO$. Доведи, що $MO = OK$.

6. Куты трикутника ABC пропорційні числам 1, 2 і 3. Знайди:

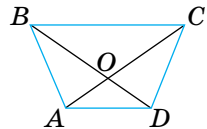
а) куты $\triangle ABC$;

б) вид трикутника ABC ;

в) найбільшу сторону трикутника ABC , якщо найменша його сторона дорівнює 4 см.

7. CH — висота трикутника ABC . Знайди BH , якщо $AC = 24$ см, $\angle ACB = 105^\circ$ і $\angle ACH : \angle BCH = 4 : 3$.

8. Знайди міру кута COD , якщо $AB = CD$, $BD = AC$, $\angle BDA = 35^\circ$.



Додаткове завдання

9. BM і B_1M_1 — медіани трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ відповідно. $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BM = B_1M_1$. Доведи, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Який трикутник називають рівнобедреним?
2. Як називають сторони рівнобедреного трикутника?
3. Сформулюй властивість рівнобедреного трикутника про кути при основі.
4. Сформулюй властивість бісектриси рівнобедреного трикутника.
5. Сформулюй ознаки рівнобедреного трикутника.
6. Який трикутник називають різностороннім?
7. Який трикутник називають рівностороннім?
8. Як співвідносяться поняття *трикутники* і *рівнобедрені трикутники*?
9. Сформулюй першу ознаку рівності трикутників.
10. Сформулюй другу ознаку рівності трикутників.
11. Сформулюй третю ознаку рівності трикутників.
12. Як ти розумієш вислів «трикутник визначається трьома його сторонами»?
13. Якими елементами визначається трикутник?
14. Як слід розуміти, що трикутник — фігура жорстка?
15. Сформулюй означення прямокутного трикутника.
16. Як називають сторони прямокутного трикутника?
17. Сформулюй ознаки рівності прямокутних трикутників.
18. Сформулюй і доведи властивості прямокутних трикутників.
19. Сформулюй властивість катета прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30° .
20. Що називають перпендикуляром, похилою і проекцією похилої?
21. Що називають відстанню від точки до прямої?
22. Що називають відстанню між фігурами?
23. Сформулюй і доведи теорему про залежність між сторонами й кутами трикутника.
24. Сформулюй і доведи теорему про нерівність трикутника.
25. Сформулюй нерівності трикутника XYZ .

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 3

Трикутник — геометрична фігура, яка складається з трьох точок, які не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які послідовно сполучають ці точки.

Кожний трикутник має три сторони, три вершини і три кути.

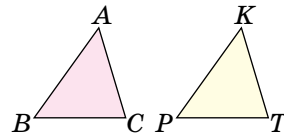
Сума довжин сторін трикутника — його *периметр*.

Сума кутів трикутника дорівнює 180° .

Важливу роль у геометрії відіграють ознаки рівності трикутників. Дві фігури називаються рівними, якщо їх можна сумістити.

Якщо $\triangle ABC = \triangle KPT$, то

$$\begin{cases} AB = KP, BC = PT, CA = TK, \\ \angle A = \angle K, \angle B = \angle P, \angle C = \angle T. \end{cases}$$

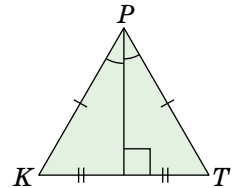
**Ознаки рівності трикутників**

Два трикутники рівні, якщо:

- **дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника (I);**
- **якщо сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні й прилеглим до неї кутам іншого трикутника (II);**
- **якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам іншого трикутника (III).**

Трикутник називають *рівнобедреним*, якщо він має дві рівні сторони. Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають бічними сторонами, а третю сторону — його *основою*.

У рівнобедреному трикутнику кути при основі — рівні, а бісектриса, проведена до основи, є медіаною й висотою.



Якщо трикутник має два рівні кути, то він — *рівнобедрений*.

Якщо всі сторони трикутника рівні, його називають *рівностороннім* трикутником. Кожний кут рівностороннього трикутника дорівнює 60° .

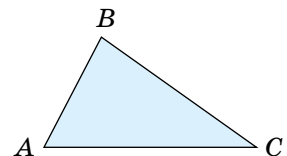
Залежно від кутів трикутники поділяють на гострокутні, прямокутні й тупокутні.

Сторону прямокутного трикутника, яка лежить проти прямого кута, називають *гіпотенузою*, а дві інші — *катетами*.

Катет прямокутного трикутника, який лежить проти кута 30° , дорівнює половині гіпотенузи.

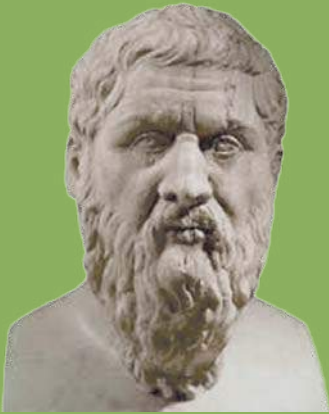
Кожна сторона трикутника менша за суму двох інших його сторін, тобто $AC < AB + BC$.

У кожному трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, а проти більшого кута — більша сторона.



РОЗДІЛ 4

Коло і круг. Геометричні побудови




Круг – перша найпростіша й найдосконаліша фігура

Прокл

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- круг, коло — circle
- дотична — tangent
- вписане коло — inscribed circle
- описане коло — circumscribed circle

A large Ferris wheel, the Ain Dubai, is the central focus of the image, set against a backdrop of a modern city skyline with numerous skyscrapers under a clear blue sky.

У цьому розділі ти розшириш і поглибиш свої знання про коло й круг, набуті в попередніх класах, дізнаєшся про взаємні розміщення на площині прямої та кола, двох кіл, про властивості дотичної до кола, дотичних кіл, про кола, вписані й описані навколо трикутника. А ще зрозумієш, що таке геометричне місце точок, навчишся виконувати основні геометричні побудови й розв'язувати складніші задачі на побудову циркулем і лінійкою.

§ 18 КОЛО І КРУГ

Коло — це фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки. Цю точку називають *центром кола*.

Відрізок, який сполучає будь-яку точку кола з його центром, називають *радіусом*.

Відрізок, який сполучає дві довільні точки кола, називають *хордою* кола.

Хорду, яка проходить через центр кола, називають *діаметром* (мал. 18.1).

Кожний діаметр кола d складається з двох радіусів r , тому його довжина вдвічі більша за довжину радіуса, $d = 2r$.

Якщо хорда не проходить через центр кола, її довжина менша від довжини діаметра.

Коло на папері зображають за допомогою циркуля.

З даного центра на площині можна описати тільки одне коло даного радіуса (мал. 18.2).

Взаємне розташування кола і прямої

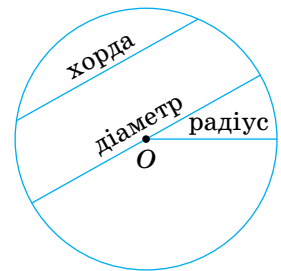
Пряма й коло можуть мати дві спільні точки (мал. 18.3, *а*), одну спільну точку (мал. 18.3, *б*) або не мати жодної (мал. 18.3, *в*).

Пряму, яка має з колом дві спільні точки, називають *січною*.

Пряму, яка має з колом тільки одну спільну точку, називають *дотичною до кола*. Їх спільну точку називають *точкою дотику*. (Йдеться про фігури однієї площини.) Точка дотику лежить на колі, тому дотична віддалена від центра кола на відстань, що дорівнює довжині радіуса. Оскільки всі інші точки дотичної лежать поза колом,

КЛЮЧОВІ СЛОВА

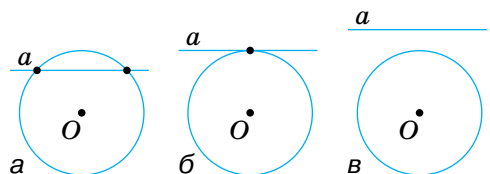
- коло — circle
- круг — circle
- радіус — radius
- хорда — chord
- діаметр — diameter
- довжина кола — circumference
- дотична — tangent
- січна — secant



Мал. 18.1



Мал. 18.2

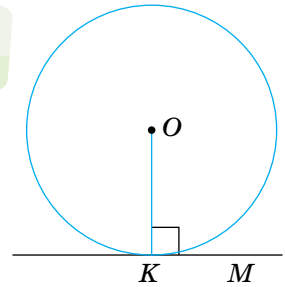


Мал. 18.3

відстані від них до центра кола більші за довжину радіуса. Із цього випливає таке твердження.

Теорема 23. Дотична до кола перпендикулярна до його радіуса, проведеного в точку дотику.

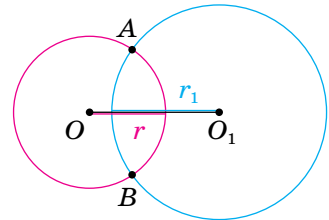
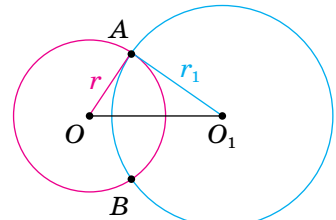
Щоб через дану на колі точку K провести дотичну до цього кола, треба провести радіус OK , а потім — пряму KM , перпендикулярну до цього радіуса (мал. 18.4).



Мал. 18.4

Взаємне розташування двох кіл

Якщо два різні кола мають дві спільні точки, то говорять, що дані кола *перетинаються* в цих точках. Точки перетину двох кіл лежать по різні боки від прямої, яка проходить через центри цих кіл. На малюнку 18.5 зображено кола із центрами O і O_1 що перетинаються в точках A і B .

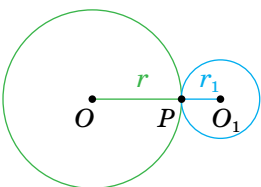


Мал. 18.5

У цьому випадку відстань між центрами кіл менша від суми радіусів, тобто

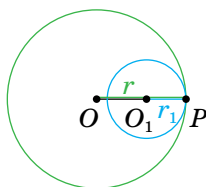
$$OO_1 < r + r_1.$$

Якщо два кола мають тільки одну спільну точку, говорять, що вони *дотикаються* в цій точці. Дотик двох кіл може бути зовнішнім (мал. 18.6) або внутрішнім (мал. 18.7). В обох випадках точка дотику й центри кіл лежать на одній прямій.



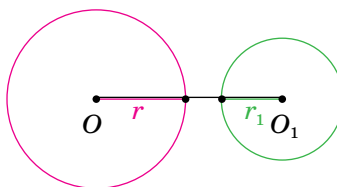
$$OO_1 = r + r_1$$

Мал. 18.6



$$OO_1 = r - r_1$$

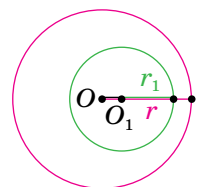
Мал. 18.7



$$OO_1 > r + r_1$$

а

Мал. 18.8



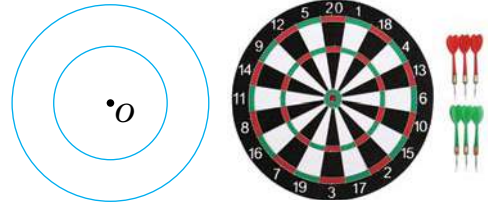
$$OO_1 < r - r_1$$

б

Два кола можуть не мати спільних точок. Тоді відстань між центрами більша за суму радіусів: (мал. 18.8, а) або менша за їх різницю (мал. 18.8, б).

Два кола однієї площини, які мають спільний центр, називають *концентричними колами* (мал. 18.9).

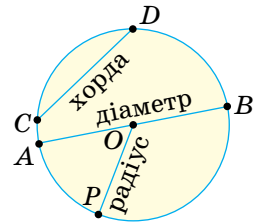
Зазвичай кола креслять, користуючись циркулем. Але іноді зручніше це робити за допомогою спеціальних шаблонів із вирізаними колами різних радіусів.



Мал. 18.9

Коло ділить площину на дві частини (області). Об'єднання кола з його внутрішньою областю називають *кругом*. Межа круга — коло.

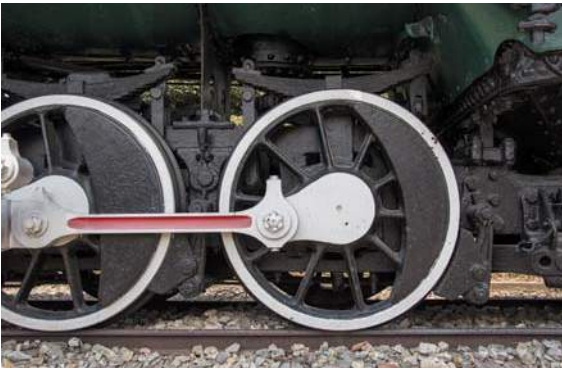
Центром, радіусом, діаметром, хордою круга називають відповідно центр, радіус, діаметр, хорду кола, що є межею даного круга (мал. 18.10).



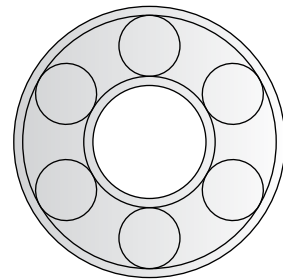
Мал. 18.10

Форму кола має обруч, форму круга — дно відра, видимий диск Сонця тощо.

Колесо на рейці — матеріальна модель кола, що дотикається до прямої (мал. 18.11). На схематичному зображенні підшипника (мал. 18.12) є кілька дотичних кіл.



Мал. 18.11



Мал. 18.12

Як вам відомо з попередніх класів, довжину l кола і площу S круга виражають через радіус r такими формулами:

$$l = 2\pi r, S = \pi r^2.$$

Строгі доведення цих формул розглядатимуться в старших класах.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ



Слово *коло* — давньоукраїнське. Воно має один корінь із словами — *колода*, *колоти*, *колотити*, *сколоти*. Сколотами називали праукраїнців, які жили на землях сучасної України за скіфів і ще раніше. А ще слово *коло* в українській мові є прийменником, як і навколо, довкола. Якщо до забитого в землю кілка (кола) прив'язували тварину, то вона ходила довкола, навколо.

Раніше круг також називали колом, наприклад, співали: «Ой зійди, зійди, ясен місяцю, як млиновеє коло». Хоч і повний місяць, і камінь у млині мають форму круга, а не кола. Нерідко коло називали також колесом; дехто вважає, що перші колеса навчилися робити майстрові люди саме в наших краях.

У геометрії коло відіграє важливу роль. Існує навіть окрема частина геометрії — геометрія кіл, у якій досліджуються важливі й цікаві властивості геометричних фігур, пов'язаних із колом.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

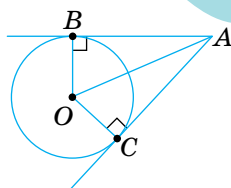
1. Що таке коло; центр кола; радіус; діаметр; хорда?
2. Що таке круг? Чим відрізняється круг від кола?
3. Скільки спільних точок можуть мати:
 - а) пряма і коло; б) два кола?
4. Сформулюй означення дотичної до кола.
5. Яку властивість має дотична до кола?
6. Які кола називають дотичними? Що таке точка дотику?
7. Як можуть дотикатися два кола?
8. Які кола називають концентричними?
9. Як обчислюють довжину кола; площу круга?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Доведи, що точки дотику кола до сторін кута рівновіддалені від його вершини й центр кола лежить на бісектрисі цього кута.

- Нехай коло із центром O дотикається до сторін кута A в точках B і C (мал. 18.13). Доведемо, що $AB = AC$.

Радіуси OB і OC , проведені в точки дотику, перпендикулярні до відповідних дотичних і рівні. Тому прямокутні трикутники ABO і ACO рівні за гіпотенузою й катетом. Отже, $AB = AC$ і кути OAB та OAC рівні.

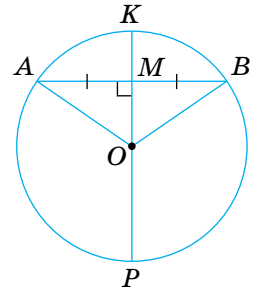


Мал. 18.13



2. Доведи, що діаметр кола, проведений через середину хорди, відмінної від діаметра, перпендикулярний до хорди.

- Нехай AB — хорда кола, яка не проходить через центр O кола, а KP — діаметр кола, який проходить через середину M хорди AB (мал. 18.14). $\triangle OAB$ рівнобедрений, бо $OA = OB$. А медіана OM рівнобедреного трикутника, проведена до його основи, є також висотою трикутника. Тому $OM \perp AB$, а отже, і $KP \perp AB$.

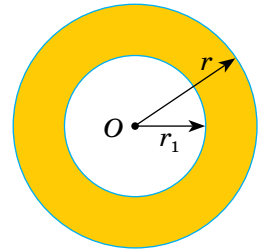


Мал. 18.14

3. Знайди площу кільця, обмеженого двома концентричними колами радіусів r і r_1 (мал. 18.15).

- Площа S кільця дорівнює різниці площ кругів радіусів r і r_1 :

$$S = \pi r^2 - \pi r_1^2 = \pi (r^2 - r_1^2).$$



Мал. 18.15

ВИКОНАЄМО УСНО

Використовуючи мал. 18.16, розв'яжи задачі (684–688).

684. Назви: а) радіус кола;

б) діаметр кола;

в) хорду кола.

685. Скільки хорд зображено на малюнку 18.16?

А одну Б дві В три Г чотири

686. Знайди AB , якщо $OM = 8$ см.

687. Знайди OB , якщо $AB = 6$ см.

688. Встанови вид трикутника MOB (мал. 18.16).

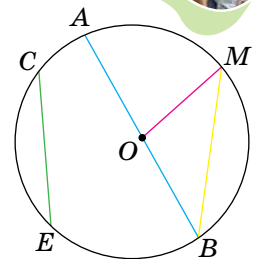
А різносторонній

Б рівносторонній

В рівнобедрений

Г не можна встановити

689. Як називаються червоний і жовтий відрізок на малюнку 18.17?



Мал. 18.16



Мал. 18.17


690. **Гра.** Один з учнів / одна з учениць називає діаметр кола, а інший має знайти його радіус. Потім учні міняються ролями

691. Дано коло із центром O . Скільки спільних точок має коло з:
а) прямою OA ; б) променем OM ?

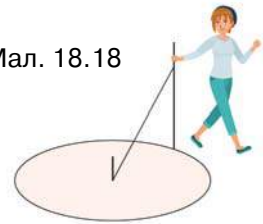
692. Скільки різних дотичних до даного кола можна провести через дану точку, що лежить:

а) на колі; б) поза колом; в) усередині кола?

693. Скільки пар дотичних кіл є на малюнку 18.12? А скільки пар концентричних кіл?

694.  Садівниця описує коло для клумби за допомогою кілочків і мотузки (мал. 18.18). Чому описана таким способом фігура — коло? Чи вийде коло, якщо мотузка намотуватиметься на кілочок?

Мал. 18.18



ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО

РІВЕНЬ А



695. Накресли коло. Проведи його радіус OA , діаметр PK , хорду KM .

696. Накресли коло. Проведи його радіус OB , діаметр EF , хорду EN .

697. AB і CD — рівні хорди кола із центром O . Доведи, що $\triangle ABO = \triangle CDO$.

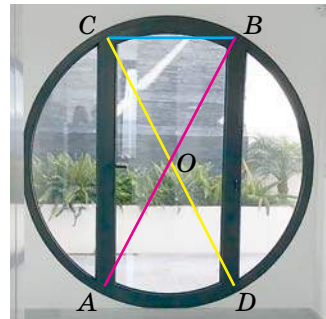
698. AB і CD — діаметри кола із центром O (мал. 18.19). Доведи, що хорди AC і BD рівні.

699. AB і CD — діаметри кола із центром O (мал. 18.19), які перетинаються під кутом 60° . Знайди довжину діаметра, якщо $BC = 5$ дм.

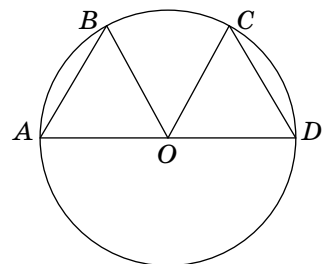
700. У колі з центром O (мал. 18.20) проведено рівні кути $\angle AOB$ і $\angle DOC$. Доведи, що хорди AB і CD рівні.

701. У колі з центром O (мал. 18.20) проведено рівні хорди AB і CD . Доведи, що кути $\angle AOB$ і $\angle COD$ рівні.

702. У колі з центром O проведено діаметр AD , $AD = 12$ см (мал. 18.20). Знайди відстань між точками B і C , якщо $AB = CD = 6$ см.

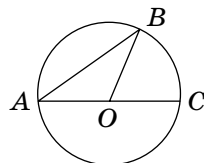


Мал. 18.19



Мал. 18.20

703. AB і AC — хорда й діаметр кола із центром O . Знайди кут BOC , якщо кут $ABO = 35^\circ$ (мал. 18.21).



Мал. 18.21

704. AB і AC — хорда й діаметр кола із центром O (мал. 18.21). Знайди кут ABO , якщо кут BOC дорівнює 100° .

705. Знайдіть відстань між центрами кіл радіусів 5 м і 7 м, які дотикаються:



- а) зовнішнім способом;
б) внутрішнім способом.

706. Знайди відстань між центрами кіл радіусів 3 см і 8 см, які дотикаються:

- а) зовнішнім способом;
б) внутрішнім способом.

707. Чи мають спільні точки два кола, радіуси яких дорівнюють 3 см і 4 см, якщо відстань між їх центрами дорівнює 5 см?

708. Чи мають спільні точки два кола, радіуси яких дорівнюють 5 см і 7 см, якщо відстань між їх центрами дорівнює 15 см?

709. Відстань між центрами двох кіл дорівнює 9 см. Установіть відповідність між радіусами, заданими умовами (1–4) та взаємним розміщенням цих кіл (А–Г).



1 $r_1 = 2$ см, $r_2 = 10$ см

2 $r_1 = 5$ см, $r_2 = 4$ см

3 $r_1 = 3$ см, $r_2 = 5$ см

4 $r_1 = 12$ см, $r_2 = 3$ см

А кола перетинаються

Б кола не мають спільних точок

В кола мають зовнішній дотик

Г кола мають внутрішній дотик

710. З точки A до кола із центром O проведено дві дотичні, кут між якими дорівнює 60° . Знайди радіус кола, якщо $OA = 10$ см.

