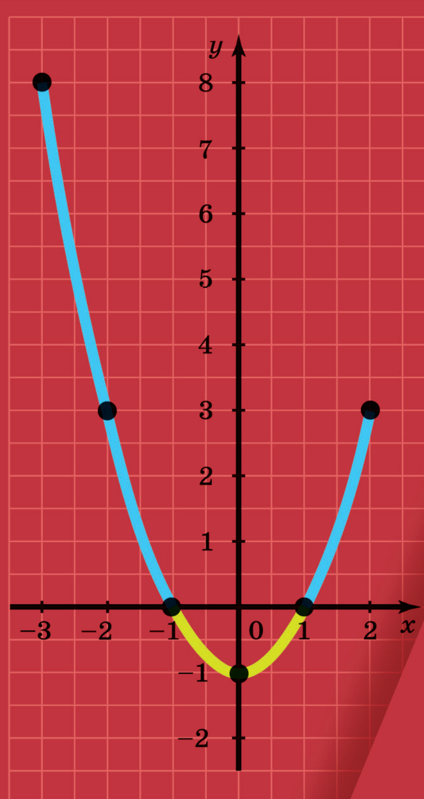
видавництво
АТЛАНТ

Oleksandr Ister

ALGEBRA



7

UKD 512(075.3)
I-89

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(Наказ Міністерства освіти і науки України
від 05.02.2024 № 124)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Підручник розроблено відповідно до модельної навчальної програми "Алгебра. 7-9 класи" для закладів загальної середньої освіти (автор О. Істер)

Перекладено за виданням:

I-89

Істер О. С., Алгебра: підруч. для 7-го кл. навч. польською мовою закл. заг. серед. освіти/Олександр Істер. переклад Сосульська М.Р., — Київ: Видавництво АТЛАНТ, 2024. — 288 с. : іл.

ISBN 978-617-8159-28-3 (польськ)
ISBN 978-617-8353-29-2.(укр)

UDK 512(075.3)

ISBN 978-617-8159-28-3 (польськ)
IISBN 978-617-8353-29-2 (укр)

Drodzy uczniowie i uczennice 7 klasy!

Rozpoczynacie naukę jednej z najważniejszych dziedzin matematyki – algebrę. Pomocą będzie wam służyć podręcznik, który trzymacie w rękach.

W podręczniku wykorzystano następujące oznaczenia:

– przypomnij (wcześniej nauczone);

– zwróć szczególną uwagę;

– pytania i zadania do materiału teoretycznego;

113 – zadania dla pracy klasowej i 115 – pracy domowej;

– rubryka „Ukrainy – to my”;

– rubryka „Ciekawe zadania – jednak zastanów się”;

– rubryka „Matematyka życia”;

– ćwiczenia przygotowujące do przyswojenia nowego materiału;

– ćwiczenia powtórzeniowe;

– rubryka „Najważniejsze w rozdziale”.

Pogrubiony tekst zwraca Waszą uwagę na nową definicję lub to, co trzeba sobie przypomnieć.

Wszystkie ćwiczenia podzielono zgodnie z poziomem wyników w nauce i oznaczono następująco:

od oznaczenia 1 rozpoczynają się ćwiczenia poziomu podstawowego;

od oznaczenia 2 rozpoczynają się ćwiczenia poziomu średniego;

od oznaczenia 3 rozpoczynają się ćwiczenia poziomu dostatecznego;

od oznaczenia 4 rozpoczynają się ćwiczenia wysokiego poziomu;

od oznaczenia * rozpoczynają się ćwiczenia poziomu zaawansowanego.

Sprawdzić swoją wiedzę i przygotować się do zaliczenia tematu można za pomocą rozwiązywania zadań „Samodzielnej pracy domowej”, które są w formie testowej oraz „Ćwiczenia powtórzeniowe”. Po każdym rozdziale podano ćwiczenia powtórzeniowe, najważniejszy materiał teoretyczny (rubryka „Główne w rozdziale”), a na końcu podręcznika *„Zadania powtórzeniowe według kursu algebry dla 7 klasy”*. *„Zadania z gwiazdką”* pomogą przygotować się do olimpiady z matematyki i pogłębić wiedzę matematyczną.

Autor starał się przedstawić materiał w prosty i zrozumiały sposób, zilustrować go dużą liczbą przykładów. Po przestudiowaniu materiału teoretycznego w szkole trzeba obowiązkowo opracować go w domu.