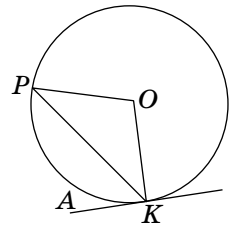
711. Two tangents are drawn from point A to the circle with center O , the measure of the angle between them is 60° . Find OA if the radius of the circle is 3 cm.

712. Коло дотикається до сторін кута A в точках B і C так, що $AB = BC$. Знайди міру кута A .

713. Коло дотикається до сторін кута A в точках B і C . Знайди периметр трикутника ABC , якщо $AB = 7$ см і $\angle BAC = 60^\circ$.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б


714. Кожна з хорд AB і BC дорівнює радіусу кола. Знайди кути трикутника ABC .
715. Кола із центрами O і O_1 перетинаються в точках A і B . Доведи, що $\triangle OAO_1 = \triangle BOO_1$.
716. Кола із центрами O і O_1 перетинаються в точках A і B . Доведи, що $\triangle OAB$ і $\triangle O_1AB$ — рівнобедрені.
717. Кола із центрами O і O_1 перетинаються в точках A і B , причому кожне з них проходить через центр іншого. Знайди $\angle AOB$ і $\angle OAO_1$.
718. Доведи, що рівні хорди кола рівновіддалені від центра.
719. Якщо хорди кола рівновіддалені від центра кола, то вони рівні. Доведи.
720. Пряма AK дотикається до кола із центром O в точці K (мал. 18.22). Знайди кут AKP , якщо $\angle KOP = 100^\circ$.
721. Пряма AK дотикається до кола із центром O в точці K (мал. 18.22). Знайди кут KOP , якщо $\angle AKP = 55^\circ$.
722. Два кола мають зовнішній дотик і відстань між їх центрами дорівнює 16 см (мал. 18.23). Знайди радіуси цих кіл, якщо:
- а) один із них на 4 см менший за радіус другого;
 - б) один із них у три рази більший за другий;
 - в) радіуси пропорційні числам 3 і 5.
723. Два кола мають внутрішній дотик і відстань між їх центрами дорівнює 12 мм (мал. 18.24). Знайди радіуси цих кіл, якщо:
- а) один з них у два рази менший за другий;
 - б) радіуси пропорційні числам 1 і 3.
724. З точки A до кола проведено дві дотичні. Знайди кут між ними, якщо відстань від точки A до точки дотику дорівнює радіусу кола.
725. З точки A до кола проведено дві дотичні, кут між якими дорівнює 90° . Знайди відстань від точки A до точки дотику, якщо радіус кола дорівнює 5 см.



Мал. 18.22



Мал. 18.23



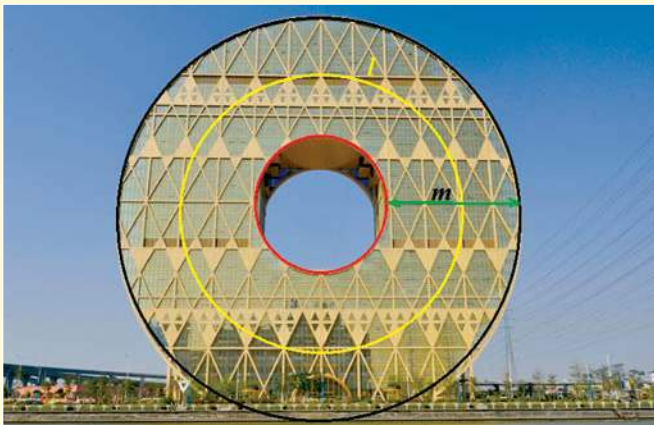
Мал. 18.24

726. Коло із центром у точці O дотикається до сторін кута A в точках B і C так, що кут BOC дорівнює 120° . Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо $BC = 12$ см.
727. Коло із центром у точці O дотикається до сторін кута A в точках B і C так, що кут BOC дорівнює 120° . Знайди відстані від точок O і A до хорди BC , якщо радіус кола 8 см.
728. За допомогою графічних калькуляторів GeoGebra чи Desmos Geometry побудуйте три кола, кожне з яких проходить через центри двох інших. Доведіть, що їх центри — вершини рівностороннього трикутника.
729. Три рівні кола із центрами O_1, O_2, O_3 попарно дотикаються одне до одного в точках K, P і T . Доведи, що:
а) $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1$; б) $KP = PT = TK$.
730. На дні глиняного посуду трипільців часто був знак, зображений на малюнку 18.25. Із центра кола проводили три відрізки, які розбивали дане коло на три рівні дуги. Знайди кути між цими відрізками. Обчисли радіус кола з точністю до десятих, якщо довжина однієї з трьох дуг дорівнювала 3 см.



Мал. 18.25

731. Доведи, що площа кільця, обмеженого двома концентричними колами радіусів r і r_1 , дорівнює середньому арифметичному довжин цих кіл l , помноженому на різницю їх радіусів m , тобто $S = lm$ (мал. 18.26).



Мал. 18.26.
Хмарочос
у китайському
місті Гуанчжоу

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

732. Підготуй презентацію на тему:
а) «Коло навколо нас»; б) «Круг навколо нас».
733. Як побудувати дотичну до даного кола:
а) паралельну даній прямій;
б) перпендикулярну до даної прямої?



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

734. Відрізок завдовжки a поділено на 3 рівні частини. Яку частину довжини a становить відстань між серединами першої і третьої частин?
735. Знайди довжину бісектриси трикутника з периметром 40 см, якщо вона розбиває його на два трикутники з периметрами 20 см і 30 см.
736. Знайди площу квадрата $ABCD$, якщо $AC = 10$ см.



§ 19 ГЕОМЕТРИЧНЕ МІСЦЕ ТОЧОК

Геометричним місцем точок (ГМТ) називають фігуру, яка складається з усіх точок, що мають певну властивість.

Розглянемо кілька геометричних місць точок площини.

Коло — геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки.

Круг радіуса r — геометричне місце точок, відстані від яких до даної точки не перевищують r .

Задача 1. Знайди геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців даного відрізка.

КЛЮЧОВІ СЛОВА

геометричне місце точок — locus

Розв'язання. Нехай дано відрізок AB . Його середина M рівновіддалена від точок A і B (мал. 19.1, а). Проведемо пряму MK , перпендикулярну до AB . Кожна її точка K , відмінна від M , також рівновіддалена від точок A і B , бо $\triangle KAM = \triangle KBM$ (за двома катетами). Отже, $KA = KB$.

Якщо ж точка P не лежить на прямій MK , вона не може бути рівновіддаленою від A і B (мал. 19.1, б). Справді, з припущення, що $PA = PB$, випливає перпендикулярність прямих PM і AB , бо медіана PM рівнобедреного трикутника PAB є його висотою. Тоді сума двох прямих кутів PMB і KMA не дорівнювала б 180° . Цього не може бути. Отже, поза прямою MK не існує точки, рівновіддаленої від точок A і B .

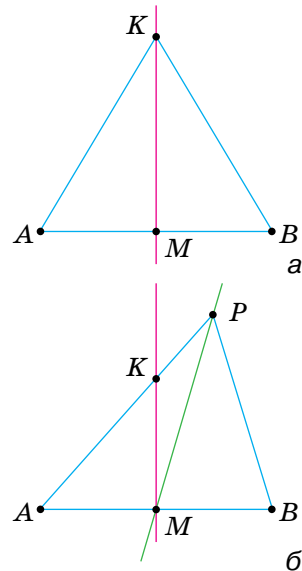
Таким чином, кожна точка прямої MK рівновіддалена від точок A і B , а точка, яка не лежить на прямій MK , не може бути рівновіддаленою від точок A і B .

Пряму, яка проходить через середину відрізка перпендикулярно до нього, називають *серединним перпендикуляром* до даного відрізка. З попередніх міркувань випливає таке твердження.

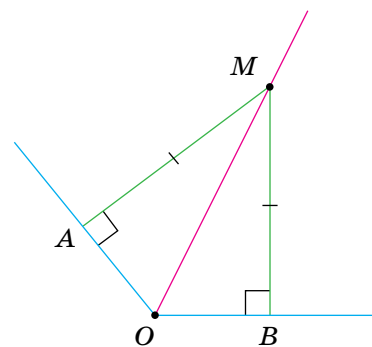
Геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка, є його серединний перпендикуляр.

Задача 2. Знайди геометричне місце точок, які лежать усередині кута й рівновіддалені від його сторін.

1. Нехай M — точка кута, рівновіддалена від його сторін OA і OB (мал. 19.2). Тоді перпендикуляри MA і MB , опущені з точки M на сторони кута, рівні. Тому $\triangle MOA = \triangle MOB$, за катетом і гіпотенузою. Отже, $\angle AOM = \angle BOM$, тобто точка M належить бісектрисі даного кута AOB .



Мал. 19.1



Мал. 19.2

2. Якщо M — довільна точка бісектриси $\angle AOB$, а MA і MB — перпендикуляри на OA і OB (див. мал. 19.2), то $\triangle OAM = \triangle OBM$ (за гіпотенузою і гострим кутом). Тому $MA = MB$, тобто точка M рівновіддалена від сторін даного кута.

Геометричним місцем точок кута, які належать куту і рівновіддалені від його сторін, є бісектриса цього кута.

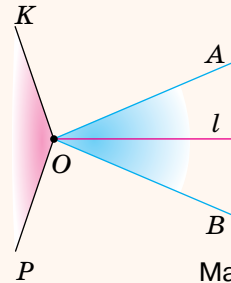
Зверни увагу! Тут мають на увазі кути, менші від розгорнутого.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

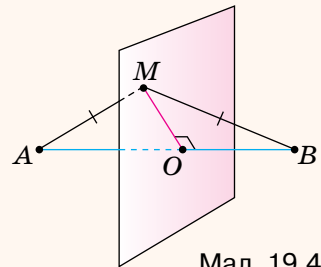
Чи правильно говорити, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від сторін кута, є бісектриса цього кута? Ні. Коли в планіметрії говорять про геометричне місце точок, не уточнюючи, про які саме точки йдеться, то мають на увазі точки площини, якій належить дана фігура. За такої умови, геометричним місцем точок, рівновіддалених від сторін кута, є об'єднання бісектриси l даного кута і всіх точок деякого іншого кута, показаного на малюнку 19.3. Адже кожна точка кута KOP також рівновіддалена від сторін даного кута AOB . Йдеться про кути, менші від розгорнутого.

Говорячи, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка, є серединний перпендикуляр до цього відрізка, мають на увазі, що йдеться про геометричне місце точок площини, у якій лежить відрізок. А геометричним місцем точок простору, рівновіддалених від кінців відрізка, є деяка площина (мал. 19.4). Подумай, як розташована ця площина відносно даного відрізка.

Геометричні місця точок простору розглядають у старших класах.



Мал. 19.3



Мал. 19.4

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

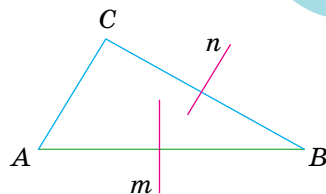
1. Що таке геометричне місце точок? Наведи приклади.
2. Що таке серединний перпендикуляр до даного відрізка?
3. Що є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка?
4. Що є геометричним місцем точок кута, які належать куту і рівновіддалені від його сторін?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

Доведи, що серединні перпендикуляри двох сторін трикутника перетинаються.

- Нехай n і m — серединні перпендикуляри до сторін BC і AB трикутника ABC (мал. 19.5).

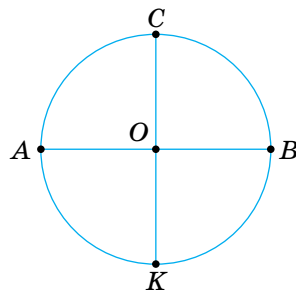
Доведемо, що вони не можуть бути паралельними один одному. Доводитимемо від супротивного. Припустимо, що $n \parallel m$. Тоді пряма, перпендикулярна до n , має бути перпендикулярною і до m . Отже, $BC \perp n$ і $BC \perp m$. Але за умовою і $AB \perp m$. А дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, — паралельні. Отже, із припущення, що $m \parallel n$, випливає паралельність сторін AB і BC трикутника. Цього не може бути. Тому прямі n і m не можуть бути паралельними. Отже, вони перетинаються.



Мал. 19.5

ВИКОНАЄМО УСНО

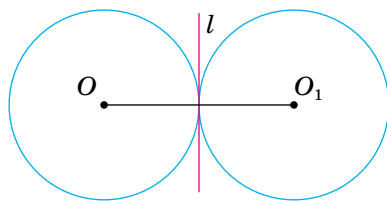
737. Чи правильно, що кожна точка бісектриси кута рівновіддалена від сторін цього кута?
738. Чи правильно, що бісектриса кута є геометричним місцем точок, рівновіддалених від сторін цього кута?
739. Чим є геометричне місце точок, які лежать на відстані 2 м від деякої точки?
740. Чим є геометричне місце точок, рівновіддалених від двох паралельних прямих?
741. AB і CK — перпендикулярні діаметри одного кола (мал. 19.6). Чим є серединний перпендикуляр діаметра AB ?
742. Серединний перпендикуляр відрізка AB проходить через точку C . Чи правильно, що трикутник ABC рівнобедрений?



Мал. 19.6



743. Два рівні кола із центрами O і O_1 дотикаються зовнішнім способом (мал. 19.7). Чи правильно, що їх спільна дотична, проведена через точку дотику, є серединним перпендикуляром до відрізка OO_1 ?



Мал. 19.7

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

744. Дано точки A і B . Побудуй геометричне місце точок, рівновіддалених від A і B , якщо $AB = 4$ см.
745. Дано точки P і K . Побудуй геометричне місце точок, рівновіддалених від P і K , якщо $PK = 6$ см.
746. Дано: а) прямий кут; б) гострий кут. Побудуй геометричне місце точок, які лежать усередині цього кута й рівновіддалені від його сторін.
747. Побудуйте геометричне місце точок, які віддалені від даної точки на дану відстань a .
748. Побудуй геометричне місце точок, які віддалені від даної точки на відстань 2 см.
749. Чим є геометричне місце точок, які лежать на даній відстані від даної прямої? Виконайте відповідний малюнок.
750. Дано дві паралельні прямі. Побудуй геометричне місце точок, рівновіддалених від цих прямих.
751. Знайди геометричне місце центрів рівних кіл, які дотикаються до даної прямої.
752. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, що проходять через дві дані точки.
753. Знайди геометричне місце центрів рівних кіл, які проходять через дану точку.
754. Дано кут 50° . Побудуй геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до сторін цього кута.
755. Дано кут 70° . Побудуй геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до сторін цього кута.



ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



756. Знайди геометричне місце центрів кіл радіуса $2r$, які дотикаються до кола радіуса: а) r ; б) $3r$.
757. Дано коло радіуса 6 см. Чим є ГМТ, які ділять усі його діаметри у відношенні $1 : 2$?
758. Чим є геометричне місце вершин прямих кутів, обидві сторони яких дотикаються до даного кола?
759. Дано дві паралельні прямі a і b . Побудуй ГМТ, які лежать між даними прямими і відстані від яких до a і b відносяться як $1 : 2$.
760. Дано дві паралельні прямі. Чим є ГМТ, відстані від яких до даних прямих відносяться як $2 : 3$?
761. Дано відрізок AB завдовжки 10 см. Чим є ГМТ, які віддалені від одного з кінців на 6 см, а від іншого — на 8 см?
762. Given a segment MP with length 8 cm. What are the locus that are 3 cm from one end point and 5 cm from the other?
763. Дано прямокутник зі сторонами 3 см і 5 см. Чим є ГМТ, які віддалені від якої-небудь із його найближчих сторін на 1 см і лежать: а) в його внутрішній області; б) поза прямокутником?
764. Доведи, що точка перетину двох бісектрис трикутника рівновіддалена від усіх сторін трикутника.
765. Доведи, що точка перетину серединних перпендикулярів двох сторін трикутника рівновіддалена від усіх вершин даного трикутника.
766. У якому трикутнику бісектриси кутів перетинаються під кутом 45° ?



ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

767. Змодельюй два рівних тупих кути, у яких одна сторона — спільна, а дві інші — перпендикулярні.
768. Виріж із цупкого паперу квадрат. Перегни його так, щоб утворилося геометричне місце точок квадрата, рівновіддалених від: а) двох сусідніх вершин; б) протилежних вершин; в) усіх вершин квадрата. Виготов модель, на якій визначено геометричне місце точок простору, рівновіддалених від усіх вершин квадрата.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



769. Знайди міру кута, який у 3 рази більший за суміжний із ним кут.
770. Знайди менший катет прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 10 см, а один із кутів — 30° .
771. Висота рівнобедреного прямокутного трикутника, опущена на гіпотенузу, дорівнює 7 см. Знайди гіпотенузу цього трикутника.

§ 20 КОЛО І ТРИКУТНИК

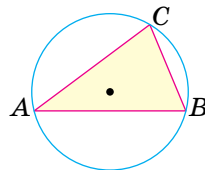
Коло і трикутник можуть не мати спільних точок або мати 1, 2, 3, 4, 5, 6 спільних точок (відповідні малюнки виконай самостійно). Заслуговують на увагу випадки, коли коло проходить через усі три вершини трикутника або коли воно дотикається до всіх сторін трикутника. Розглянемо такі випадки детальніше.

Описане коло.

Коло називають *описаним навколо трикутника*, якщо воно проходить через усі вершини трикутника (мал. 20.1).

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- описане коло — circumscribed circle
- вписане коло — inscribed circle

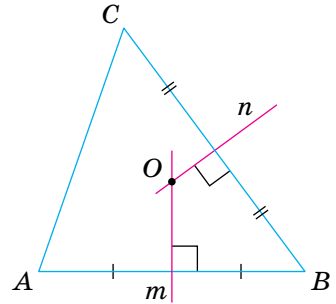


Мал. 20.1

Теорема 24. Навколо кожного трикутника можна описати лише одне коло. Його центром є точка перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника.

Доведення. Нехай ABC — довільний трикутник (див. мал. 20.2). Знайдемо точку, рівновіддалену від вершин A , B і C . Геометричне місце точок, рівновіддалених від точок A і B , — серединний перпендикуляр m до відрізка AB ; геометричне місце точок,

рівновіддалених від точок B і C , — серединний перпендикуляр n до відрізка BC . Ці два серединні перпендикуляри не можуть бути паралельними (див. задачу на с. 176), вони перетинаються в деякій точці O . А вона рівновіддалена від точок A , B і C . Отже, $OA = OB = OC$, тому O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC .



Мал. 20.2

Для кожного відрізка AB існує серединний перпендикуляр m , і лише один, а для BC — серединний перпендикуляр n , і тільки один. Точка їх перетину завжди існує, і вона — тільки одна. Отже, навколо кожного трикутника можна описати коло, і тільки одне.

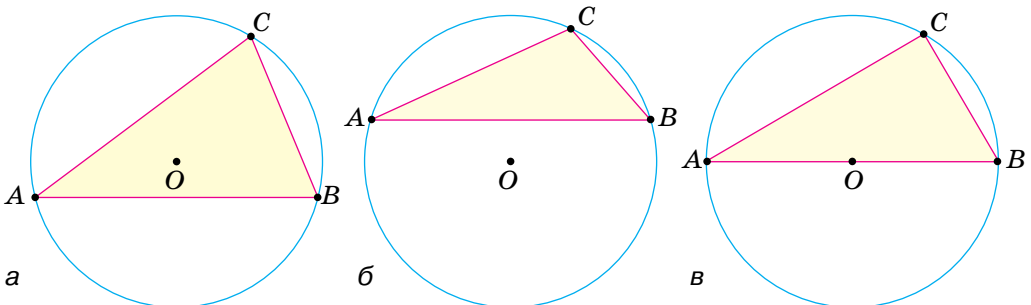
Наслідки.

1. Серединні перпендикуляри до всіх трьох сторін довільного трикутника проходять через одну й ту саму точку.
2. Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести коло, і тільки одне.

Із доведеної теореми випливає спосіб побудови кола, описаного навколо трикутника. Щоб описати навколо трикутника ABC коло, досить:

- 1) побудувати серединні перпендикуляри до двох сторін цього трикутника;
- 2) визначити точку O , у якій ці серединні перпендикуляри перетинаються;
- 3) із центра O провести коло радіуса OA .

Центр кола, описаного навколо трикутника, може лежати у внутрішній області даного трикутника (мал. 20.3, а), або зовнішній його області (мал. 20.3, б), або на його стороні (мал. 20.3, в).



Мал. 20.3

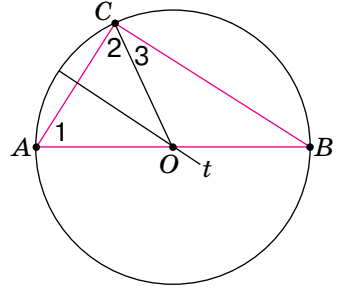
Теорема 25. Центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина його гіпотенузи.

Оскільки точка O лежить на серединному перпендикулярі до відрізка AC , то $OA = OC$ і $\angle 1 = \angle 2$.

Тоді $\angle B = 90^\circ - \angle 1$ і $\angle 3 = 90^\circ - \angle 2 = 90^\circ - \angle 1$, тобто $\angle B = \angle 3$ і $OB = OC$.

$OA = OC = OB$, тобто точка O — середина гіпотенузи AB , рівновіддалена від усіх вершин трикутника. Отже, коло із центром O і радіусом OA проходить через усі вершини даного трикутника.

Доведення. Нехай ABC — довільний трикутник із прямим кутом C , t — серединний перпендикуляр катета AC і t перетинає гіпотенузу AB в точці O (мал. 20.4).



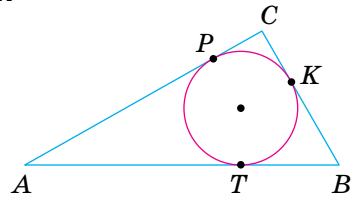
Мал. 20.4

Наслідок 1. Діаметр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, дорівнює його гіпотенузі.