Podręcznik zawiera dużą ilość ćwiczeń. Większość z nich omówicie na lekcjach oraz w podczas pracy domowej, inne ćwiczenia zaleca się rozwiązać samodzielnie. Niektóre ćwiczenia można rozwiązywać również w trybie online, jeżeli zeskanować przedstawione obok nich kody QR.

W rubryce *„Matematyka życia”* są zadania, które często musimy rozwiązywać w życiu codziennym.

Ciekawe fakty z historii powstania pojęć i symboli matematycznych oraz rozwoju matematyki jako nauki można znaleźć w rubryce *„Dawno dawno temu…”*.

Życzymy sukcesów w opanowaniu kursu!

Szanowni nauczyciele i nauczycielki!

Proponowany podręcznik zawiera dużą ilość ćwiczeń; ćwiczenia w większości paragrafów umieszczono „z górą”. Więc wybierajcie je do wykorzystania na lekcjach, zajęciach fakultatywnych, indywidualnych, zajęciach dodatkowych oraz jako zadania domowe w zależności od postawionego celu, poziomu przygotowania uczniów/uczennic, zróżnicowania nauczania itp.

Dodatkowe zadania w *«Zadaniach powtórzeniowych»* przeznaczono dla uczniów/uczennic, którzy poradzili sobie z zadaniami podstawowymi wcześniej od reszty. Czy zostały rozwiązane prawidłowo nauczyciel/nauczycielka mogę ocenić później.

Ćwiczenia dla powtórzenia rozdziałów można zaproponować uczniom, na przykład” podczas lekcji powtórzeniowych lub podczas powtarzania i systematyzacji materiału dydaktycznego na koniec roku szkolnego.

W rubryce *„Matematyka życiowa”* znajdują się zadania związane z podstawami ekonomii i przedsiębiorczością, bezpieczeństwem gospodarczym, zdrowym trybem życia, odpowiedzialnością społeczną, a w rubryce „Przygotowanie się do przyswojenia nowego materiału” – zadania, które pomogą zaktualizować odpowiednią wiedzę.

„Zadania zaawansowane" na końcu podręcznika pomogą przygotować uczniów/uczennic do różnorodnych konkursów matematycznych oraz zwiększyć ich zainteresowanie matematyką.

„Zadania powtórzeniowe według kursu algebry dla 7 klasy", które są na końcu podręcznika, można zaproponować uczniom do przygotowania się do testu podsumowującego na koniec roku.

Drodzy rodzice!

Jeżeli wasze dziecko opuszcza jedną lub więcej lekcji w szkole, powinniście zaproponować jemu samodzielnie opracowanie materiału z tych lekcji w domu według podręcznika. Najpierw dziecko musi zapoznać się z materiałem teoretycznym, który przedstawiono w prosty i zrozumiały sposób, zilustrowano dużą ilością przykładów. Zatem trzeba rozwiązać ćwiczenia z paragrafu, z którymi dziecko da radę.

Podczas kursu algebry dla 7 klasy, który dziecko przechodzi, możecie jemu zaproponować dodatkowo w domu rozwiązywać ćwiczenia, które nie opracowano podczas lekcji. To przyczyni się do lepszego opanowania materiału dydaktycznego.

Każdy temat kończy się testem. Przed jego przeprowadzeniem zaoferujcie dziecku rozwiązać zadania *„Samodzielnej pracy domowej"*, które są w formie testowej oraz *„Zadania powtórzeniowe"*. To pomoże przypomnieć podstawowe rodzaje ćwiczeń oraz dobrze przygotować się do testu z tematu.

Jeżeli wasze dziecko wykazuje zwiększone zainteresowanie matematyką i chce pogłębiać swoją wiedzę, zwróćcie uwagę na *„Zadania z gwiazdką"*, które są na końcu podręcznika.

POWTARZAMY MATEMATYKĘ ZA 5-6 KLASY

Liczby naturalne i działania na nich. Dzielniki liczb naturalnych.