Наслідок 2. У прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.

Вписане коло

Коло називають *вписаним у трикутник*, якщо воно дотикається до всіх сторін трикутника (мал. 20.5). Центр кола, вписаного в трикутник, лежить у внутрішній області цього трикутника.



Мал. 20.5

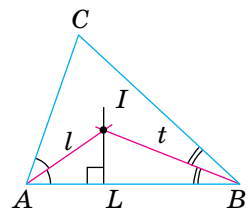
Теорема 26. У кожний трикутник можна вписати лише одне коло. Його центром є точка перетину двох бісектрис трикутника.

Доведення. Нехай ABC — довільний трикутник. Визначимо точку, рівновіддалену від усіх його сторін (мал. 20.6). Геометричне місце точок, які лежать

всередині кута A і рівновіддалені від сторін AB і AC , — бісектриса l кута A . Геометричне місце точок, які рівновіддалені від сторін AB і BC та лежать всередині кута B , — бісектриса t кута B .

Ці дві бісектриси обов'язково перетинаються (доведи це!).

Точка I , у якій перетинаються бісектриси l і t , рівновіддалена від усіх трьох сторін даного



Мал. 20.6

трикутника. Отже, точка I — центр кола, вписаного в трикутник ABC .

Наслідок. У кожному трикутнику всі три бісектриси перетинаються в одній точці.

Із доведеної теореми випливає спосіб побудови кола, вписаного в трикутник. Щоб у даний трикутник вписати коло, досить:

1) провести дві його бісектриси;

2) із точки їх перетину I опустити перпендикуляр IL на довільну сторону трикутника;

3) із центра I описати коло радіуса IL . Воно дотикатиметься до кожної сторони трикутника, а отже, буде вписаним у даний трикутник.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Для розв'язування задач корисно знати й таку властивість прямокутного трикутника, вписаного в коло.

Теорема 26. Із будь-якої точки кола його діаметр, що не виходить з цієї точки, видно під прямим кутом.

Доведення. Нехай AB — довільний діаметр кола із центром O , а C — довільна точка кола, відмінна від A і B (мал. 20.7).

Покажемо, що $\angle ACB = 90^\circ$.

Оскільки $OA = OB = OC$, то $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 3 = \angle 4$.

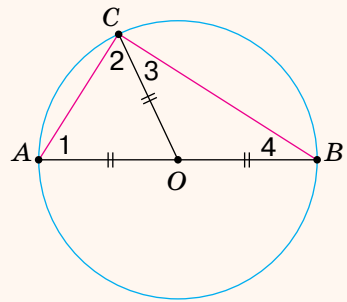
Тоді $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$, звідси

$$\angle C = \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ : 2 = 90^\circ.$$

Іноді говорять:

Геометричним місцем точок площини, з яких відрізок AB видно під прямим кутом, є коло діаметра AB .

Насправді, цьому ГМТ точки A і B не належать. Докладніше про це дізнаєшся у старших класах.



Мал. 20.7

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Яке коло називають описаним навколо трикутника?
2. Яке коло називають вписаним у трикутник?
3. Чи навколо кожного трикутника можна описати коло?
4. Чи в кожний трикутник можна вписати коло?
5. Де лежить центр кола, вписаного в трикутник?
6. Де лежить центр кола, описаного навколо трикутника? А навколо прямокутного трикутника?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

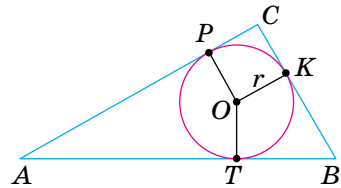
1. Знайди радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника з гіпотенузою 6 см.

- Діаметр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є його гіпотенузою. Радіус цього кола вдвічі менший, тобто дорівнює 3 см.

2. Доведи, що діаметр кола, вписаного в прямокутний трикутник з катетами a і b та гіпотенузою c , дорівнює $a + b - c$.

- Нехай у трикутнику ABC кут C — прямий, а K, P, T — точки дотику вписаного в трикутник кола (мал. 20.8).

Оскільки $AP = AT$ і $BK = BT$, то $AC + BC - AB = PC + CK = 2r$, або $2r = a + b - c$.



Мал. 20.8

ВИКОНАЄМО УСНО

772. Скільки спільних точок можуть мати трикутник і коло?
773. Скільки спільних точок мають трикутник й описане навколо нього коло?
774. Установи відповідність між умовами (1–2) та (А–Г).

1 Центр кола, описаного навколо трикутника, — це точка перетину...	А висот трикутника
2 Центр кола, вписаного в трикутник, — це точка перетину...	Б бісектрис трикутника
	В медіан трикутника
	Г серединних перпендикулярів до сторін трикутника

775. Склади алгоритм, як навколо трикутника описати коло.

776. Скільки різних кіл можна провести через:

а) одну точку; б) дві точки?

777. Скільки кіл можна провести через три різні точки?

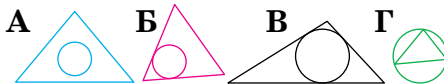
А одне Б жодного В безліч Г одне або жодного



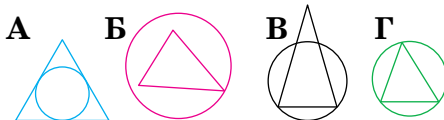
778. Точка A лежить на колі з діаметром MK . Знайди міру кута MAK .

А 60° Б 90° В 120° Г не можна встановити

779. На якому з малюнків зображено коло, вписане в трикутник?



780. На якому з малюнків зображено коло, описане навколо трикутника?



781. Чи можна в коло діаметра 1 м вписати трикутник із периметром 8 м? А трикутник із периметром 8 см?

782. Що буде намальовано в середовищі Python за частиною коду? Що означає число 50?

```
1 import turtle
2 turtle.circle(50)
```

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

783. Накресли довільний гострокутний трикутник і опиши навколо нього коло.

784. Накресли довільний тупокутний трикутник і опиши навколо нього коло.

785. Накресли довільний гострокутний трикутник і впиши у нього коло.

786. Накресли довільний тупокутний трикутник і впиши у нього коло.

787. Гра. Один / одна з вас буде довільний трикутник, а інший / інша вписує в нього коло. Потім поміняйтеся ролями.

788. Накресли прямокутний трикутник й опиши навколо нього коло. Виконай вимірювання й обчислення і порівняй довжину кола та периметр вписаного в нього трикутника.

789. Доведи, що в рівносторонньому трикутнику центри вписаного й описаного кіл збігаються.

790. У трикутнику центри вписаного й описаного кіл збігаються. Доведи, що цей трикутник рівносторонній.

791. Центр кола, описаного навколо трикутника, належить одній із його бісектрис. Доведи, що цей трикутник рівнобедрений.



792. Центр кола, вписаного в трикутник, належить одній із його висот. Доведи, що цей трикутник рівнобедрений.

793. Чи можуть дотикатися два кола: вписане в трикутник й описане навколо того самого трикутника?

794. Установіть відповідність між трикутниками, заданими умовами (1–3) та розміщенням центра кола, описаного навколо цього трикутника (А–Д).

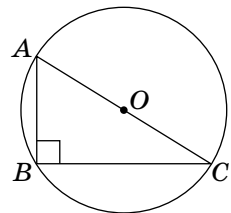


1 гострокутний трикутник	А на стороні трикутника
2 прямокутний трикутник	Б у внутрішній області трикутника
3 тупокутний трикутник	В у вершині трикутника
	Г поза трикутником
	Д не можна встановити

795. Трикутник зі сторонами 6 см, 8 см і 10 см — прямокутний. Чому дорівнює радіус описаного навколо нього кола? А вписаного?

796. У трикутнику ABC $\angle A = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$. Знайди радіус описаного навколо нього кола, якщо $BC = 6$ см.

797. Знайди радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, якщо медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює 7 см. Доповни малюнок 20.9 та розв'яжи задачу.



Мал. 20.9

798. Радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника дорівнює 12 см. Знайди довжину медіани, проведеної до гіпотенузи.

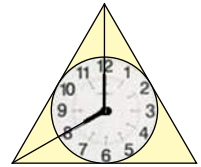
799. Доведи, що одна з медіан (яка?) розбиває прямокутний трикутник на два рівнобедрені трикутники.

800. Будь-який трикутник, сторони якого пропорційні числам 3, 4 і 5, — прямокутний. Знайди радіус і довжину кола, вписаного в трикутник зі сторонами 15 м, 20 м і 25 м й описаного навколо нього.

801. Будь-який трикутник, сторони якого пропорційні числам 3, 4 і 5, — прямокутний. Знайди радіус і довжину кола, вписаного в трикутник зі сторонами 15 м, 12 м і 9 м й описаного навколо нього.

802. Трикутник зі сторонами 26 см, 24 см і 10 см — прямокутний. Знайди радіус і площу круга: а) вписаного в цей трикутник; б) описаного навколо цього трикутника.

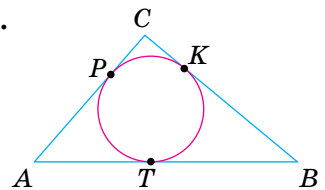
803. На колі з діаметром AB взято точку M так, що кут MBA дорівнює 30° . Знайди радіус кола, якщо $AM = 15$ см.
804. On a circle of diameter AB , a point P is chosen so that the measure of the angle PAB is 30° . Find the radius of the circle if $PB = 21$ cm.
805. Точка дотику кола, вписаного в трикутник, ділить одну з його сторін на відрізки завдовжки 6 см і 9 см. Знайди сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 46 см.
806. Точка дотику кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону у відношенні 3 : 2, починаючи від вершини трикутника. Знайди сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 28 см.
807. Навколо рівностороннього трикутника описано коло. Під яким кутом із центра цього кола видно сторону трикутника?
808. У рівносторонній трикутник вписано коло. Під яким кутом із центра цього кола видно сторону трикутника (мал. 20.10)?



Мал. 20.10

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

809. Центр кола O , вписаного в рівносторонній трикутник ABC , сполучено відрізками з вершинами трикутника. Доведи, що трикутники OAB , OBC і OCA дорівнюють один одному. Знайди кути цих трикутників.
810. Центр кола O , описаного навколо рівностороннього трикутника ABC , сполучено відрізками з вершинами трикутника. Доведи, що трикутники OAB , OBC і OCA дорівнюють один одному. Знайди кути цих трикутників.
811. Одне коло вписане в рівносторонній трикутник, друге — описане навколо того самого трикутника. Доведи, що:
- 1) центри цих кіл збігаються;
 - 2) радіуси цих кіл відносяться як 1 : 2.
812. Вписане в трикутник ABC коло дотикається до його сторін у точках K , P і T (мал. 20.11). Доведи, що:
- а) $AP + CK + BT = AT + BK + CP$;
 - б) $BK = 0,5(AB + BC - AC)$.



Мал. 20.11



813. У прямокутний трикутник із гіпотенузою 13 см вписано коло радіуса 2 см. Знайди периметр трикутника.
814. Знайдіть периметр прямокутного трикутника, описаного навколо кола радіуса r , якщо його гіпотенуза дорівнює c .
815. Вписане в прямокутний трикутник ABC коло дотикається до катетів AC і CB в точках P і K . Знайди довжину ламаної $KBAK$, якщо $AB = 17$ см.
816. Сторони трикутника дорівнюють 10 см, 12 см і 15 см. Знайди відрізки, на які точка дотику вписаного кола ділить найбільшу сторону трикутника.
817. Сторони трикутника дорівнюють 6 см, 8 см і 12 см. Знайди відрізки, на які точка дотику вписаного кола ділить найменшу сторону трикутника.
818. На сторонах кута B , що дорівнює 120° , відклали відрізки $BA = BC = 4$ см і провели коло через точки A , B і C . Знайди радіус цього кола.
819. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 5 см, а кут при основі — 30° . Знайди радіус описаного кола.
820. Чому два різні кола не можуть мати три спільні точки?

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

821. Виріж трикутник. За допомогою перегинання встанови центр вписаного кола.
- 822*. Побудуй зовні вписане коло трикутника — коло, яке дотикається до однієї зі сторін трикутника (зовні) і до продовження двох інших його сторін. Де лежить центр такого кола? Скільки зовні вписаних кіл можна побудувати для кожного трикутника? Чи належать вершини заданого трикутника відрізкам, що сполучають центри зовні вписаних кіл? Яку фігуру утворюють відрізки, що сполучають усі центри зовні вписаних кіл? Чи може цією фігурою бути тупокутний трикутник? А прямокутний?



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

823. Знайди площу прямокутника, периметр якого дорівнює 200 м, а одна сторона в півтора раза більша за іншу.



824. $\triangle ABC = \triangle MNK$. Сторони трикутника ABC відносяться як $2 : 3 : 4$. Знайди сторони трикутника MNK , якщо його периметр дорівнює 45 см.
825. Сторони трикутника пропорційні числам 7, 5 і 8. Знайди периметр трикутника, якщо:
- сума найменшої і найбільшої його сторін дорівнює 39 см;
 - різниця найбільшої і найменшої його сторін дорівнює 9 см;
 - найменша його сторона на 12 см менша від півпериметра;
 - найбільша його сторона менша від суми двох інших сторін на 8 см.

§ 21 ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ

Користуючись лінійкою й циркулем, можна виконувати багато *геометричних побудов*, тобто креслити геометричні фігури. За допомогою лінійки (без поділок) можна побудувати: довільну пряму, промінь, відрізок, пряму, що проходить через задані одну чи дві точки. За допомогою циркуля можна побудувати коло чи дугу заданого радіуса із даного центра, відкласти від початку даного променя відрізок даної довжини.

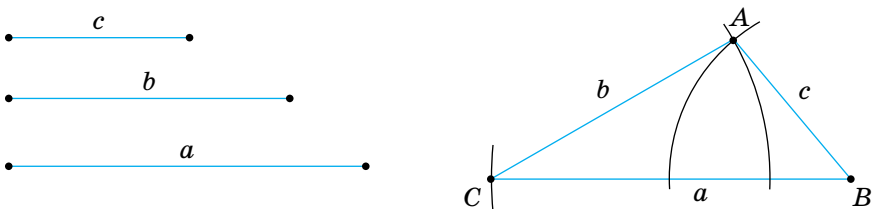
КЛЮЧОВІ СЛОВА

геометричні побудови —
geometric constructions

Розглянемо спочатку, як розв'язувати найпростіші задачі на побудову.

Задача 1. Побудуй трикутник із даними сторонами.

Розв'язання. Нехай дано три відрізки: a , b і c (мал. 21.1). Треба побудувати трикутник, сторони якого дорівнювали б цим відрізкам. За допомогою лінійки проводимо довільну пряму, позначаємо



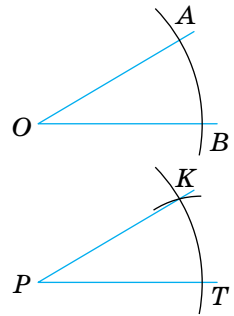
Мал. 21.1

на ній довільну точку B і відкладаємо циркулем на цій самій прямій відрізок $BC = a$. Розхилом циркуля, що дорівнює c , описуємо дугу кола із центром B . З того самого боку від прямої CB описуємо дугу кола радіуса b із центром C . Точку перетину A цих дуг сполучаємо відрізками з точками C і B . Трикутник ABC — той, який треба було побудувати, бо його сторони BC , AC і AB дорівнюють даним відрізкам.

Зверни увагу! Якщо побудовані дуги не перетинаються, трикутник побудувати не можна. Це буває тоді, коли один із відрізків більший за суму двох інших або дорівнює цій сумі.

Задача 2. Побудуй кут, що дорівнює даному куту.

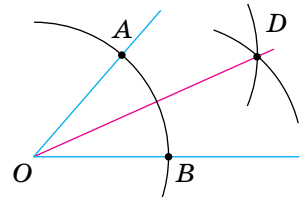
Розв'язання. Нехай дано кут AOB і потрібно побудувати кут KPT , який дорівнює куту AOB (мал. 21.2). Будуємо промінь PT і дуги рівних радіусів із центрами O і P . Нехай одна із цих дуг перетинає сторони кута AOB в точках A і B , а друга — промінь PT в точці T . Далі розхилом циркуля, який дорівнює AB , описуємо третю дугу із центром T . Якщо вона перетинає другу дугу в точці K , проводимо промінь PK . Кут KPT — той, який вимагалось побудувати. Адже трикутники KPT і AOB рівні (за трьома сторонами), тому $\angle KPT = \angle AOB$.



Мал. 21.2

Задача 3. Побудуй бісектрису даного кута.

Розв'язання. Нехай AOB (мал. 21.3) — даний кут. Довільним розхилом циркуля опишемо дугу із центром O . Нехай A і B — точки перетину цієї дуги з променями OA і OB . Із центрів A і B опишемо дуги такими самими радіусами. Якщо D — точка перетину цих дуг, то промінь OD — бісектриса кута AOB . Справді, $\triangle AOD = \triangle BOD$ за трьома сторонами. Тому $\angle AOD = \angle DOB$.



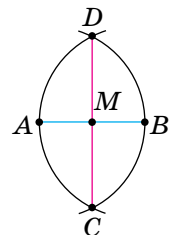
Мал. 21.3

Задача 4. Поділи даний відрізок навпіл.

Розв'язання. Нехай AB — даний відрізок (мал. 21.4). З точок A і B радіусом AB описуємо дуги. Вони перетнуться в деяких точках C і D .

Пряма CD точкою M ділить даний відрізок навпіл.

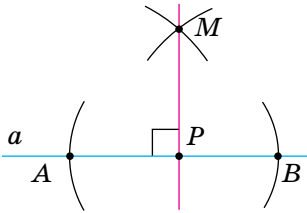
Справді, $\triangle ACD = \triangle BCD$ за трьома сторонами, тому $\angle ACM = \angle BCM$. За першою ознакою рівності трикутників $\triangle ACM = \triangle BCM$. Отже, $AM = BM$.



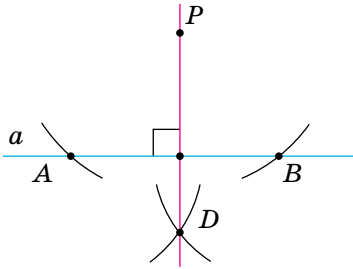
Мал. 21.4

Задача 5. Через дану точку P проведи пряму, перпендикулярну до даної прямої a .

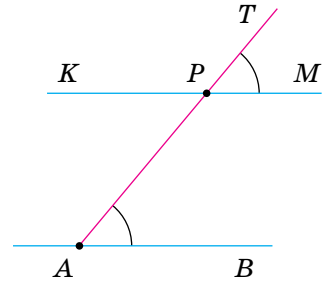
Розв'язання. Залежно від того, лежить чи не лежить точка P на прямій a , задачу можна розв'язувати, як показано на малюнках 21.5 і 21.6. Опиши й обґрунтуй ці побудови самостійно.



Мал. 21.5



Мал. 21.6



Мал. 21.7

Задача 6. Через точку P , що не лежить на прямій AB , проведи пряму, паралельну прямій AB .

Розв'язання. Через точку P і довільну точку A прямої AB проводимо пряму AT (мал. 21.7).

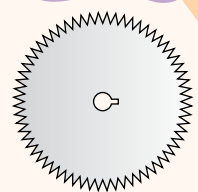
Будуємо кут TPM , що дорівнює куту PAB , так, щоб ці кути стали відповідними при прямих PM , AB і січній AP . Побудована таким способом пряма PM задовольняє задачу, бо вона проходить через точку P і паралельна прямій AB , оскільки $\angle TPM = \angle PAB$.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Геометричними побудовами часто доводиться займатися багатьом людям. Ще в доісторичні часи майстри, які робили колеса до колісниць, уміли ділити коло на кілька рівних частин. Тепер виконувати такі побудови доводиться фахівцям, які проектують чи виготовляють шестерні, дискові пилки (мал. 21.8), турбіни та різні роторні механізми. Як би ви поділили коло, наприклад, на 5, 6 чи 7 рівних частин?

Основні креслярські інструменти — лінійка і циркуль — майстровим людям були відомі ще кілька тисячоліть тому. Слово *лінійка* походить від слова *лінія*, яке латинською мовою спочатку означало *лляна нитка*. І слово *циркуль* — латинського походження. Спочатку слово *циркулює* означало коло, круг, обвід.

У Стародавній Греції лінійку й циркуль визнавали єдиними приладами геометричних побудов. Задачу на побудову вважали розв'язаною, якщо в ній усі побудови виконувалися тільки за допомогою лінійки та циркуля. Тепер фахівці, виконуючи ті чи інші побудови, використовують косинець, транспортер, рейсмус, рейсшину та інші креслярські засоби.



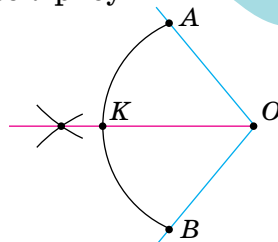
Мал. 21.8

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Поясни, як побудувати трикутник за трьома даними сторонами.
2. Як побудувати кут, що дорівнює даному?
3. Як побудувати бісектрису даного кута?
4. Як поділити даний відрізок навпіл?
5. Як через дану точку провести пряму, перпендикулярну до даної прямої?
6. Як через дану точку провести пряму, паралельну даній прямій?

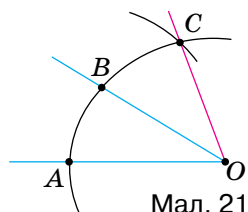
ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1. Поділи дану дугу кола на дві рівні частини.
 - Нехай дано дугу AB кола із центром O (мал. 21.9). Побудуємо кут AOB і проведемо його бісектрису OK . Трикутники AOK і BOK рівні, тому й дуги AK і BK дорівнюють одна одній.



Мал. 21.9

2. Побудуй кут, більший від даного удвічі.
 - Нехай AOB — даний кут (мал. 21.10). Опишемо дугу кола із центром O . Нехай вона перетне сторони даного кута в точках A і B . З точки B , як із центра, зробимо засічку $BC = BA$ і проведемо промінь OC . Кут AOC удвічі більший за $\angle AOB$, бо $\angle AOB = \angle BOC$.