1. Oblicz wartość wyrażeń, a dowiesz się ilość mieszkańców w niektórych miastach Ukrainy w momencie ostatniego spisu ludności (2001 r.). Dowiedz się, do jakich województw należą te miasta:
1) 13 145 + 7435 (Krasiłów); 2) 203 912 + 825 137 (Odessa);
3) 78 117 – 13 256 (Pryłuki); 4) 974 002 – 725 189 (Równe);
5) 313 · 42 (Basztanka); 6) 833 · 281 (Krzemieńczuk);
7) 64 246 : 13 (Rudki); 8) 1 536 470 : 106 (Sudak).

2. Oblicz:
1) 137 125 + 321 117; 2) 429 113 – 253 087;
3) 429 · 17; 4) 91 575 : 45;
5) 79 335 : 215; 6) 137 · 273.

3. Oblicz wartość wyrażenia w wygodny sposób:
1) 297 + (495 + 703); 2) 329 + 1075 + 1925 + 671;
3) 250 · 49 · 4; 4) 125 · 37 · 8 · 2.

4. Oblicz wartość wyrażenia w wygodny sposób:
1) (724 + 913) + 276; 2) 2715 + 256 + 1285 + 744;
3) 500 · 73 · 20; 4) 25 · 13 · 400 · 7.

5. Zapisz wszystkie dzielniki liczby: 1) 16; 2) 38; 3) 60.

6. Zapisz wszystkie dzielniki liczby: 1) 25; 2) 36; 3) 78.

7. Rozłóż na mnożniki proste liczbę: 1) 48; 2) 80.

8. Rozłóż na mnożniki proste liczbę: 1) 60; 2) 96.

9. Znajdź największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność:
1) 19 i 3; 2) 36 i 48; 3) 17 i 51; 4) 10; 15 i 25.

10. Znajdź największy wspólny dzielnik i najmniejszą wspólną wielokrotność:
1) 7 i 12; 2) 39 i 52;
3) 54 i 18; 4) 12; 16 i 20.

11. Oblicz wartość wyrażenia

(166 788 : 452 – 125) · 409 – 97 962

oraz dowiedz się rok założenia Kijowskiego Uniwersytetu Narodowego im. Tarasa Szewczenki.

Znajdź wartość wyrażenia

$$95\,472 - (423 - 35\,133 : 147) \cdot 509$$

i dowiedz się rok założenia Narodowego Uniwersytetu „Politechnika Lwowska".

13. Podaj ostatnią cyfrę liczby:
1) 5347^2;
2) $2003^3 - 195^2$;
3) $146^3 + 127^2 - 39^3$?

14. Podaj ostatnią cyfrę liczby:
1) 7293^2; 2) $4007^3 - 129^2$;
3) $125^3 + 138^3 - 45^2$?

15. Znajdź namniejszą i największą pięciocyfrową liczbę, która jest wielokrotnością 124.

16. Znajdź namniejszą i największą czterocyfrową liczbę, która jest wielokrotnością 39.

Ułamki dziesiętne i działania na nich

17. (*Ustnie.*) Oblicz:
1) 4 + 2,7; 2) 1,8 + 3,2; 3) 4,5 – 1,2; 4) 7,2 – 4,5;
5) 10 · 5,2; 6) 4,3 · 0,01; 7) 3,6 : 3; 8) 2,8 : 0,1.

18. Wykonaj działanie:
1) 4,92 + 5,713; 2) 12,38 – 4,113; 3) 3,5 · 2,14; 4) $2{,}6^2$;
5) 5,9 · 4,03; 6) 41,04 : 12; 7) 8,55 : 2,5; 8) $0{,}7^3$.

19. Wykonaj działanie:
1) 5,731 + 9,28; 2) 17,52 – 9,293; 3) 7,6 · 4,15; 4) $3{,}2^2$;
5) 2,05 · 4,7; 6) 31,2 : 15; 7) 8,82 : 2,8; 8) $0{,}6^3$.

20. Zapisz liczby w kolejności rosnącej 2,9 (P); 2,81 (L); 3,41 (K); 2,8 (S); 3,4 (A); 2,89 (I) i przeczytaj nazwisko znanego na świecie ukraińskiego śpiewaka operowego, Bohatera Ukrainy. Dowiedz się więcej o im z internetu.

21. Zapisz liczby w kolejności malejącej 7,7 (P); 7,6 (N); 7,8 (I); 6,8 (Ь (miękki znak)); 7,73(R); 7,65(I) i przeczytaj nazwę miasta bohatera Ukrainy Dowiedz się z internetu, za co miasto otrzymało ten tytuł.