Мал. 21.10

ВИКОНАЄМО УСНО

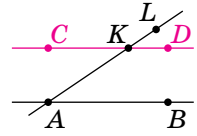
826. Чи правильне твердження: «Щоб поділити кут на дві рівні частини, треба провести його бісектрису»?

827. Озвуч українською кроки побудови, що здійснюються на кожному етапі за лінками:

- a) <https://mathopenref.com/constbisectline.html>
- б) <https://mathopenref.com/constbisectangle.html>
- в) <https://mathopenref.com/constcopytriangle.html>
- г) <https://mathopenref.com/constcopyangle.html>



828. Склади алгоритм побудови прямої, що паралельна заданій прямій AB і проходить через точку K (мал. 21.11).



Мал. 21.11

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



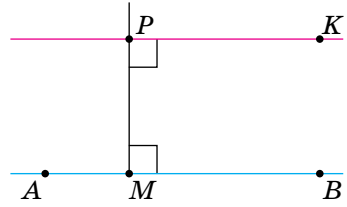
829. Побудуй прямий кут.
830. Побудуй кут, міра якого:
а) 45° ; б) $22,5^\circ$; в) 60° ; г) 30° .
831. Поділи даний кут на 4 рівні частини.
832. Побудуй кут, утричі більший за даний гострий кут.
833. Поділи даний відрізок на 4 рівні частини.
834. Побудуй відрізок, який у два рази більший за даний.
835. Побудуй відрізок, у 3 рази більший за даний відрізок.
836. Поділи дану дугу кола на чотири рівні частини.
837. Побудуй трикутник, рівний даному трикутнику.
838. Побудуй рівносторонній трикутник за даною його стороною.
839. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою й бічною стороною.
840. Побудуй прямокутний трикутник за двома катетами.
841. Побудуй трикутник за двома сторонами й кутом між ними.
842. Побудуй рівнобедрений трикутник за бічною стороною й кутом при вершині.
843. Побудуй трикутник за стороною і прилеглими кутами.
844. Побудуй рівнобедрений трикутник за основою й кутом при основі.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

845. Побудуй трикутник зі сторонами 3 см, 4 см і 5 см.
846. Build a triangle with sides 6 cm, 8 cm, and 10 cm.
847. Побудуй трикутник і проведи його медіани.
848. Дано трикутник. Побудуй його бісектриси.
849. Дано трикутник. Побудуй його висоти. Розглянь усі можливі варіанти.



850. Щоб через дану точку P провести пряму, паралельну AB , можна спочатку провести $PM \perp AB$, а потім $PK \perp PM$ (мал. 21.12). Обґрунтуйте цю побудову.



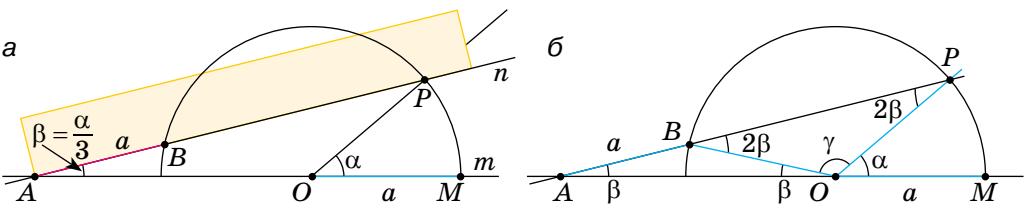
Мал. 21.12

851. Через дану точку проведи пряму, яка перетинає дану пряму під даним кутом.

852. Як поділити навпіл відрізок, довжина якого в кілька разів більша за найбільший розхил циркуля?

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

853. *Історична задача (Стародавня Греція, V ст. до н. е.).* За допомогою циркуля й лінійки поділити даний довільний кут на три рівні частини. Архімед розв'язував цю задачу за допомогою «вставки». Нехай α — даний кут. Опишемо з вершини кута коло радіуса a , де a — відстань між позначками на лінійці (мал. 21.13, a). Через точку P проведемо пряму так, щоб довжина відрізка між точками B і A дорівнювала a . Одержимо $\angle OAB = \beta$. Скориставшись малюнком 21.13, б, доведи, що за цих умов $\alpha = 3\beta$.



Мал. 21.13

854. Побудуй квадрат. Поділи його кут на три рівні частини двома способами: а) методом Архімеда за допомогою «вставки»; б) за допомогою циркуля й лінійки без поділок.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

855. Доведи, що кожна сторона квадрата $ABCD$ з прямою AC утворює кути по 45° .

856. Визнач вид трикутника, у якому сума двох кутів менша від третього.

857. Під яким кутом перетинаються дві медіани рівностороннього трикутника?



§ 22 ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ

З геометричними побудовами мають справу різні фахівці. Геометричні побудови виконують креслярі, архітектори, конструктори, топографи, геодезисти, штурмани. Геометричні фігури будують також: слюсар — на жерсті, столяр — на дошці, кравець — на тканині, садівник — на землі.

У задачі на побудову вимагається побудувати геометричну фігуру, яка повинна задовольняти певні умови. У геометрії побудови виконують найчастіше за допомогою лінійки й циркуля. Довімося, що коли в задачі не говориться, якими інструментами треба виконувати побудови, маються на увазі тільки лінійка (без поділок) і циркуль.

Складніші задачі на побудову часто розв'язують *методом геометричних місць*. Нехай, наприклад, у задачі треба знайти точку X , що задовольняє дві умови. Якщо першу умову задовольняють точки фігури K , а другу — точки фігури P , то точка X має належати кожній із цих фігур. Тобто X — точка перетину фігур K і P .

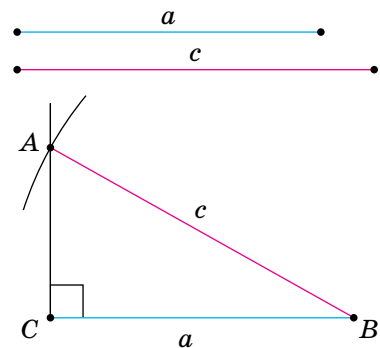
Задача 1. Побудуй прямокутний трикутник за даним катетом a і гіпотенузою c (мал. 22.1).

Розв'язання. Перший спосіб. Будуємо прямий кут ACB . На його стороні відкладаємо відрізок $CB = a$. Точки C і B — дві вершини трикутника, який треба побудувати. Третя вершина має лежати, поперше, на промені CA , по-друге, на відстані c від точки B , тобто на колі радіуса c із центром B . Якщо це коло перетинає промінь CA в точці A , то трикутник ABC — той, який треба було побудувати. Адже його кут C — прямий, $BC = a$, $BA = c$.

Другий спосіб (мал. 22.2). Відкладаємо відрізок $AB = c$ і проводимо коло діаметра AB — ГМТ, із яких AB видно під прямим

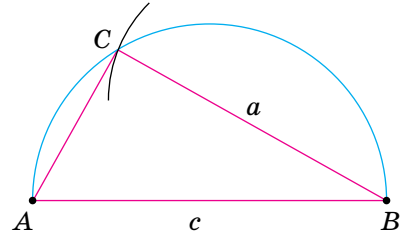
КЛЮЧОВІ СЛОВА

задачі на побудову —
construction problems



Мал. 22.1

кутом. Далі будуємо коло радіуса a із центром B — ГМТ, віддалених від точки B на відстань a . Якщо два ГМТ перетинаються в точці C , то трикутник ABC — той, який вимагалось побудувати. Два розглянуті кола можуть перетинатися ще в одній точці — C_1 . Але трикутники ABC і ABC_1 рівні, тому вважаються одним розв'язком.



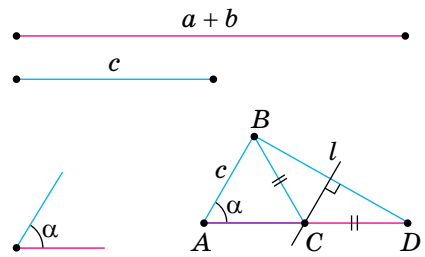
Мал. 22.2

Складові частини розв'язання задачі на побудову — *аналіз, побудова, доведення і дослідження*. В аналізі шукається спосіб розв'язування задачі, у побудові виконується побудова, у доведенні обґрунтовується правильність виконаної побудови, у дослідженні з'ясовується, скільки розв'язків має задача.

Задача 2. Побудуй трикутник за даною стороною, прилеглим до неї кутом і сумою двох інших сторін (мал. 22.3).

Розв'язання.

Аналіз. Припустимо, що потрібний трикутник ABC побудовано. Його сторона $AB = c$ і $\angle A = \alpha$ — дані. Дано також відрізок, який дорівнює сумі сторін a і b . За даними відрізками c і $a + b$ та кутом A між ними можна побудувати $\triangle ABD$. Вершиною C шуканого трикутника буде така точка відрізка AD , для якої $CD = CB$. Отже, точка C повинна лежати на серединному перпендикулярі відрізка BD .



Мал. 22.3

Побудова. За двома даними відрізками і кутом між ними будемо $\triangle ABD$, після чого проводимо серединний перпендикуляр l до відрізка BD . Нехай пряма l перетинає відрізок AD в точці C . Проводимо відрізок CB . Трикутник ABC — той, який вимагалось побудувати.

Доведення. У трикутнику ABC $AB = c$ і $\angle A = \alpha$ за побудовою. $AC + CB = AC + CD = a + b$. Отже, $\triangle ABC$ задовольняє всі умови задачі.

Дослідження. Задача має розв'язок тільки за умови, що $a + b > c$.

Зверни увагу! Якщо задача нескладна і спосіб її розв'язування відомий, аналіз можна не описувати. А в розв'язанні не обов'язково виділяти аналіз, побудову, доведення й дослідження.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ



У математиці зазвичай мають справу із задачами: на обчислення, на доведення, на побудову, на перетворення й на дослідження. Геометричними задачами на побудову активно цікавилися античні геометри. Допускаючи тільки класичні побудови (які виконують лише лінійкою й циркулем), вони досліджували, які з побудов можна виконати, а які — ні. Зокрема, з'ясовували:

- 1) чи можна будь-який кут поділити на три рівні частини;
- 2) чи можна побудувати квадрат, площа якого дорівнювала б площі даного круга;
- 3) чи можна побудувати ребро такого куба, об'єм якого був би в 2 рази більший за об'єм даного куба.

Багато століть видатні геометри намагалися розв'язати ці задачі й не змогли. Ці три класичні задачі давнини дістали спеціальні назви: 1) трисекція кута, 2) квадратура круга, 3) подвоєння куба. Останню задачу називають ще делоською задачею, пов'язуючи її з давньогрецькою легендою, за якою оракул бога Аполлона погодився врятувати жителів острова Делос від чуми, якщо кубічний жертвник у делоському храмі замінять жертвником такої самої форми, але вдвічі більшого об'єму. І майже через 2000 років учені переконалися, що жодну із цих трьох задач за допомогою лише лінійки й циркуля розв'язати не можна.

Тепер фахівці, яким доводиться виконувати геометричні побудови, користуються не тільки лінійкою й циркулем. Багато побудов виконують на комп'ютері за допомогою спеціального програмного забезпечення.

З погляду класичних методів такі побудови наближені. Але для практичних потреб точність, яку забезпечують наближені методи, цілком достатня.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Якими інструментами найчастіше виконують побудови в геометрії?
2. Назви складові частини розв'язання задачі на побудову.
3. Що таке трисекція кута, квадратура круга, подвоєння куба?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

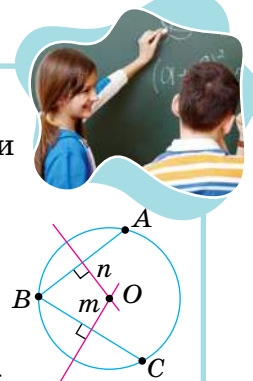
1. Знайди центр даного кола.

- Позначимо на даному колі три довільні точки A , B і C (мал. 22.4).

Проведемо хорди AB , BC і побудуємо їх серединні перпендикуляри n і m .

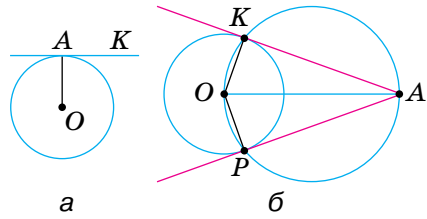
Точка O , у якій перетинаються прямі n і m , — центр даного кола. Адже $OA = OB = OC$.

Мал. 22.4



2. Через дану точку проведи дотичну до даного кола.

- Якщо точка A лежить на колі із центром O (мал. 22.5, а), проводимо промінь OA , а потім — пряму AK , перпендикулярну до OA . Пряма AK — дотична, яку треба було побудувати.



Мал. 22.5

Якщо точка A лежить поза даним колом із центром O (мал. 22.5, б), то на діаметрі OA описуємо коло. Воно перетнеться із даним колом у двох точках K і P . Прямі AK і AP — шукані дотичні, бо $AK \perp OK$ і $AP \perp OP$ (із точок K і P допоміжного кола його діаметр OA видно під прямими кутами AKO і APO). У цьому випадку задача має два розв'язки.

Якщо точка A лежить усередині кола, задача не має розв'язку, бо дотичну провести не можна.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



858. Побудуй рівнобедрений трикутник за основою і висотою, проведеною до основи.
859. Побудуй прямокутний трикутник:
- 1) за гіпотенузою й гострим кутом;
 - 2) за гіпотенузою й катетом;
 - 3) за катетом і прилеглим до нього гострим кутом;
 - 4) за катетом і протилежним кутом.
860. Побудуй рівнобедрений прямокутний трикутник:
- 1) за даним катетом;
 - 2) за гіпотенузою;
 - 3) за медіаною, проведеною до гіпотенузи.
861. Побудуй трикутник за двома сторонами й медіаною, проведеною до однієї з них.
862. Побудуй трикутник за двома сторонами й висотою, проведеною:
- 1) до однієї з них;
 - 2) до третьої сторони.
863. Знайдіть на даній прямій точку, яка лежить на даній відстані від іншої даної прямої.



- 864.** Знайди на даній прямій точку, яка лежить на однакових відстанях від двох даних точок.
- 865.** Побудуй коло, яке дотикається до сторін даного кута, причому до однієї з них — у даній точці.
- 866.** Побудуй прямокутний трикутник за катетом і радіусом описаного кола.
- 867.** Побудуй трикутник за двома сторонами й радіусом описаного кола.
- 868.** Побудуй трикутник за стороною, медіаною, проведеною до цієї сторони, і радіусом описаного кола.
- 869.** Побудуй рівнобедрений трикутник за радіусом описаного кола й основою.

ВИКОНАЄМО ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



870. Побудуй прямокутний трикутник за радіусом описаного кола й гострим кутом.

871. Дано паралельні прямі a , b і точку A між ними (мал. 22.6). Побудуй коло, що проходить через точку A і дотикається до прямих a і b .



872. Побудуй рівносторонній трикутник за радіусом описаного кола.

Мал. 22.6

873. Як побудувати спільну дотичну до двох кіл, радіуси яких однакові.

874. How do you construct the common tangent line of two circles whose radii are different?

875. Побудуй прямокутний трикутник за гіпотенузою й висотою, проведеною з вершини прямого кута.

876. Побудуй прямокутний трикутник за катетом і сумою двох інших сторін.

877. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і радіусом вписаного кола.

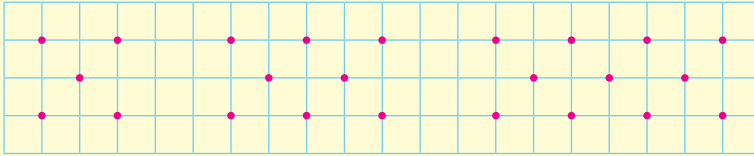


878. Побудуй рівнобедрений трикутник за основою й радіусом вписаного кола.

879. Побудуй геометричне місце точок, із яких даний відрізок a видно під кутом 90° .

880. Побудуй прямокутний трикутник за даними медіаною і висотою, проведеними до гіпотенузи.

881. Продовж послідовність (мал. 22.7). Запиши відповідну числову послідовність.



Мал. 22.7

ПРАКТИЧНЕ ЗАВДАННЯ

882. Покажи, як можна наближено поділити:

- а) коло на 7 рівних частин;
- б) довільний кут на 3 рівні частини;
- в) довільну дугу кола на 5 рівних частин.

883. Побудуй коло радіуса 5 см і впиши в нього рівносторонній трикутник ABC . За допомогою циркуля і лінійки поділи кожну з дуг AB , BC і AC навпіл точками K , L і M відповідно. З'єднай послідовно точки, щоб утворився шестикутник $AKBLCM$. Вимірйай його сторони й порівняй із радіусом кола.

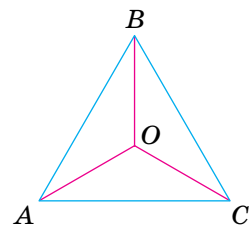


ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

884. З вершини B трикутника ABC проведено висоту BH і медіану BM . $AH = 3$ см, $AC = 10$ см. Знайди HM , якщо:

- а) $\angle A$ — гострий; б) $\angle A$ — тупий.

885. Точку, рівновіддалену від усіх вершин рівностороннього трикутника, сполучили з його вершинами (мал. 22.8). Доведи, що три утворені трикутники рівні. Чи буде правильним твердження задачі, якщо точка O лежить поза площиною трикутника?



Мал. 22.8

886. Радіуси двох кіл — 3 см і 5 см. Чи перетинаються кола, якщо відстань між їх центрами дорівнює:

- а) 1 см; б) 3 см; в) 8 см; г) 10 см?



ГЕОМЕТРІЯ НАВОКОЛО НАС



Поштова площа. м. Київ



Оглядове колесо на Подолі. м. Київ



Готель «Харків Палац»



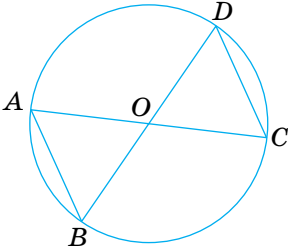
Храм Святих Ольги і Єлизавети. м. Львів

ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

А

1 AC, BD — діаметри.

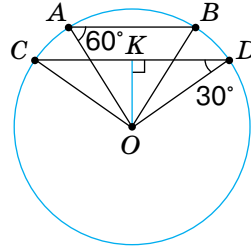
Довести: $AB \parallel CD$



Б

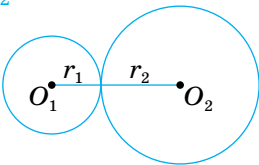
$AB = 8, \angle A = 60^\circ, \angle D = 30^\circ$.

OK



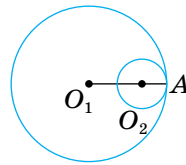
2 $r_1 : r_2 = 2 : 3, O_1O_2 = 15$.

r_1, r_2



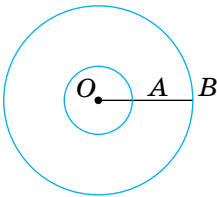
$O_1A = 3O_2A, O_1O_2 = 10$.

O_1A, O_2A



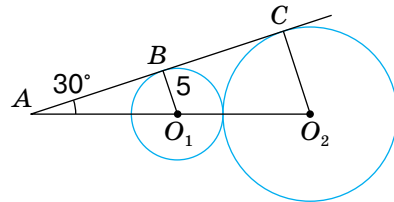
3 $OB = 2,5OA, AB = 18$.

AO, OB



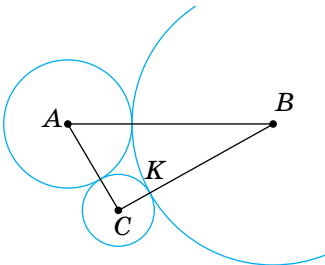
BC — спільна дотична.

CO_2



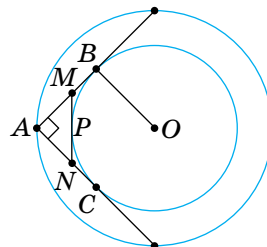
4 $CK = 2, KB = 7. P_{\triangle ABC} = 24$.

AB



B, P, C — точки дотику,
 $P_{\triangle AMN} = 12$.

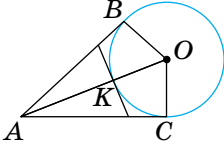
OB



А

5 $\angle A = 60^\circ$, $OB = 5$.

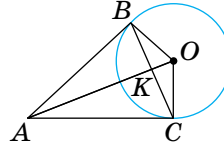
AK



Б

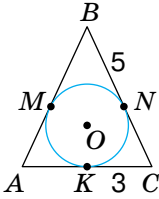
$\angle BAC = 60^\circ$, $OB = 6$.

AK

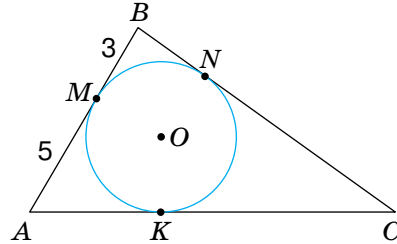


6 $AB = BC$, $BN = 5$, $KC = 3$. $MB = 3$, $AM = 5$, $P_{\triangle ABC} = 30$.

$P_{\triangle ABC}$

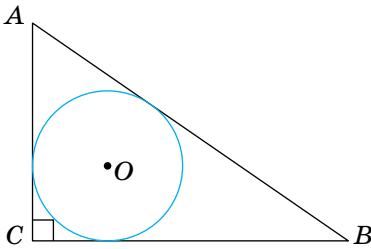


BC, AC

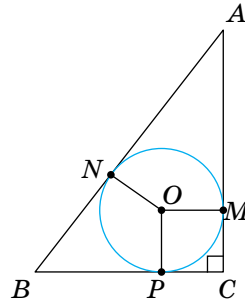


7 $AB = 25$, $AC = 7$, $BC = 24$. $AN : NB = 3 : 2$, $ON = 4$, $P_{\triangle ABC} = 48$.

r

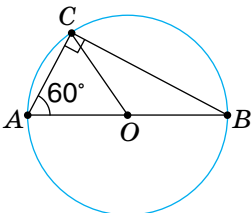


AB, BC, AC



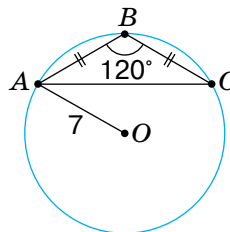
8 $AC = 10$.

AO



$OA = 7$, $\angle B = 120^\circ$, $AB = BC$.

AB



САМОСТІЙНА РОБОТА

ВАРІАНТ 1

1. Знайди радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника зі сторонами 10 см, 24 см і 26 см.
2. У колі із центром O проведено хорду AB і дотичну MK , яка дотикається до кола в точці A . Знайди $\angle AOB$, якщо $\angle MAB$ дорівнює 40° .
3. Коло, вписане у трикутник, дотикається до його сторін AB , BC й AC в точках M , H і K відповідно. Знайди периметр трикутника ABC , якщо $AK = 4$ см, $HC = 5$ см, $MB = 2$ см.
4. Побудуй трикутник зі сторонами 4 см, 6 см і 9 см.

ВАРІАНТ 2

1. Знайди радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника зі сторонами 10 см, 6 см і 8 см.
2. У колі із центром O проведено хорду AB і дотичну ME , яка дотикається до кола в точці A . Знайди $\angle BAM$, якщо $\angle AOB$ дорівнює 80° .
3. Коло, вписане у трикутник, дотикається до його сторін AB , BC й AC в точках M , P і T відповідно. Знайди периметр трикутника ABC , якщо $AT = 7$ см, $CT = 6$ см, $BP = 4$ см.
4. Побудуй трикутник зі сторонами 3 см, 5 см і 6 см.

ВАРІАНТ 3

1. Знайди радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника зі сторонами 9 см, 12 см і 15 см.
2. У колі із центром O проведено хорду AB і дотичну MK , яка дотикається до кола в точці B . Знайди $\angle AOB$, якщо $\angle MBA$ дорівнює 20° .
3. Коло, вписане у трикутник, дотикається до його сторін AB , BC й AC в точках P , N і F відповідно. Знайди периметр трикутника ABC , якщо $AP = 5$ см, $PB = 7$ см, $FC = 4$ см.
4. Побудуй трикутник зі сторонами 5 см, 7 см і 9 см.

ВАРІАНТ 4

1. Знайди радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника зі сторонами 15 см, 17 см і 8 см.
2. У колі із центром O проведено хорду AB і дотичну FE , яка дотикається до кола в точці B . Знайди $\angle FBA$, якщо $\angle AOB$ дорівнює 70° .
3. Коло, вписане у трикутник, дотикається до його сторін AB , BC й AC в точках D , F і E відповідно. Знайди периметр трикутника ABC , якщо $BF = 9$ см, $FC = 6$ см, $AE = 5$ см.
4. Побудуй трикутник зі сторонами 4 см, 5 см і 7 см.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

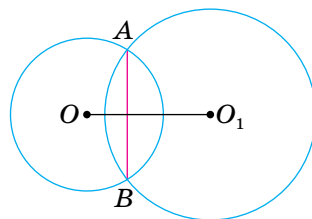
1	Діаметр кола дорівнює 6 см. Довжина кола дорівнює:	A 6л см B 3л см	B 9л см Г 36л см
2	Центр кола, вписаного в трикутник, є точкою перетину його:	A бісектрис B медіан B висот Г серединних перпендикулярів	
3	Центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, лежить на середині:	A медіани B катета B гіпотенузи Г бісектриси	
4	Сторони прямокутного трикутника дорівнюють 6 см, 8 см і 10 см. Знайди радіус вписаного кола.	A 5 см B 8 см	B 12 см Г 2 см
5	Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 12 см. Знайди радіус описаного кола.	A 10 см B 6 см	B 4 см Г 12 см
6	Із точки A до кола проведено дотичні AB й AC (B і C — точки дотику). Яке з тверджень правильне?	A $AB = AC$ B $AB > AC$	B $AB < AC$ Г $AB \neq AC$
7	Кола радіусів 3 см і 7 см дотикаються зовні. Знайди відстань між центрами цих кіл.	A 2 см B 4 см	B 10 см Г 5 см
8	Знайди ширину кільця, утвореного концентричними колами радіусів 3 см і 5 см.	A 8 см B 2 см	B 4 см Г 4л см
9	З точки A до кола із центром O проведено дотичну AB (B — точка дотику). Тоді $\angle ABO$:	A гострий B прямий B тупий Г розгорнутий	
10	Геометричним місцем точок площини, рівновіддалених від даної точки, є:	A коло B квадрат B круг Г куб	

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ТЕМАТИЧНОГО КОНТРОЛЮ

- Знайди найбільшу сторону прямокутного трикутника, якщо медіана, проведена з вершини прямого кута, дорівнює 3 см.
А 3 см **Б** 6 см **В** 9 см **Г** 1,5 см
- Навколо трикутника ABC з кутами $\angle A = 30^\circ$ і $\angle B = 60^\circ$ описано коло. Знайди його радіус, якщо $AB = 10$ см.
А 5 см **Б** 10 см **В** 20 см **Г** не можна встановити
- Геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців відрізка — це:
А точка **Б** коло **В** круг **Г** серединний перпендикуляр
- Коло із центром O дотикається до сторін кута A ($\angle A = 70^\circ$) у точках K і P . Установи відповідність між кутами, заданими умовами (1–4) та їх градусними мірами (А–Д).
1 $\angle PKA$ **А** 35°
2 $\angle OKA$ **Б** 55°
3 $\angle OPK$ **В** 60°
4 $\angle KOP$ **Г** 90°
Д 110°
- Два кола мають зовнішній дотик, а відстань між їх центрами дорівнює 16 см. Знайди радіуси цих кіл, якщо вони відносяться як 3 : 5.
- Побудуй трикутник ABC , у якому $AB = 4$ см, $AC = 6$ см, $\angle A = 70^\circ$.
- З точки A до кола із центром O проведено дотичні AM і AN (M і N — точки дотику). K — точка перетину відрізків MN і AO . Знайди AK і KO , якщо $OM = 8$ см і $\angle MON = 120^\circ$.
- У прямокутний трикутник із кутом 40° вписано коло, яке дотикається до сторін трикутника в точках M , P та E . Знайди кути трикутника MPE .

Додаткове завдання

- Доведи, що якщо два кола із центрами O і O_1 перетинаються в точках A і B , то $AB \perp OO_1$ (мал. 22.9).



Мал. 22.9

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 4

Коло — фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки.

Круг — частина площини, обмежена колом.

Пряму, яка має з колом тільки одну спільну точку й лежить у площині кола, називають *дотичною* до кола.

Хорда кола — відрізок, кінці якого належать даному колу. Найбільша хорда кола — його *діаметр*.

Діаметр кола, проведений через середину хорди, відмінної від діаметра, перпендикулярний до неї.

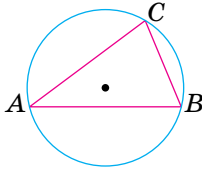
Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

У прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.

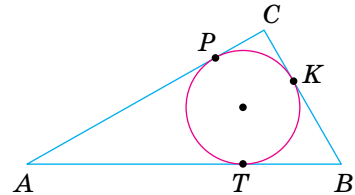
Точки дотику кола до сторін кута рівновіддалені від його вершини.

Коло, яке проходить через усі вершини трикутника, називають *описаним* навколо даного трикутника. Коло, яке дотикається до всіх сторін трикутника, — *вписане* в даний трикутник. Навколо будь-якого трикутника можна описати коло і в будь-який трикутник можна вписати коло.

Описане коло навколо трикутника



Вписане коло у трикутник



Центром кола, вписаного в трикутник, є точка перетину бісектрис трикутника.

Центр кола, описаного навколо трикутника, — точка перетину серединних перпендикулярів до сторін даного трикутника.

Серединний перпендикуляр до відрізка — пряма, яка перпендикулярна до даного відрізка і проходить через його середину.

Діаметр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, дорівнює його гіпотенузі.

Діаметр кола, вписаного в прямокутний трикутник із катетами a і b та гіпотенузою c , дорівнює $a + b - c$.

У прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.

Геометричне місце точок — це множина точок, які мають певну властивість.

Геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка, є серединний перпендикуляр цього відрізка. Йдеться про фігури однієї площини.

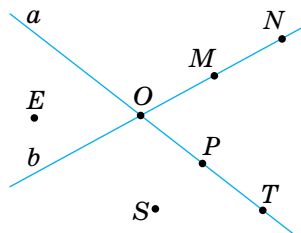
Геометричне місце точок кута, які лежать усередині кута й рівновіддалені від його сторін, — бісектриса цього кута.

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

До § 1

887. Користуючись малюнком 23.1, укажи:

- у якій точці перетинаються прямі a і b ;
- які точки належать прямій a і прямій b ;
- які точки не належать жодній із прямих a і b ;
- чи належить точка O прямій a , прямій b .



Мал. 23.1

888. Точки A, B і C лежать на прямій a . Точки M, N і K не лежать на прямій a . Зобрази це на малюнку.

889. $M \in a, N \notin a, K \notin a$, причому N і K лежать по різні боки від прямої a . Зобрази це на малюнку.

890. На прямій a дано точки A і B . Зобрази точки M і N так, щоб точка M лежала між точками A і B , а точка B — між точками M і N .

891. Зобрази на малюнку:

- три прямі, які перетинаються в одній точці;
 - три прямі, дві з яких не перетинаються;
 - три прямі, які попарно перетинаються у трьох точках.
- На скільки частин у кожному випадку прямі розбивають площину?

До § 2

892. M — внутрішня точка відрізка AB . Знайди довжину відрізка AB , якщо $BM = 5$ см і:

- відрізок AM на 2 см більший за відрізок BM ;
- відрізок AM у 3 рази більший за відрізок BM ;
- $AM : BM = 3 : 2$;
- $AB = 3AM$.

893. Точки A, B і C лежать на одній прямій, причому відрізок AB у 3 рази менший від відрізка BC . Знайди відрізки AB і BC , якщо $AC = 8$ см. Скільки розв'язків має задача?

894. Точки A, B, C і D лежать на одній прямій, причому $AB = 2$ см, $BC = 4$ см, $CD = 7$ см. Чому дорівнює відрізок AD ? Розглянь усі можливі варіанти.

895. Точка C — середина відрізка AB , точка D — середина відрізка AC . Знайди відношення $AD : AB$, $AD : BC$, $BC : DC$.
896. Точка C — середина відрізка AB , точка D — середина відрізка CB . Знайди довжину відрізка AB , якщо:
а) $CD = 2$ см; б) $BC - CD = 3$ см; в) $AC - DC = 4$ см.
897. M — внутрішня точка відрізка AB . K і P — середини відрізків AM і MB відповідно. Знайди довжину відрізка KP , якщо $AB = 10$ см.
898. Точка M — середина відрізка AB , а точка K ділить відрізок AM у відношенні $AK : KM = 1 : 2$. Знайди довжину відрізка MK , якщо:
а) $AB = 12$ см; б) $BM = 9$ см; в) $MB - AK = 10$ см.
899. На прямій a лежать точки A , B і C , причому $AB = 12$ см, $AC + CB = 15$ см. Знайди довжини відрізків AC і BC .
900. Точки A , B і C лежать на одній прямій. $BC = 6$ см, $AB + AC = 10$ см. Знайди довжини відрізків AB і AC .
901. $AB = 10$ см. Точка C — середина відрізка AB . На прямій AB знайди всі точки D , такі що: $DA + DB + DC = 12$ см. Зобрази ці точки на малюнку.
902. Точки A і B лежать по різні боки від прямої a , $M \in a$, $AM = 10$ см, $BM = 15$ см, $AB = 23$ см. Чи є точка M точкою перетину прямих AB й a ?
903. Є лінійка з поділками 0 , 3 см і 7 см. Як за допомогою цієї лінійки побудувати відрізок завдовжки 4 см; 11 см?

До § 3

904. OM — внутрішній промінь кута AOB . Знайди $\angle AOM$ і $\angle BOM$, якщо $\angle AOB = 80^\circ$ і:
а) $\angle AOM$ у 3 рази менший від $\angle MOB$;
б) $\angle BOM$ на 20° більший за $\angle AOM$;
в) $\angle AOM : \angle BOM = 1 : 3$;
г) $\angle BOM = \angle AOM$.
905. Прямий кут розбили двома внутрішніми променями на кути, один із яких на 20° більший за другий і на 20° менший від третього. Знайди ці кути.
906. OC — бісектриса кута AOB , OM — бісектриса кута AOC . Знайди $\angle AOB$, якщо $\angle MOC = 20^\circ$.

907. $\angle AOB = 80^\circ$, $\angle BOC = 20^\circ$, OM — бісектриса кута AOC . Знайди $\angle MOC$. Розглянь усі можливі варіанти.
908. OC — бісектриса кута AOB , OM — внутрішній промінь кута AOC . Знайди $\angle AOM$ і $\angle AOB$, якщо $\angle MOC = 60^\circ$ і $\angle AOM : \angle MOC = 1 : 3$.
909. Розгорнутий кут поділено променем на два кути так, що половина одного з них дорівнює третині іншого. Знайди ці кути.
910. OC — бісектриса кута AOB , M — внутрішня точка кута AOC . Доведи, що $\angle MOC$ дорівнює піврізниці кутів BOM і AOM .
911. OC — бісектриса кута AOB , OA — бісектриса кута MOC . Доведи, що $\angle MOC$ дорівнює півсумі кутів AOM і BOM .
912. Є косинець із кутом 50° . Як за його допомогою побудувати кут: 100° ; 80° ; 160° ?

До § 4

913. $\angle AOB$ і $\angle BOC$ — суміжні кути. Визнач $\angle AOB$, якщо:
- $\angle BOC = 50^\circ$;
 - $\angle BOC$ більший за $\angle AOB$ на 20° ;
 - $\angle BOC$ менший від $\angle AOB$ у 4 рази;
 - $\angle AOB : \angle BOC = 3 : 2$;
 - $\angle AOB - \angle BOC = 30^\circ$.
914. Прямі AB і CD перетинаються в точці O . Доведи, що бісектриси кутів BOC і AOC перпендикулярні.
915. Прямі AB і CD перетинаються в точці O , OE — бісектриса кута BOD , $\angle DOE = 55^\circ$. Знайди $\angle AOC$ і $\angle COB$.
916. $\angle AOB$ і $\angle BOC$ — суміжні кути, OE — бісектриса кута BOC , $\angle EOC = 45^\circ$. Доведи, що $OB \perp AC$.

До § 5

917. Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює $35^\circ 25'$. Обчисли інші кути.
918. Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, у 2 рази більший за інший. Визнач міри утворених кутів.
919. Прямі AB і CD перетинаються в точці O , причому $\angle AOC = 130^\circ$. Знайди кут між бісектрисами кутів:
- $\angle COB$ і $\angle BOD$;
 - $\angle COB$ і $\angle AOD$.

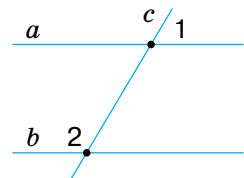
920. Доведи, що бісектриси двох вертикальних кутів лежать на одній прямій.
921. Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, у 9 разів менший від суми трьох інших кутів. Знайди ці кути.
922. Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, у 4 рази більший за суму двох суміжних із ним кутів. Знайди ці кути.

До § 6

923. За допомогою транспортира побудуй $\angle AOB$, який дорівнює 70° . M — внутрішня точка кута AOB . Через точку M проведи прямі, перпендикулярні до сторін кута.
924. За допомогою транспортира побудуй $\angle AOB$, який дорівнює 120° . M — внутрішня точка кута AOB . Через точку M проведи прямі, паралельні сторонам кута.
925. Площа квадрата $ABCD$ дорівнює 16 см^2 . Знайди відстань від точки A до сторін BC і CD .
926. Периметр прямокутника $ABCD$ дорівнює 20 см . AB менша від BC на 2 см . Побудуй даний прямокутник і знайди відстань від точки A до сторін BC і CD .
927. $\angle AOB$ і $\angle BOC$ — суміжні кути. Чи перпендикулярні промені OM і ON (M — внутрішня точка кута AOB , N — внутрішня точка кута BOC), якщо:
- $\angle BOC = 50^\circ$, ON — бісектриса кута BOC , $\angle AOM = 70^\circ$;
 - $\angle AOB : \angle BOC = 2 : 1$, $\angle MOB = \frac{1}{3} \angle AOB$, $\angle CON = 10^\circ$;
 - $\angle AOB - \angle BOC = 20^\circ$, $\angle MOB = \angle NOC = 40^\circ$;
 - $\angle BOC = \frac{2}{3} \angle AOB$, $\angle NOC : \angle NOB = 1 : 2$,
 $\angle AOM - \angle BOM = 24^\circ$?

До § 7

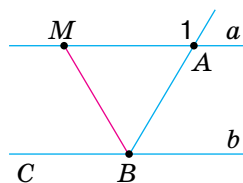
928. Чи паралельні прямі a і b (мал. 23.2), якщо:
- $\angle 1 = 40^\circ$, $\angle 2 = 140^\circ$;
 - $\angle 1$ у 3 рази менший від $\angle 2$, а $\angle 2$ на 90° більший за $\angle 1$;
 - $\angle 1 : \angle 2 = 1 : 4$, а $\angle 1$ на 108° менший від $\angle 2$?



Мал. 23.2

929. BM — бісектриса кута ABC (мал. 23.3). Чи паралельні прямі a і b , якщо:

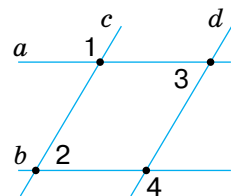
- а) $\angle 1 = 160^\circ$, $\angle ABM = 80^\circ$;
- б) $\angle CBM = 50^\circ$, $\angle 1 = 120^\circ$;
- в) $\angle ABM$ у 2 рази менший від $\angle 1$?



Мал. 23.3

930. Запиши пари паралельних прямих (мал. 23.4), якщо:

- а) $\angle 1 = 120^\circ$, $\angle 2 = 70^\circ$, $\angle 3 = 60^\circ$;
- б) $\angle 1 = 120^\circ$, $\angle 3 = 80^\circ$, $\angle 4 = 100^\circ$;
- в) $\angle 2 = 60^\circ$, $\angle 3 = 80^\circ$, $\angle 4 = 120^\circ$;
- г) $\angle 3 = \angle 2 = 60^\circ$, $\angle 4 = 120^\circ$.



Мал. 23.4

931. Доведи, що протилежні сторони квадрата лежать на паралельних прямих.

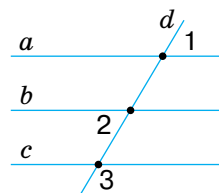
932. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle BAD$ у 2 рази менший від $\angle ABC$, а $\angle ABC$ на 60° більший за $\angle BAD$. Доведи, що $BC \parallel AD$.

933. У чотирикутнику $ABCD$ пряма BD ділить навпіл $\angle ABC$ і $\angle ADC$. Чи паралельні протилежні сторони чотирикутника, якщо:

- а) $\angle ABC = 140^\circ$, $\angle BDC = 70^\circ$;
- б) $\angle ABC = \angle ADC$?

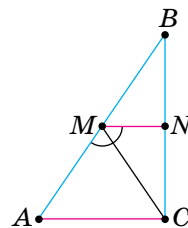
934. Запиши пари паралельних прямих (мал. 23.5), якщо:

- а) $\angle 1 = 70^\circ$, $\angle 2 = 80^\circ$, $\angle 3 = 110^\circ$;
- б) $\angle 1 = 60^\circ$, $\angle 2 = 60^\circ$, $\angle 3 = 100^\circ$;
- в) $\angle 1 = 50^\circ$, $\angle 2 = 80^\circ$, $\angle 3 = 100^\circ$;
- г) $\angle 1 = \angle 2 = 40^\circ$, $\angle 3 = 140^\circ$.



Мал. 23.5

935. На сторонах AB і BC трикутника ABC (мал. 23.6) узято точки M і N так, що MC — бісектриса кута AMN , $\angle ACM = 50^\circ$. Доведи, що $MN \parallel AC$, якщо $\angle BMN = 80^\circ$.

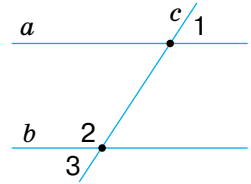


Мал. 23.6

До § 8

936. Прямі a і b — паралельні (мал. 23.7). Знайди $\angle 3$, якщо:

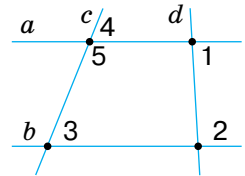
- $\angle 1 = 70^\circ$;
- $\angle 1$ на 30° менший від $\angle 2$;
- $\angle 1 : \angle 2 = 4 : 5$;
- $\angle 1$ становить $\frac{3}{5}\angle 2$.



Мал. 23.7

937. Розв'яжи задачі, скориставшись малюнком 23.8:

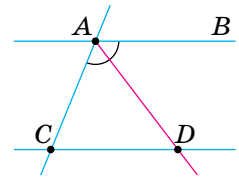
- $\angle 1 = 80^\circ$, $\angle 2 = 100^\circ$, $\angle 3 = 60^\circ$. Знайди $\angle 4$;
- $\angle 4 = \angle 3$, $\angle 2 = 2\angle 1$. Знайди $\angle 1$ і $\angle 2$;
- $\angle 1 = 55^\circ$, $\angle 2 = 125^\circ$, $\angle 5 : \angle 3 = 3 : 1$. Знайди $\angle 4$;
- $\angle 3 = 70^\circ$, $\angle 5 = 110^\circ$, $\angle 2 - \angle 1 = 70^\circ$. Знайди $\angle 1$ і $\angle 2$.



Мал. 23.8

938. $AB \parallel CD$, AD — бісектриса кута CAB (мал. 23.9). $\angle ADC = 50^\circ$. Знайди $\angle ACD$.

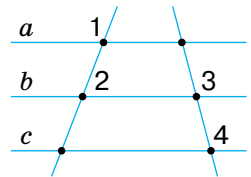
939. На сторонах AB і BC трикутника ABC взято точки M і N так, що $MN \parallel AC$ (мал. 23.6). $\angle ACM = 65^\circ$, MC — бісектриса кута AMN . Знайди $\angle BMN$ і $\angle BAC$.



Мал. 23.9

940. Чи паралельні прямі a і c (мал. 23.10), якщо:

- $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, $\angle 3 = \angle 4$;
- $\angle 2 = 50^\circ$, $\angle 3 = 100^\circ$, $\angle 4 = 100^\circ$,
 $\angle 1 - \angle 4 = 30^\circ$;
- $\angle 2 : \angle 3 = 1 : 2$, $\angle 3 - \angle 2 = 60^\circ$, $\angle 1 = \angle 3$,
 $\angle 4 = 130^\circ$?



Мал. 23.10

До § 9

941. Доведи, що кути, утворені при перетині двох перпендикулярних прямих, — рівні.

942. Доведи, що зовнішні різносторонні кути, утворені січною з паралельними прямими, — рівні.

943. Доведи, що зовнішні односторонні кути, утворені січною з паралельними прямими, в сумі дорівнюють 180° .

944. Доведи, що протилежні сторони прямокутника паралельні.

945. Доведи, що бісектриси зовнішніх різносторонніх кутів, утворених січною з паралельними прямими, — паралельні.
946. На прямій послідовно взято точки A , B , C і D . Точка M — середина відрізка BC , $AB = CD$. Доведи, що точка M — середина відрізка AD .
947. У чотирикутнику $ABCD$ $BC \parallel AD$. Доведи, що сума кутів A і B даного чотирикутника дорівнює сумі кутів C і D .
948. У трикутнику ABC $P \in AB$, $K \in BC$, $PK \parallel AC$. Доведи, що кути трикутника ABC дорівнюють кутам трикутника PBK .
949. Через точку на площині проведено 4 прями. Доведи, що принаймні один з утворених кутів менший від 47° .

До § 10

950. Знайди периметр трикутника, якщо одна з його сторін дорівнює 5 см, друга — на 3 см більша, а третя — на 3 см менша від суми перших двох сторін.
951. З вершини B трикутника ABC проведено висоту BK . Знайди довжину відрізка KC , якщо $AC = 10$ см, $AK = 3$ см. Розглянь випадки, коли:
а) $\angle A$ — гострий; б) $\angle A$ — тупий.
952. У $\triangle ABC$ проведено висоту BK . $AK : KC = 3 : 5$, $AC = 16$ см. Знайди довжину відрізків AK і KC , якщо:
а) $\angle A$ — гострий; б) $\angle A$ — тупий.
953. Висота й медіана прямокутного трикутника, проведені з вершини прямого кута, ділять кут на три рівні частини. Знайди кут між висотою і бісектрисою, проведеною із цієї вершини.
954. З вершини тупого кута B трикутника ABC проведено висоту, бісектрису й медіану. Кут між бісектрисою й висотою у 2 рази більший за кут між бісектрисою і медіаною. Знайди ці кути, якщо кут між висотою і медіаною дорівнює 60° .

До § 11

955. Знайди кути трикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3 і 7.
956. Знайди внутрішні кути трикутника, якщо один із них у 3 рази більший за інший, а зовнішній кут при третій вершині дорівнює 100° .
957. Знайди внутрішні кути трикутника, якщо його зовнішні кути пропорційні числам 3, 4 і 5.

958. Знайди гострі кути прямокутного трикутника, якщо кут між висотою і бісектрисою, проведеними з вершини прямого кута, дорівнює 20° .
959. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведено висоту CH . Доведи, що $\angle HCB = \angle CAB$.
960. Знайди кути трикутника ABC , якщо $\angle B = 100^\circ$, а бісектриса BK є одночасно й висотою.
961. Один із кутів трикутника на 20° більший за другий і на 50° менший від третього. Знайди кут між бісектрисами менших кутів цього трикутника.
962. У трикутнику ABC $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 30^\circ$. Знайди кут між:
а) бісектрисами, проведеними з вершин A і C ;
б) висотами, проведеними з вершин A і C .
963. Доведи, що кут між висотою і бісектрисою, проведеними з вершини B рівнобедреного трикутника ABC , дорівнює піврізниці кутів A і C .

До § 12

964. Точка M ділить відрізок AB на два відрізки завдовжки 5 см і 7 см. На які відрізки поділить точка N відрізок CD , якщо $CD = AB$ і $CN : ND = 1 : 5$?
965. $\angle AOB = \angle COD$, OM — внутрішній промінь кута COD , $\angle COM : \angle MOD = 2 : 3$, а $\angle MOD - \angle COM = 30^\circ$. Знайди $\angle AOB$.
966. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 50^\circ$. Знайди $\angle C_1$.
967. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. $AC = 7$ см, $AB - BC = 2$ см. Знайди сторони трикутника $A_1B_1C_1$, якщо його периметр дорівнює 21 см.
968. Чи рівні кути трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, якщо $\angle A = 70^\circ$, $\angle C = 80^\circ$, а кути трикутника $A_1B_1C_1$ пропорційні числам 7, 5 і 8?
969. Чи рівні квадрати $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, якщо периметр квадрата $ABCD$ дорівнює 20 см, а площа квадрата $A_1B_1C_1D_1$ дорівнює:
а) 36 см^2 ; б) 25 см^2 ?
970. Радіус одного з кіл — 5 см, а довжина іншого — 10π см. Чи рівні ці кола?
971. Довжина одного з кіл — 14π см, а площа круга, обмеженого другим колом, — $64\pi \text{ см}^2$. Чи рівні ці кола?

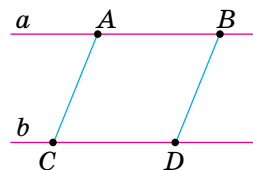
До § 13

972. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O . $AD \parallel CB$ і $AD = CB$. Доведи, що $\triangle AOD = \triangle COB$.

973. Рівні відрізки AB і CD перетинаються так, що $\angle ABC = \angle BCD$. Доведи, що $AC = BD$.

974. Дано відрізок AB й точки C і D так, що $\angle ABC = \angle BAD$ і $\angle CAB = \angle ABD$. Доведи, що $AC = BD$. Розглянь випадки, коли точки C і D лежать в одній півплощині відносно прямої AB і в різних півплощинах.

975. На паралельних прямих a і b взято точки A, B, C і D , як показано на малюнку 23.11. $AB = CD$. Доведи, що $AC \parallel BD$.



Мал. 23.11

976. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O . $AO = CO$, $BO = DO$.

Доведи, що $\angle OBD = \angle ODB$.

977. У колі із центром O проведено діаметри AB і CD . Доведи, що $AC = BD$ і $AC \parallel BD$.

978. На колі із центром O по один бік від діаметра AD взято точки B і C так, що $\angle AOB = \angle COD$. Доведи, що $BD = AC$.

979. CD — медіана трикутника ABC , C_1D_1 — медіана трикутника $A_1B_1C_1$. Доведи, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, якщо $\triangle ADC = \triangle A_1D_1C_1$.

980. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Доведи, що бісектриси, проведені з вершин B і B_1 , — рівні.

981. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Доведи, що висоти, проведені з вершин A і A_1 , — рівні.

982. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Доведи, що медіани, проведені з вершин B і B_1 , — рівні.

До § 14

983. Один із кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 110° . Обчисли інші кути трикутника.

984. Один із кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 80° . Обчисли інші кути трикутника. Скільки розв'язків має задача?

985. Одна зі сторін рівнобедреного трикутника на 3 см більша за іншу. Знайди сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 21 см. Розглянь всі можливі випадки.

986. На основі AC рівнобедреного трикутника ABC взято точки M і N так, що $AM = CN$. Доведи, що $\triangle MBN$ — рівнобедрений.

987. Один із кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 100° . Під яким кутом перетинаються:
а) рівні бісектриси трикутника;
б) продовження рівних висот трикутника?
988. У $\triangle ABC$ медіана AM перпендикулярна до бісектриси BK . Знайди BC , якщо $AB = 10$ см.
989. Доведи, що медіани, проведені до бічних сторін рівнобедреного трикутника, — рівні.
990. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O . $AO = CO$, $BO = DO$, $AO \neq BO$. K — точка перетину прямих AD і CB . Доведи, що $\triangle DKB$ — рівнобедрений. Розглянь випадки:
а) $AO < BO$; б) $AO > BO$.
991. Знайди кути рівнобедреного трикутника, якщо кут між бісектрисами, проведеними до бічних сторін, у 2 рази більший за кут при вершині.
992. Знайди кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при вершині дорівнює куту між бісектрисами, проведеними до основи і до бічної сторони.
993. У рівнобедреному трикутнику ABC кут при вершині B у 2 рази менший від кута при основі, AD — бісектриса, $D \in BC$. Доведи, що $\triangle CAD$ і $\triangle ADB$ — рівнобедрені.

До § 15

994. Дано відрізок AB і точки C і D поза прямою AB так, що $AC = BD$ і $AD = BC$. Доведи, що $\triangle ACB = \triangle BDA$. Розглянь різні випадки розміщення точок C і D .
995. Протилежні сторони чотирикутника $ABCD$ попарно рівні. Доведи, що $\triangle ABC = \triangle CDA$.
996. Протилежні сторони чотирикутника $ABCD$ попарно рівні. Доведи, що вони паралельні.
997. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O , $AO = CO$, $BO = DO$. Доведи, що $\triangle ADB = \triangle CBD$.
998. У середині рівнобедреного трикутника ABC з основою AC взято точку D так, що $AD = CD$. Доведи, що $\angle ADB = \angle CDB$.
999. Точки C і D лежать по різні боки від прямої AB , $AC = AD$ і $BC = BD$. Доведи, що AB — бісектриса кута CAD .
1000. Трикутники ACB і ADB мають спільну основу AB , $AC = AD$, $BC = BD$. Доведи, що $AB \perp CD$.

1001. Точки C і D лежать по один бік від прямої AB , $AC = BD$ і $AD = CB$. Доведи, що $\triangle AOB$ — рівнобедрений, де O — точка перетину відрізків AD і BC .
1002. Точки C і D лежать по один бік від прямої AB , $AC = BD$ і $AD = CB$. Доведи, що $\triangle АКВ$ — рівнобедрений, де K — точка перетину прямих AC і BD .

До § 16

1003. У трикутнику ABC $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 80^\circ$. Укажи найбільшу й найменшу сторони трикутника.
1004. У трикутнику ABC $AB : 2 = BC : 3 = AC : 7$. Укажи найбільший і найменший кути трикутника.
1005. Доведи, що найбільша сторона трикутника лежить проти найменшого зовнішнього кута.
1006. У трикутнику ABC на стороні AC взято точку K так, що $AB = KB$. Доведи, що $\angle A > \angle C$.
1007. Висота BK трикутника ABC ділить сторону AC у відношенні $AK : KC = 1 : 3$. Порівняй кути A і C .
1008. Дві сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 3 см і 6 см. Визнач третю сторону трикутника.
1009. Одна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 39 см, а периметр — 157 см. Знайди інші сторони трикутника.
1010. Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 10 см. Яким натуральним числом може виражатися довжина третьої сторони?
1011. Одна сторона трикутника дорівнює 0,6 см, друга — у 3 рази більша. Знайди периметр трикутника, якщо довжина третьої сторони — натуральне число.
1012. Дві сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 5 см і 2 см. Чи може довжина висоти, проведеної до основи, виражатися натуральним числом?

До § 17

1013. Знайди гострі кути прямокутного трикутника, якщо один із них у 4 рази більший за інший.
1014. Кути трикутника пропорційні числам 1, 2 і 3. Доведи, що трикутник — прямокутний.
1015. Один із кутів трикутника дорівнює сумі двох інших. Доведи, що трикутник — прямокутний.

1016. Один із катетів прямокутного трикутника більший за інший на 7 см і менший від гіпотенузи на 1 см. Знайди сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 30 см.
1017. Медіана трикутника дорівнює половині сторони, до якої її проведено. Доведи, що трикутник — прямокутний.
1018. Знайди менший катет прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 10 см, а один із кутів — 30° .
1019. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а один з кутів — 30° . Знайди відрізки, на які висота, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу.
1020. У трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, BP — бісектриса, $BP = 5$ см. Знайди AC .
1021. У трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $CK \perp AB$, $K \in AB$. Знайди відстань від точки K до сторони BC , якщо $AC = 8$ см.
1022. Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює 10 см. Знайди довжину висоти, проведеної з вершини прямого кута.
1023. Катети рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнюють по 10 см. CK — висота, проведена з вершини прямого кута. Знайди відстань від точки K до катетів.
1024. M , N , P і K — середини сторін квадрата $ABCD$. Доведи, що $MNPK$ — квадрат.

До § 18

1025. Хорда AB кола із центром O дорівнює радіусу цього кола. Знайди $\angle AOB$.
1026. Знайди відстань від центра O кола радіуса r до хорди AB , якщо $\angle AOB = 120^\circ$.
1027. Діаметри AB і CD кола із центром O — перпендикулярні. Доведи, що $\angle ACB = 90^\circ$.
1028. У колі із центром O проведено хорди AB і CD . $\angle AOB = 90^\circ$, $\angle COD = 120^\circ$. Яка з хорд лежить далі від центра кола й чому?
1029. Хорди AB і CD — паралельні й лежать на однаковій відстані від центра кола. Доведи, що $AB = CD$.
1030. Центр кола, описаного навколо трикутника, належить його висоті. Доведи, що трикутник рівнобедрений.
1031. Кут між двома радіусами кола дорівнює 130° . Знайди кут між дотичними, проведеними через кінці цих радіусів.

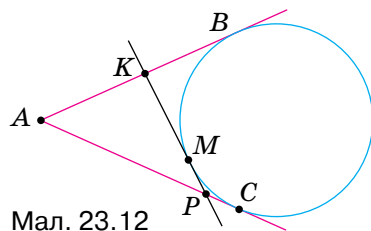
1032. Дано два кола з радіусами 3 см і 5 см. Як розміщені ці кола, якщо відстань між їх центрами дорівнює: а) 6 см; б) 8 см; в) 10 см?

1033. Два кола дотикаються зовні. Відстань між їх центрами дорівнює 12 см. Знайди радіуси цих кіл, якщо один із них більший за інший на 2 см.

1034. Два кола мають внутрішній дотик. Відстань між їх центрами дорівнює 8 см. Знайди радіуси кіл, якщо один із них у 3 рази менший за інший.

1035. Три кола із центрами O_1, O_2 і O_3 попарно дотикаються одне до одного зовнішнім способом. Знайди їх радіуси, якщо вони пропорційні числам 2, 3 і 4, а периметр трикутника $O_1O_2O_3$ дорівнює 36 см.

1036. З точки A до кола проведено дотичні AB і AC . Пряма KP дотикається до кола в точці M (мал. 23.12). Знайди довжини відрізків AB і AC , якщо периметр трикутника AKP дорівнює 36 см.



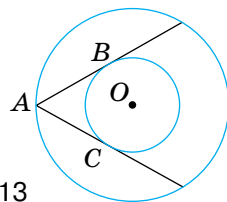
Мал. 23.12

1037. З точки A до кола із центром O проведено дотичні AB і AC , $\angle BOC = 120^\circ$, $AB = 7$ см. Знайди периметр трикутника ABC .

1038. Знайди ширину кільця, утвореного концентричними колами радіусів 10 см і 7 см.

1039. Знайди радіуси двох концентричних кіл, якщо вони відносяться як 2 : 5, а ширина кільця дорівнює 9 см.

1040. Дано два концентричні кола. Із точки A кола радіуса 10 см до кола меншого радіуса проведено дотичні AB і AC (мал. 23.13). Знайди радіус меншого кола, якщо $\angle BAC = 60^\circ$.



Мал. 23.13

До § 19

1041. Знайди геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців хорди AB кола із центром O .

1042. Знайди геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців основи рівнобедреного трикутника.

1043. Знайди геометричне місце точок, рівновіддалених від вершин рівностороннього трикутника.

1044. Знайди геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін рівностороннього трикутника.

1045. Знайди геометричне місце точок, рівновіддалених від двох прямих, що перетинаються.
1046. Знайди геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до двох паралельних прямих.
1047. Дано коло із центром O радіуса r . Знайди геометричне місце точок, які лежать на відстані $2r$ від точки O .
1048. Дано коло радіуса 10 см. Знайди геометричне місце центрів кіл з радіусами 3 см, які з даним колом мають дотик:
а) зовнішній; б) внутрішній.
1049. Дано два кола рівних радіусів, які дотикаються зовні. Доведи, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від центрів кіл, є спільна дотична цих кіл, яка проходить через точку дотику.

До § 20

1050. Кут B прямокутного трикутника ABC дорівнює 60° , катет BC — 5 см. Знайди радіус описаного кола.
1051. Сторони прямокутного трикутника ABC дорівнюють 9 см, 12 см і 15 см. Знайди радіуси описаного і вписаного кіл.
1052. У прямокутний трикутник із гіпотенузою 20 см вписано коло радіуса 3 см. Знайди периметр даного трикутника.
1053. Точка дотику кола, вписаного у трикутник, ділить одну з його сторін на відрізки завдовжки 5 см і 7 см. Знайди сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 44 см.
1054. У трикутнику ABC сторона AC дорівнює 15 см. Точка дотику вписаного в трикутник кола ділить сторону AB у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини A . Знайди сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 42 см.
1055. Сторони трикутника дорівнюють 5 см, 7 см і 10 см. Знайди відрізки, на які точка дотику вписаного кола ділить найбільшу сторону трикутника.
1056. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 8 см, кут при основі — 30° . Знайди радіус описаного кола.
1057. У трикутнику центри вписаного й описаного кіл збігаються. Знайди кути трикутника.
1058. Висота рівностороннього трикутника дорівнює h , а радіуси вписаного й описаного кола — r і R відповідно. Доведи, що $r + R = h$.

1059. У трикутник ABC вписано коло, $BC = a$. Доведи, що відстань від точки A до найближчої точки дотику дорівнює $p - a$, де p — півпериметр трикутника ABC .
1060. У прямокутний трикутник зі сторонами $AB = 10$ см, $AC = 8$ см і $BC = 6$ см вписано коло. MN — дотична до кола, проведена паралельно до сторони BC ($M \in AB$, $N \in AC$). Знайди периметр трикутника AMN .
1061. Дано $\triangle ABC$ зі сторонами 7 см, 9 см і 10 см. На його менших сторонах AB і BC взято точки P і K так, що пряма PK дотикається до кола, вписаного в трикутник. Знайди периметр трикутника PBK .

До § 21

1062. Поділи даний відрізок у відношенні 1 : 3.
1063. Побудуй прямий кут і проведи його бісектрису.
1064. Побудуй прямокутний трикутник із катетами 3 см і 4 см.
1065. Побудуй трикутник зі сторонами 5 см, 7 см і 9 см.
1066. Побудуй рівнобедрений трикутник з основою a і бічною стороною b .
1067. Побудуй рівнобедрений трикутник з основою a і кутом при основі α .
1068. Побудуй гострокутний і тупокутний трикутники та впиши у них кола.
1069. Побудуй прямокутний трикутник із катетами a і b та опиши навколо нього коло.
1070. Побудуй трикутник зі сторонами a і b та кутом між ними 120° . Знайди центр описаного кола й опиши це коло.
1071. Побудуй трикутник за двома сторонами й зовнішнім кутом при їх спільній вершині.
1072. Накресли дві паралельні прямі, відстань між якими дорівнює даному відрізку.

До § 22

1073. Побудуй трикутник, периметр якого дорівнює 18 см, а сторони пропорційні числам 2, 3 і 4.
1074. Побудуй прямокутник, периметр якого дорівнює 20 см, а нерівні сторони відносяться як 2 : 3.
1075. Дано прямі a і c , що перетинаються, і відрізок KP . На прямій a вкажи точку, віддалену від прямої c на відстань KP .

1076. Побудуй трикутник за двома сторонами й висотою, проведеною до однієї із цих сторін.
1077. За допомогою циркуля та лінійки побудуй кут, який дорівнює:
а) 30° ; в) 15° ; г) 150° ;
б) 60° ; г) 120° ; д) 75° .
1078. Побудуй трикутник за двома його зовнішніми кутами і стороною, що з'єднує вершини цих кутів.
1079. опиши навколо даного кола:
а) квадрат; б) рівносторонній трикутник.
1080. Упиши в дане коло:
а) квадрат; б) рівносторонній трикутник.
1081. Дано коло радіуса r . Побудуй геометричне місце середин його хорд, довжина яких дорівнює r .
1082. Дано точки A , B і C . Проведи через точку A пряму, рівновіддалену від точок B і C .
1083. Навколо даного кола опиши трикутник, два кути якого дані.
1084. Побудуй коло даного радіуса, дотичне до обох сторін даного кута.
1085. Побудуй коло даного радіуса, яке б дотикалося до однієї сторони даного кута і мало б центр на другій його стороні.
1086. Побудуй коло даного радіуса, яке б дотикалося до даної прямої в даній її точці.
1087. Побудуй геометричне місце точок, з яких дане коло видно під: а) прямим кутом; б) кутом 60° .
1088. Побудуй коло, що дотикається до кожного з двох даних концентричних кіл.

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1089. Відстань від Землі до Сонця дорівнює приблизно 149500 тис. км, а до Місяця — 400 тис. км.
Знайди відстань від Місяця до Сонця під час:
а) сонячного затемнення; б) місячного затемнення.
1090. Точки A , B і C лежать на одній прямій; точки K , P і T — середини відрізків AB , AC і BC відповідно. Доведи, що $KP = BT$.
1091. Точка C — середина відрізка AB . Знайди на відрізку AB таку точку X , щоб виконувалася рівність $XA = 1,5(XB + XC)$.
1092. Один із суміжних кутів утричі більший за їх різницю. Знайди міри цих кутів.

1093. Точки A , B , C і D розміщені на площині так, що $AB = BC = CA$ і $DA = DB = DC$. Знайди міру кута ADB .

1094. Знайди суму кутів A , B , C , D , E , F і K семикутної зірки (мал. 23.14).

1095. У середині трикутника ABC взято довільну точку X . Доведи, що кут AXC більший за кут ABC .

1096. Побудуй кут на 25 % більший за даний гострий кут.

1097. Чи можуть дві висоти трикутника точкою перетину ділитися навпіл?

1098. Знайди периметр трикутника, якщо від однієї сторони трикутника він більший на a , від другої — на b , а від третьої — на c .

1099. Доведи, що сума медіан трикутника менша від його периметра, але більша за півпериметр.

1100. Доведи, що будь-який трикутник можна розрізати на кілька рівнобедрених трикутників.

1101. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $AC = AO = BO = BD$. Доведи, що $OC = OD$.

1102. Відрізок BB_1 — бісектриса трикутника ABC . Доведи, що $AB > AB_1$ і $BC > B_1C$.

1103. Доведи, що сума відстаней від довільної точки основи гострокутного рівнобедреного трикутника до його бічних сторін є сталою.

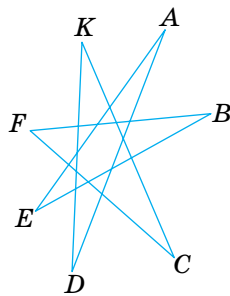
1104. У трикутнику ABC $AB = BC$, $\angle B = 20^\circ$. На стороні AB взято точку M таку, що $BM = AC$. Знайди кут ACM .

1105. Гострі кути прямокутного трикутника відносяться як 1 : 3. Доведи, що бісектриса його прямого кута дорівнює одному з катетів.

1106. Один із гострих кутів прямокутного трикутника на n° більший за інший. Знайди кут між медіаною й висотою трикутника, проведеними з вершини прямого кута.

1107. Висота й медіана, проведені з вершини трикутника, ділять його кут на три рівні частини. Знайди кути цього трикутника.

1108. Доведи, що кожную сторону трикутника із центра вписаного в нього кола видно під тупим кутом.



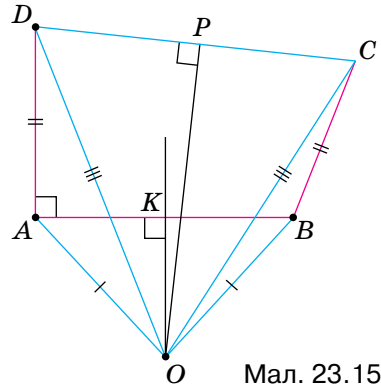
Мал. 23.14

1109. Навколо рівностороннього трикутника ABC описано коло. Точка K кола лежить усередині кута C . Доведи, що $KA + KB = KC$.

1110. Гіпотенуза прямокутного трикутника в 4 рази довша за проведenu до неї висоту. Знайди міри гострих кутів трикутника.

1111. Знайди помилку в міркуваннях.

Доведемо, що прямий кут дорівнює тупому. Нехай $\angle ABC$ — тупий, а $\angle DAB$ — прямий (мал. 23.15). Відкладемо $AD = BC$, проведемо відрізок DC і серединні перпендикуляри KO і PO до відрізків AB та CD . Вони перетнуться в деякій точці O , бо прямі AB і CD — не паралельні. Сполучивши точку O з точками A, B, C і D , одержимо рівні трикутники OAD і OBC (за трьома сторонами). Отже, $\angle OAD = \angle OBC$. Кути OAB і OBA також рівні. Тому $\angle DAB = \angle ABC$, тобто прямий кут дорівнює тупому.



1112. Побудуй прямокутний трикутник за гіпотенузою й сумою катетів.

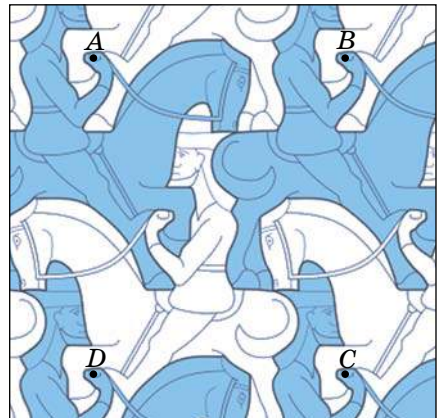
1113. Побудуй прямокутний трикутник:

- за катетом і різницею двох інших його сторін;
- за гіпотенузою й різницею катетів.

1114. Усі вершинки на конях, зображені на малюнку 23.16, — рівні фігури. Знайди площу однієї фігури, якщо точки A, B, C і D — вершини чотирикутника площею S .

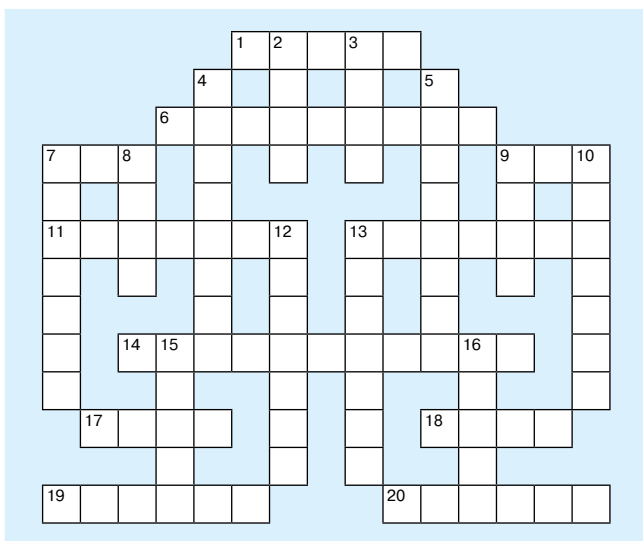
1115. Побудуй трикутник за двома кутами й різницею протилежних їм сторін.

1116. Дано тупокутний трикутник. Проведи пряму, що відтінала б від нього трикутник, дві сторони й кут якого дорівнювали б двом сторонам і куту даного трикутника.



Мал. 23.16

- 1117.** Проведи частину бісектриси кута, вершина якого недоступна (лежить за межею зошита).
- 1118.** Побудуй трикутник за його периметром і двома кутами.
- 1119.** Розв'яжи кросворд (мал. 23.17).



Мал. 23.17

По горизонталі: **1.** Основне геометричне поняття, що приймається без означення. **6.** Наука про геометричні фігури. **7.** Захищена споруда в порту. **9.** Система умовних знаків для передавання інформації. **11.** Пряма, яка має з колом тільки одну спільну точку. **13.** Неправильність у міркуваннях, побудовах тощо. **14.** Частина геометрії про фігури на площині. **17.** Восьма частина прямого кута. **18.** Частина площини, обмежена колом. **19.** Частина круга. **20.** Давньогрецький математик, автор книжки «Основи».

По вертикалі: **2.** Чотирикутник із рівними сторонами. **3.** Одиниця довжини. **4.** Кількісна характеристика предмета або явища. **5.** Тисячна частина метра. **7.** Відрізок, який сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони. **8.** Одиниця об'єму. **9.** Геометрична фігура. **10.** Найбільша хорда кола. **12.** Твердження, яке приймається без доведення. **13.** Прилад для наближеного вимірювання площ. **15.** Норма, крайній ступінь обмеження. **16.** Латинська літера.

Проекти

I Створюємо збірник задач із геометрії

1. Щотижня кожний учень може скласти (або дібрати з додаткової літератури) і розв'язати одну задачу з теми, що вивчається. Текст задачі та її розв'язання подається вчителю й надсилається електронною поштою для створення бази.

2. Наприкінці чверті задачі систематизуються і пропонуються учням для розв'язування під час канікул.

3. Після канікул проводиться конкурс на кращу задачу та розв'язання.

4. Наприкінці року можна створити збірник задач (електронний чи паперовий), який містив би понад 500 задач, і подарувати його шкільній бібліотеці й майбутнім семикласникам



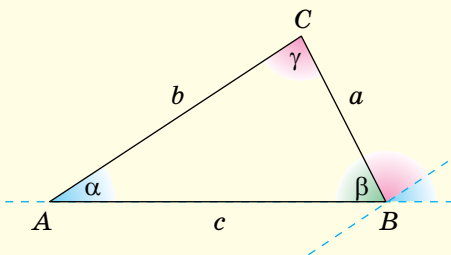
II Інтегрований проект із математики, інформатики й іноземної мови на тему «Трикутники»

1. Кожний учень може брати участь у роботі однієї з двох проектних груп, які працюють над підтемами «Загальні відомості про трикутники» й «Рівність трикутників».

2. Результати роботи над проектом бажано оформити у вигляді групового портфоліо з комп'ютерною презентацією. Розподіл діяльності в групі можна здійснити в такий спосіб: науковець-консультант, дизайнер, історик, менеджер...

3. Про тему, мету, завдання та зміст проекту бажано дізнатися перед осінніми канікулами. Кожний учасник проекту має самостійно ознайомитися з основними поняттями й твердженнями теми, перекласти їх іноземною мовою та підготувати коротку комп'ютерну презентацію.

4. Захист проектів відбувається протягом двох днів перед вивченням теми «Трикутники» за участю учнів 7 класів, учителів математики, інформатики, іноземної мови, адміністрації школи та інших.



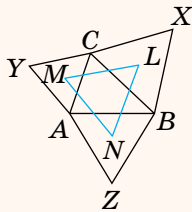
— Сума кутів трикутника дорівнює 180° .

— Die Summe der Maße der Winkel eines Dreiecks beträgt 180° .

— The sum of the measures of the angles of a triangle is 180° .

III Математичний вечір на тему «Реклама в геометрії»

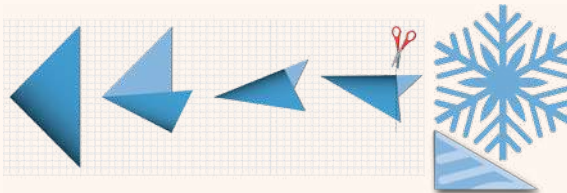
1. Для реклами пропонуються два об'єкти: рівнобедрений трикутник і прямокутний трикутник (або коло і круг).
2. За допомогою реклами (спеціально підготовленої інформації про обрані види геометричних фігур) передбачається одержати «прибуток» у знаннях тих, хто готує рекламу, і тих, хто її слухає.
3. Замовники — учителі та батьки; споживачі — учні паралельних класів, друзі та знайомі.
4. Реклама може бути друкованою, сувенірною, аудіо-, відео-, комп'ютерною презентацією, усним повідомленням тощо.
5. Реклама має бути цікавою, зрозумілою, динамічною, правдивою й виділятися серед інших рекламних повідомлень.
6. У рекламній кампанії можуть брати участь усі охочі.
7. Ефективність рекламної кампанії оцінюється за результатами вікторини, у якій беруть участь і рекламодавці, і споживачі реклами.
8. Реклама може базуватися як на суто математичних відомостях (трикутник Наполеона), так і на використанні математичних знань у побуті (модульне оригамі).



IV Виставка-аукціон «Геометрія в моїх руках»

1. Кожний учень або невелика група учнів створюють своїми руками для виставки один або кілька експонатів, які супроводжують короткою анотацією.
2. Експонати можуть стосуватися різних сфер життєдіяльності людини (вироби з дерева, металу та інших матеріалів; вишивки, орнаменти, прикраси, сувеніри; кондитерські вироби; іграшки тощо). Основна вимога — кожний експонат має співвідноситись із образом геометричної фігури.
3. В анотації відображають зв'язок експоната з геометрією, подають цікаві відомості про сферу його застосування та коротко описують процес виготовлення чи створення експоната.
4. Виставка може проходити в кілька етапів. Правила проведення виставки-аукціону розробляють та повідомляють завчасно.

Схема виготовлення сніжинки



З історії геометрії

Геометрія — наука давня. Один грецький історик ще в V ст. до н. е. писав: «Геометрія, за свідченням дуже багатьох, була відкрита єгиптянами й виникла під час вимірювання землі. Це вимірювання було їм потрібне, бо внаслідок розливу Ніл постійно міняв своє русло. Немає нічого дивного в тому, що ця наука, як і інші, виникла з потреб людини».

З Єгипту геометричні відомості перейшли до Греції. Тут з'явилась і назва науки (від грецьких слів $\gamma\eta$ — «земля» і $\mu\epsilon\tau\rho\epsilon\omega$ — «міряю»). Отже, спочатку геометрією називали землемірство.

Згодом зміст геометрії розширився. Потрібні були люди, які вміли вимірювати не тільки земельні ділянки. Будівельникам треба було відкладати прямі кути, провішувати прямі лінії, креслити кола. Мореплавцям, щоб орієнтуватися за зоряним небом, часто доводилося вимірювати кути. Для цього ще задовго до початку нашої ери було створено астролябію.

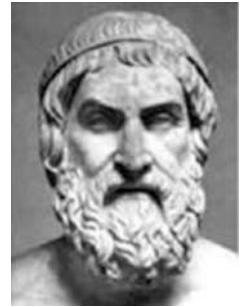
Спочатку властивості геометричних фігур встановлювали на основі дослідів. Тільки в першому тисячолітті до нашої ери їх почали доводити як теореми.

Одним із перших творців геометричної науки був давньогрецький учений **Фалес** (VI ст. до н. е.).

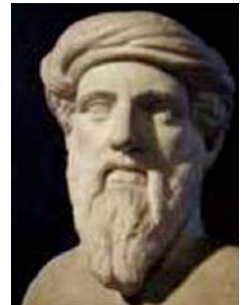
Він довів теореми про рівність вертикальних кутів, про рівність кутів при основі рівнобедреного трикутника, про вписаний кут, який спирається на діаметр кола. Знав Фалес і другу ознаку рівності трикутників, і властивість прямокутного трикутника з кутом 45° . На основі останньої властивості він обчислив висоту єгипетської піраміди. Користуючись астролябією, Фалес передбачив сонячне затемнення 28 травня 585 р. до н. е.

Піфагор (VI ст. до н. е.) — давньогрецький філософ і математик. Зі своїми учнями він досліджував властивості чисел, геометричних фігур, небесних світил. У його школі було відкрито й доведено кілька геометричних теорем, зокрема про те, що в кожному прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів. Тепер відомо близько ста різних доведень теореми Піфагора.

Як наука геометрія вперше сформувалась у Стародавній Греції, коли геометричні закономірності й



Фалес



Піфагор

залежності, знайдені спочатку дослідним шляхом, було зведено в систему. Одна з математичних праць тих далеких часів дійшла і до нас.

Це — «Основи» давньогрецького математика **Евкліда** (III ст. до н. е.). Вони складаються з тринадцяти книг-сувоїв, перші шість із яких присвячено планіметрії. Робота Евкліда цікава не тільки своїм багатим змістом, а й формою викладу. У ній спочатку сформульовано означення й аксіоми, а всі наступні твердження доведено як теореми.

Евклід не сам відкрив і довів усі викладені ним теореми. Багато зробили його попередники. Але Евклід так вдало систематизував відомі йому математичні знання, що його «Основи» були впродовж 2000 років основним підручником з математики!

Цікавий факт з біографії Евкліда. Одного разу цар запитав математика, чи немає в геометрії коротшого шляху, ніж той, що його пропонує Евклід у своїх книжках. На це Евклід відповів: «Ні, в математиці навіть для царів немає інших шляхів!..».

Після Евкліда багато зробили для розвитку геометрії Архімед, Аполлоній та інші давньогрецькі математики.

Наступні півтори тисячі років геометрія в Європі майже не розвивалася. Тільки в епоху Ренесансу вона почала відроджуватись.

Коли Правобережна Україна входила до складу Польщі, юнаки з багатьох українських міст, які навчалися у вищих школах, геометрію вивчали спочатку за латинським перекладом «Основ» Евкліда, а згодом — за польським підручником С. Гжепського, надрукованим у Кракові 1565 р. Його титульна сторінка українською мовою перекладається так: *«Геометрія, тобто Землемірна Наука, по-польськи коротко написана за грецькими і латинськими книжками. У ній знайдеш ти також, як наші землеміри вимірювали ниви волоками або ланами. Тут також про югер, скільки він в собі містить. А ще — як виміряти башти або що-небудь інше високе...»*

Студентів Києво-Могилянської академії геометрії навчали не завжди, а коли навчали, то латинською мовою. Зберігся конспект лекцій з геометрії, прочитаних у 1707–1708 рр. відомим українським філософом і церковним діячем Феофаном Прокоповичем. У ньому пояснювалося: *«Геометрія розподіляється на загальну й спеціальну... Спеціальна геометрія інакше називається геодезією»*. Лекцію про геодезію Прокопович починав так: *«Спеціальна геометрія, яку іноді називають практичною геометрією, а іноді геодезією, є однією з найшляхетніших, найкорисніших і найцікавіших галузей математики»*.

Але із часом у школах вивченню практичної геометрії почали надавати дедалі менше уваги.



Евклід

Особливо значними є внески в геометрію Р. Декарта, Л. Ейлера, М. І. Лобачевського.

Вам уже відома аксіома Евкліда про паралельні прямі. Понад 2000 років сотні геометрів намагалися довести твердження, яке Евклід прийняв без доведення. Багато часу згаяно, багато паперу списано...

Але справжнього доведення так ніхто і не відшукав.

Микола Іванович Лобачевський (1792–1856) поклав край цим марним заняттям. Він показав, що твердження Евкліда не можна довести як теорему, і створив нову геометрію, яку тепер називають геометрією Лобачевського. Те, що зробив Лобачевський у геометрії, фахівці порівнюють із революційним переворотом Коперника в астрономії.

Рід Лобачевського походив із Волині.

З українських математиків найбільший внесок у розвиток геометрії зробили Г. Ф. Вороний, М. Є. Ващенко-Захарченко, О. С. Смогоржевський.

Георгій Феодосійович Вороний (1868–1908) народився в селі Журавка Чернігівської області. Був професором Петербурзького і Варшавського університетів. Досліджував питання про заповнення площини і простору рівними фігурами. Уважається творцем геометричної теорії чисел.

Михайло Єгорович Ващенко-Захарченко (1825–1912) народився в селі Макіївка на Полтавщині. Навчався в Києві та Парижі, був професором Київського університету. Досліджував питання історії розвитку геометрії, надрукував кілька посібників з геометрії, переклав російською «Основи» Евкліда.

Олександр Степанович Смогоржевський (1896–1969) народився в селі Лісове на Вінниччині. Навчався в Немирові та Києві, був професором Київського політехнічного інституту. Досліджував питання, пов'язані з геометричними побудовами, надрукував кілька посібників і підручників, зокрема підручник з основ геометрії для студентів університетів. Його праці перекладено англійською, болгарською, японською та іншими мовами.

Розвивається геометрична наука і тепер. Геометрія продовжує служити людям. Ось що писав один із найвідоміших архітекторів ХХ ст. Ле Корбюзьє: «Ніколи ще до нашого часу ми не жили в такий геометричний період... Навколишній світ — це світ геометрії, чистий, істинний, бездоганний у наших очах. Усе навколо — геометрія».



М. Лобачевський



Г. Вороний

Предметний покажчик

- Аксиома 71, 80
 - Евкліда 71
- Астролябія 24
- Бісектриса кута 25
 - трикутника 95
- Вершина кута 23
 - трикутника 94
- Вимірювальні прилади 16
- Висновок теореми 79
- Висота трикутника 95
- Відношення паралельності 56
- Відрізок 14
 - одиничний 15
- Відстань між двома точками... 15
 - від точки до прямої 149
- Властивість вимірювання відрізків 16
 - вимірювання кутів 25
 - вертикальних кутів 45
 - відкладання відрізків 16
 - відкладання кутів 25
 - зовнішнього кута трикутника 101
 - кутів трикутника 100
 - кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною 64
 - дотичної до кола 197
 - паралельних прямих 71
 - прямокутного трикутника 150
 - рівнобедреного трикутника 127
 - розміщення точок на прямій 9
 - суміжних кутів 40
- Внутрішній промінь кута 25
- Внутрішні точки відрізка 15
- Внутрішня область кута 23
- Геометричне місце точок 173
- Геометричні побудови 188
- Геометрія 7
 - Евклідова 71
 - Лобачевського 230
- Гіпотенуза 148
- Градус 23
- Градусна міра кута 23
- Діаграма Ейлера 129
- Діаметр кола 164
 - круга 166
- Доведення 40, 195
- Довжина відрізка 16
 - кола 164
- Дотик двох кіл 165
- Дотична до кола 164
- Елементи трикутника 94
 - кола 164
- Етапи розв'язування задачі на побудову 195
- Задачі на побудову 194
- Зовнішній кут трикутника 101
- Катет 148
- Коло 7, 164
 - вписане 181
 - описане 179
- Концентричні кола 166
- Круг 164
- Кут 23
 - гострий 24
 - прямий 24
 - розгорнутий 23
 - тупий 24
- Кути вертикальні 45
 - відповідні 62
 - внутрішні односторонні 62
 - різносторонні 62
 - суміжні 40
 - трикутника 94
- Лінійка 16
- Медіана трикутника 95
- Метод доведення від супротивного 65
 - геометричних місць 194
- Мінута 24
- Міра кута 25
- Нерівність трикутника 94, 142

- Ознаки 80
 - паралельності прямих 62, 63
 - рівнобедреного трикутника 128
 - рівності трикутників 113, 135
 - прямокутних трикутників 148
- Означення 81
- Основа перпендикуляра 54
 - рівнобедреного трикутника 127
- Паралельні відрізки 55
 - промені 55
- Периметр трикутника 94
- Перпендикуляр 54, 149
 - серединний 174
- Планіметрія 8
- Площина 7
- Побудова бісектриси кута 189
 - кута, що дорівнює даному 189
 - перпендикулярної прямої 190
 - паралельної прямої 190
 - трикутника за даними сторонами 188
- Поділ відрізка навпіл 189
- Похила 149
- Проекція похилої 149
- Промені 9
 - доповняльні 9
- Пряма 8
- Прямі паралельні 72
 - перпендикулярні 54
- Радіус кола 164
 - круга 166
- Рівність відрізків 15
 - кутів 24
 - трикутників 107
 - фігур 107
- Секунда 24
- Середина відрізка 16
- Січна двох прямих 62
 - кола 164
- Сторона кута 23
 - трикутника 94
- Сума кутів трикутника 100
- Теорема 40, 79
 - обернена до даної 80
- Точка 8
 - дотику 164
- Транспортир 24
- Трикутник 94
 - гострокутний 95
 - прямокутний 95, 148
 - рівнобедрений 127
 - рівносторонній 127
 - різносторонній 127
 - тупокутний 95
- Умова теореми 40
- Фігура
 - геометрична 8
 - неплоска 7
 - плоска 7
- Хорда кола 164
 - круга 166
- Центр кола 164
 - круга 166
- Циркуль 164

Відповіді і вказівки

55. а) 5,9 км; б) 6,4 км; в) $16\frac{1}{3}$ км. 56. а) 0,6 дм; б) $2\frac{2}{3}$ дм.
57. а) 1,2 см; б) 4,2 см. 58. а) Так (А лежить між В і С); б) Ні.
59. а) Ні; б) Так (К лежить між А і М). 62. В, А, Г. 63. а) 1,6 дм і 3,2 дм; б) 1,6 дм і 3,2 дм; в) 1,8 дм і 3 дм. 64. а) 4,8 см; 7,8 см; б) 4,2 см, 8,4 см; в) 2,8 см, 9,8 см. 65. а) Так; б) Так; в) Ні.
67. а) Так; б) Так; в) Ні. 71. 8 см або 16 см. 72. 7 дм або 13 дм.
74. 3 см, 9 см, 11 см, 17 см. 98. а) 80° ; б) 24° ; в) 40° .

101. а) 64° ; б) 16° . 102. а) 55° ; б) 15° . 108. а) 50° і 70° ; б) 24° і 96° ; в) 36° і 84° . 109. а) 22° і 38° ; б) 15° і 45° ; в) 28° і 32° . 111. 30° . 112. 25° . 113. 36° . 118. 45° . 119. 70° і 40° . 120. 20° , 20° , 60° . 121. 90° або 30° . 122. 170° або 70° . 149. б) 108° і 72° . 154. а) 132° ; б) 80° ; в) 60° . 158. 90° . 161. а) 55° ; б) 75° ; в) 72° ; г) 63° . 190. 130° . 191. 50° . 195. а) Ні; б) Так. 196. а) Ні; в) Так. 198. а) 75° ; 105° ; 75° , 105° ; в) 25° , 155° , 25° , 155° . 199. 130° .

201. 96° , 132° , 132° . 205. 80° , 60° , 40° , 80° , 60° , 40° . 207. 60° , 120° , 60° , 120° . 236. а) 50° ; б) 15° ; г) 45° . 278. а) 90° і 90° ; б) 140° і 40° ; в) 120° і 60° ; г) 130° і 50° . 279. а) 130° і 50° ; б) 110° і 70° ; в) 120° і 60° .

319. а) 108° і 72° ; б) 120° і 60° . 320. а) 65° і 115° ; б) 45° і 135° . 324. Б, А, В. 325. 70° , 60° , 50° . 326. 40° , 40° , 100° . 328. 62° . 329. 86° . 378. 64 см. 379. 39 см. 380. г) 8 см і 8 см; д) 8 см і 8 см. 381. а) 12 см і 12 см; б) 6 см і 18 см; в) 8 см і 16 см. 384. 5 см, 10 см, 13 см. 385. 6 см, 8 см, 12 см. 387. 12 м. 390. 24 см. 391. 16 см. 393. 3 см.

411. а) 68° , 68° , 44° ; б) 46° , 74° , 60° ; в) 28° , 84° , 68° . 412. г) 54° , 54° , 72° ; д) 40° , 80° , 60° . 420. 75° або 15° . 422. 15° . 424. 110° і 70° . 429. а) 60° , 20° ; б) 60° , 30° . 431. в) 110° , 130° , 120° . 433. 270° . 434. Ні. 435. 180° . 454. Так. 456. Ні. 457. 40° , 80° , 60° . 458. $\angle AOB = \angle PKN$, $\angle BOC = \angle MKP$. 462. 24 см.

528. а) 18 см, 18 см, 14 см; б) 20 см, 20 см, 10 см; в) 15 см, 15 см, 20 см. **537.** а) 25° ; б) 75° . **538.** 25° . **539.** 30° . **540.** 50° . **543.** 40° , 40° , 100° . **544.** 16 см, 12 см, 12 см. **554.** 20 см, 20 см, 10 см або 15 см, 15 см, 25 см. **556.** а) 120° , 30° , 30° ; б) 50° , 65° , 65° або 65° , $57,5^\circ$, $57,5^\circ$. **558.** а) 50° , 50° , 80° або 40° , 70° , 70° . **583.** а) Доведи спочатку, що $\triangle AOB = \triangle AOC$, а потім доведи рівність трикутників ABM і ACM ; б) Доведіть рівність трикутників OVM і OSM .

608. а) AB — найбільша, BC — найменша. **611.** а) $\angle B$ — найбільший, $\angle C$ — найменший; б) $\angle C$ — найбільший, $\angle B$ — найменший. **612.** Ні; Так. **613.** Ні. **614.** Ні. **618.** а) Так; б) Ні; в) Ні. **620.** а) Ні; б) Так. **623.** Так. **624.** Ні. **626.** Ні. **648.** 55° , 35° . **658.** 10 см. **662.** 8 см. **663.** 12 см. **664.** 10 м. **665.** 21 см. **666.** 16 см. **667.** 34,4 см. **668.** 5 см. **669.** 32 см. **670.** Г, Д, Б. **671.** а) 9 см; б) 9 см; в) 13,5 см. **672.** а) 9,5 см; б) 9,5 см. **673.** 27 см. **675.** 40° і 50° . **699.** 10 дм.

702. 6 см. **703.** 70° . **704.** 50° . **705.** а) 12 м; б) 2 м. **706.** а) 11 см; б) 5 см. **707.** Так. **708.** Ні. **709.** А, В, Б, Г. **710.** 5 см. **712.** 60° . **713.** 21 см. **714.** 120° , 30° , 30° . **717.** 120° , 60° . **720.** 50° . **721.** 110° . **722.** а) 10 см, 6 см; б) 4 см, 12 см; в) 6 см, 10 см. **723.** а) 24 мм, 12 мм; б) 6 мм, 18 мм. **724.** 90° . **725.** 5 см. **726.** 36 см. **727.** 4 см, 12 см. **740.** Пряма, паралельна даним прямим і рівновіддалена від них. **741.** Пряма SK . **742.** Так, якщо точка C — не середина відрізка AB . **743.** Так. **749.** Дві прямі, паралельні даній прямій. **751.** Дві прямі, паралельні даній прямій і рівновіддалені від неї. **753.** Коло. **756.** а) Дане коло й концентричне йому коло радіуса $3r$. **757.** Коло, концентричне даному; його діаметр дорівнює третині діаметра даного кола. **758.** Коло, концентричне даному. **760.** 4 прямі, паралельні даним прямим. **761.** 4 точки.

800. 5 см, 10π см, 12,5 см, 25π см. **801.** 3 см, 6π см, 7,5 см, 15π см. **803.** 15 см. **805.** 14 см, 15 см, 17 см. **806.** 10 см, 10 см, 8 см. **807.** 120° . **808.** 120° . **813.** 30 см. **814.** $2(c+r)$. **815.** 34 см. **816.** 6,5 см, 8,5 см. **817.** 5 см, 1 см. **818.** 4 см. **819.** 5 см. **831.** Проведи бісектрису даного кута і бісектрису його половини. **838.** Побудуй трикутник за трьома даними рівними відрізками. **850.** Січна PM із даною і побудованою прямими утворює рівні внутрішні різносторонні кути. **851.** Якщо даний кут не прямий, то задача має 2 розв'язки. **855.** Трикутник ABC прямокутний і рівнобедрен-

ний. Тому $\angle BAC = \angle BCA = 45^\circ$. **856.** Трикутник — тупокутний. **857.** 60° . **858.** Побудуй прямий кут і на одній його стороні від вершини відклади половину основи, а на другій — висоту. **859.** 1) Побудуй спочатку даний кут; на його стороні від вершини відклади відрізок, що дорівнює гіпотенузі. Побудуй коло, діаметром якого є цей відрізок. **861.** Побудуй допоміжний трикутник за трьома відомими відрізками: медіаною, даною стороною і половиною другої сторони. **862.** 1) Проведи дві паралельні прямі, відстань між якими дорівнює даній висоті, на одній із них відклади одну із даних сторін. Задача може мати 0, 1 або 2 розв'язки. **863.** Скористайся методом ГМТ. Якщо прямі не паралельні, задача має 2 розв'язки. **864.** Проведи серединний перпендикуляр відрізка, кінцями якого є дані точки. **865.** Через дану на стороні кута точку проведи пряму, перпендикулярну до цієї сторони. Ця пряма перетинає бісектрису даного кута в точці, що є центром кола, яке треба побудувати. **866.** Гіпотенуза трикутника вдвічі довша за даний радіус кола. **867.** Спочатку проведи коло даного радіуса, а з якої-небудь його точки — дві хорди даних довжин. Задача може мати 0, 1 або 2 розв'язки. **868.** Проведи спочатку коло даного радіуса, а в ньому — хорду даної довжини. **869.** Проведи коло даного радіуса і хорду, що дорівнює даній основі трикутника. Сердинний перпендикуляр цієї хорди перетне коло у вершинах трикутників, які треба побудувати. **870.** Проведи коло даного радіуса і його діаметр. У кінці діаметра відкладіть даний гострий кут. **871.** Проведи пряму, рівновіддалену від даних паралельних прямих. Із даної точки A як із центра опиши дугу радіуса, що дорівнює половині відстані між даними прямими. Задача має 2 розв'язки. **872.** Проведи коло даного радіуса і в ньому хорди $AB = BC = CD = DE = EF = r$. Трикутники OAB, OBC, \dots, OEF — рівні рівносторонні, усі їхні кути — по 60° . Тому $\angle FOA = 60^\circ$ і також $\triangle OFA$ рівносторонній. Отже, $\triangle ACE$ — той, який треба було побудувати. *2-й спосіб.* Побудуй $\triangle AOC$ за даними сторонами $OA = OC = r$ і кутом між ними $\angle AOC = 120^\circ$. AC — сторона рівностороннього трикутника, який треба побудувати. **875.** На даній гіпотенузі AB , як на діаметрі, побудуй півколо. Знайди точки перетину півкола з прямою, паралельною AB і віддаленою від неї на відстань, що дорівнює даній висоті. **877.** Упишіть у прямий кут коло даного радіуса, відкладіть на одній стороні кута даний катет, а з його кінця проведіть дотичну до кола. **880.** Побудуй за

катетом і гіпотенузою допоміжний прямокутний трикутник $СНМ$, де $СН$ — висота, $СМ$ — медіана. На прямій $НМ$ відклади відрізки $МА = МВ = МС$. Трикутник $АСВ$ — шуканий. **891.** б) 6 частин; в) 7 частин. **892.** а) 12 см; б) 20 см; в) 12,5 см; г) 7,5 см. **893.** 2 см і 6 см або 4 см і 12 см. **894.** 4 випадки: 1 см, 5 см, 9 см, 13 см. **895.** 1 : 4; 1 : 2; 2 : 1. **896.** а) 8 см; б) 12 см; в) 16 см. **897.** 5 см. **898.** а) 4 см; б) 6 см; в) 10 см. **899.** $AC = 13,5$ см, $BC = 1,5$ см або $AC = 1,5$ см, $BC = 13,5$ см.

900. $AB = 2$ см; $AC = 8$ см або $AC = 2$ см, $AB = 8$ см. **902.** Ні. **904.** а) 20° і 60° ; б) 30° і 50° ; в) 20° і 60° ; г) 40° і 40° . **905.** 10° , 30° , 50° . **906.** 80° . **907.** 50° або 30° . **908.** 20° , 160° . **909.** 72° , 108° . **913.** а) 130° ; б) 80° ; в) 144° ; г) 108° ; г) 105° . **915.** 110° ; 70° . **917.** $35^\circ 25'$; $144^\circ 35'$; $144^\circ 35'$. **918.** 60° ; 120° ; 60° ; 120° . **919.** 90° ; 180° . **921.** 144° ; 36° ; 144° ; 36° . **922.** 20° ; 160° ; 20° ; 160° . **925.** 4 см. **927.** а) Ні; б) Так; в) Ні; г) Так. **928.** а) Так; б) Так; в) Так. **929.** а) Так; б) Ні; в) Так. **930.** а) $c \parallel d$; б) $a \parallel b$; в) $c \parallel d$; г) $c \parallel d$, $a \parallel b$. **933.** а) Так; б) Так. **934.** а) $a \parallel c$; б) $a \parallel b$; в) $b \parallel c$; г) $a \parallel b \parallel c$. **936.** а) 70° ; б) 75° ; в) 80° ; г) $67^\circ 30'$. **938.** 80° . **939.** 50° ; 50° . **940.** а) Так; б) Так; в) Ні. **950.** 23 см. **951.** а) 7 см; б) 13 см. **952.** а) 6 см і 10 см; б) 24 см і 40 см. **953.** 15° . **954.** 40° і 20° . **956.** 25° , 75° , 80° . **957.** 30° , 60° , 90° . **958.** 25° , 65° . **961.** 40° . **962.** а) 75° ; б) 30° . **964.** 2 см і 10 см. **965.** 150° . **967.** 7 см, 8 см, 6 см. **968.** Ні. **969.** а) Ні; б) Так. **970.** Так. **971.** Ні. **984.** 50° , 50° , 80° або 80° , 80° , 20° . **985.** 5 см, 8 см, 8 см або 6 см, 6 см, 9 см. **987.** а) 40° ; б) 80° . **988.** 20 см. **991.** 36° , 72° , 72° . **992.** 60° , 60° , 60° .

1004. $\angle C$ — найменший; $\angle B$ — найбільший. **1007.** $\angle A > \angle C$. **1008.** 6 см. **1009.** 59 см і 59 см. **1010.** 8 см, 9 см, 10 см, 11 см, 12 см. **1011.** 4,4 см. **1012.** Ні. **1013.** 18° і 72° . **1016.** 5 см, 12 см, 13 см. **1019.** 3 см і 9 см. **1020.** 7,5 см. **1021.** 2 см. **1022.** 5 см. **1023.** 5 см. **1025.** 60° . **1026.** $\frac{1}{2}r$. **1028.** AB . **1033.** 5 см і 7 см. **1034.** 4 см і 12 см. **1035.** 4 см, 6 см, 8 см. **1037.** 21 см. **1038.** 3 см. **1039.** 6 см і 15 см. **1040.** 5 см. **1045.** Бісектриси утворених кутів. **1047.** Коло із центром O із радіусом $2r$. **1048.** а) Коло із центром O та радіусом 13 см; б) коло із центром O та радіусом 7 см. **1050.** 5 см. **1051.** 7,5 см і 3 см. **1052.** 46 см. **1053.** 12 см, 15 см, 17 см. **1054.** 9 см і 18 см. **1055.** 4 см і 6 см. **1056.** 8 см. **1060.** 12 см.

1061. 6 см. **1089.** а) 149100 тис. км; б) 149900 тис. км. **1091.** X — середина відрізка CB . **1092.** 108° і 72° . **1093.** 120° . **1094.** 180° . **1095.** Якщо промінь BX перетинає AC в точці K , то $\angle AXK > \angle ABK$ і $\angle CXK > \angle CBK$. **1096.** Поділи даний кут на 4 рівні частини і добудуй до даного кута одну з таких частин. **1097.** Не можуть. Якщо висоти AH і CE $\triangle ABC$ перетинаються в точці O , то $\triangle AOE = \triangle CON$, $AO = OE$, що неможливо. **1098.** $\frac{1}{2}(a+b+c)$.

1100. Будь-який трикутник можна розрізати на два прямокутні трикутники, а медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, ділить його на два рівнобедрені трикутники. **1101.** Доведи, що трикутники AOC і BOD — рівнобедрені й рівні. **1102.** Нехай $\angle ABB_1 = \angle B_1BC = \alpha$. Доведи, що кожний із кутів AB_1B і BB_1C більший за α . Для цього через вершину B проведи пряму, паралельну AC . **1103.** Нехай на основі рівнобедреного трикутника ABC лежить точка M . Проведи відрізок $MD \parallel AB$, $D \in BC$ і доведи, що $MD = DC$. **1104.** 70° . Познач в середині $\triangle ABC$ точку K таку, що $AK = KC = AC$. Тоді $\triangle BMC = \triangle AKB$, $\angle BCM = 10^\circ$. **1107.** 90° , 30° і 60° . Нехай CH , CM — висота й медіана $\triangle ABC$, $\angle ACH = \angle HCM = \angle MCB = \alpha$, а пряма CM перетинає описане коло в точці K . Тоді $\angle CKB = \angle CAB$ і $\angle CBK = \angle CHA = 90^\circ$. CK — діаметр описаного кола, а оскільки $AM = MB$, то й AB — діаметр. **1108.** Ці кути: $90^\circ + 0,5\angle A$, $90^\circ + 0,5\angle B$, $90^\circ + 0,5\angle C$. **1110.** 15° і 75° . **1113.** 1) Нехай ABC — трикутник, який треба побудувати, і K — точка гіпотенузи AB така, що $AK = AC$. Відрізки CB і KB — дані. На промені AC відклади $CB_1 = KB$. Трикутники ACK і AB_1V — рівнобедрені. Побудуй $\triangle CBV_1$ і проведи серединний перпендикуляр до відрізка VB_1 . **1115.** Нехай ABC — трикутник, який треба побудувати, і на його стороні AB точка K така, що $AK = AC$. Знайди кут CKB , побудуй $\triangle VKC$ і проведи серединний перпендикуляр до відрізка CK . **1116.** Нехай у $\triangle ABC$ кут C — тупий і K — точка сторони AB така, що $AK = CB$. Пряма CK така, яку треба було провести. **1118.** Побудуй спочатку трикутник за даним відрізком і прилеглими до нього половинами даних кутів. Потім проведи серединні перпендикуляри до двох сторін побудованого трикутника.

Зміст

Світ геометрії	3
Як працювати з підручником	4
Розділ 1. НАЙПРОСТІШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ.	6
§ 1. Точки і прямі	7
§ 2. Відрізки та їх довжини	14
§ 3. Кути та їх міри	23
Задачі за готовими малюнками	33
Самостійна робота	34
Тестові завдання	35
Типові задачі для тематичного контролю	36
Запитання і завдання для самоконтролю	37
Головне в розділі 1.	38
Розділ 2. ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ	39
§ 4. Суміжні кути	40
§ 5. Вертикальні кути	45
Самостійна робота	52
Задачі за готовими малюнками	53
§ 6. Перпендикулярні й паралельні прямі	54
§ 7. Ознаки паралельності прямих	62
§ 8. Властивості паралельних прямих	71
§ 9. Теореми й аксіоми	79
Задачі за готовими малюнками	87
Самостійна робота	88
Тестові завдання	89
Типові задачі для тематичного контролю	90
Запитання і завдання для самоконтролю	91
Головне в розділі 2.	92
Розділ 3. ТРИКУТНИКИ	93
§ 10. Трикутник і його елементи	94
§ 11. Кути трикутника	100
§ 12. Про рівність геометричних фігур	107

§ 13. Ознаки рівності трикутників	113
Задачі за готовими малюнками	122
Самостійна робота	123
Тестові завдання	124
Типові задачі для тематичного контролю	125
Запитання і завдання для самоконтролю	126
§ 14. Рівнобедрений трикутник	127
§ 15. Третя ознака рівності трикутників	135
§ 16. Нерівності трикутника	142
§ 17. Прямокутний трикутник	148
Самостійна робота	157
Задачі за готовими малюнками	158
Тестові завдання	159
Типові задачі для тематичного контролю	160
Запитання і завдання для самоконтролю	161
Головне в розділі 3.	162
Розділ 4. КОЛО І КРУГ. ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ	163
§ 18. Коло і круг	164
§ 19. Геометричне місце точок.	173
§ 20. Коло і трикутник	179
§ 21. Геометричні побудови	188
§ 22. Задачі на побудову.	194
Задачі за готовими малюнками	201
Самостійна робота	203
Тестові завдання	204
Типові задачі для тематичного контролю	205
Головне в розділі 4.	206
Задачі для повторення.	207
Задачі підвищеної складності.	222
Проекти.	226
З історії геометрії.	228
Предметний покажчик	231
Відповіді і вказівки	233

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович
БЕВЗ Валентина Григорівна
ВАСИЛЬЄВА Дарина Володимирівна
ВЛАДІМІРОВА Наталія Григорівна

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 7 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

Редактор *Т. П. Єресько*
Технічний редактор *Л. І. Аленіна*
Комп'ютерна верстка *Д. Д. Карачов*
Коректор *Н. М. Левчук*
Дизайн обкладинки *П. В. Ширнін*

Формат 70 x 100 ¹/₁₆.
Ум. друк. арк. 19,440 + 0,324 форзац.
Обл.-вид. арк. 15,75 + 0,55 форзац.
Наклад 31 560 пр.
Зам. .

У підручнику використано малюнки художника *І. В. Денисова*, мурал творчої групи «Кайлас-В» (с. 93), а також світлини та малюнки з сайту <https://www.shutterstock.com/> авторів: *vectorpouch, Golden Dayz, Atif Mahmud, ABCDstock, Jaroslav Machacek, Apolinary, Artur Didyk, Mehedi Hasan Badhon, New Africa, Pandora Pictures, Ruslan Lytvyn, wavebreakmedia, justgoomm, captainX, Sergey Chirkov, Alvov, biletskiyevgeniy.com, MMCXIII, Sanchai Khudpin, Nezabudkina, weha, Sarawut Kh, Monkey Business Images, Tyler Olson, Pressmaster, Monkey Business Images, nikkytok, LStockStudio, kei907, voronaman;* <https://uk.m.wikipedia.org>

ТОВ «ВИДАВНИЧИЙ ДІМ «ОСВІТА»

Свідоцтво «Про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції»
Серія ДК № 6109 від 27.03.2018 р.

Адреса видавництва: 03057, м. Київ, вул. О. Довженка, 3
www.osvita-dim.com.ua

Віддруковано
в АТ «ХАРКІВСЬКА КНИЖКОВА ФАБРИКА «ГЛОБУС»
61011, м. Харків, вул. Різдвяна, 11.
Свідоцтво ДК № 7032 від 27.12.2019 р.
www.globus-book.com