22. Zaokrąglij liczby:
1) 7,25; 3,739; 8,03; 9,05 do dziesiętnych;
2) 5,713; 9,8999; 4,115; 8,718 do setnych;
3) 7,389; 4,5; 9,93; 7,38 do jedności;
4) 135,72; 431,431 do dziesiątek.

23. Zaokrąglij liczby:
1) 17,38; 49,55; 4,06; 7,02 do dziesiętnych;
2) 13,548; 29,341; 9,999; 4,444 do setnych;
3) 3,713; 14,52; 7,111 do jedności.

24. Oblicz wartość wyrażenia:
1) $2{,}9 \cdot (7{,}32 + 0{,}08 : 0{,}125) - 4{,}2 \cdot 0{,}25 + 7{,}35$;
2) $(7{,}85 + 4{,}2^2) : 5 - 0{,}9^3 : 3$.

25. Oblicz wartość wyrażenia:
1) $45{,}2 \cdot 0{,}75 - (9{,}34 + 0{,}06 : 0{,}25) \cdot 2{,}8 - 4{,}05$;
2) $(8{,}93 - 2{,}6^2) : 4 + 0{,}6^3 : 2$.

26. Napisz trzy ułamki dziesiętne, z których każdy:
1) większy niż 4,8 i mniejszy niż 4,9;
2) mniejszy niż 0,43 i większy niż 0,41.

27. Napisz trzy ułamki dziesiętne, z których każdy:
1) mniejszy niż 9,6 i większy niż 9,4;
2) większy niż 4,83 i mniejszy niż 4,84.

Ułamki zwykłe i działania na nich. Procenty.

28. *(Ustnie.)* Oblicz:

1) $\frac{4}{9} + \frac{2}{9}$; 2) $\frac{7}{8} - \frac{1}{8}$; 3) $\frac{4}{5} \cdot 10$; 4) $\left(\frac{2}{9}\right)^2$;

5) $4\frac{1}{7} + 2\frac{5}{7}$; 6) $5\frac{7}{9} - 4\frac{6}{9}$; 7) $\frac{3}{5} : 15$; 8) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$.

29. Oblicz:

1) $\frac{4}{9} + \frac{11}{15}$; 2) $\frac{9}{16} - \frac{5}{12}$; 3) $2\frac{1}{5} + \frac{1}{10}$; 4) $7\frac{4}{9} - \frac{1}{3}$;

5) $\frac{4}{9} \cdot \frac{7}{16}$; 6) $\frac{12}{13} \cdot \frac{39}{40}$; 7) $\frac{7}{10} : \frac{2}{5}$; 8) $\frac{5}{8} : \frac{15}{16}$.

30. Wykonaj działanie:

1) $\frac{4}{9} + \frac{1}{6}$; 2) $\frac{5}{12} - \frac{3}{8}$; 3) $3\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$; 4) $4\frac{9}{10} - \frac{1}{2}$;

5) $\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{15}$; 6) $\frac{8}{17} \cdot \frac{51}{80}$; 7) $\frac{2}{9} : \frac{7}{18}$; 8) $\frac{7}{9} : \frac{14}{45}$.

31. Oblicz wartość wyrażenia:

1) $\left(15\frac{3}{10} - 13\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{5}{9}$; 2) $\frac{7}{36} : \left(3\frac{11}{12} - 3\frac{5}{9}\right)$.

32. Oblicz wartość wyrażenia:

1) $5 : \left(\frac{2}{3} + 1\frac{1}{7} \cdot \frac{7}{18}\right)$; 2) $\left(2\frac{13}{50} - 2\frac{1}{20}\right) \cdot 3\frac{4}{7}$.

33. Dzwonek do roweru kosztuje 150 UAH. Ile będzie kosztować dzwonek do roweru po:
1) obniżce ceny o 10 %; 16 %;
2) podwyżce ceny o 8 %; 20 %?

34. Etui na telefon kosztuje 200 UAH. Ile będzie kosztować etui po:
1) podwyżce ceny o 15 %; 9 %;
2) obniżce ceny o 4 %; 30 %?

35. Rozwiąż równanie:

1) $x + 0{,}4 = \frac{7}{15}$; 2) $x - \frac{2}{7} = \frac{11}{14}$; 3) $\frac{17}{25} - x = 0{,}6$;

4) $\frac{2}{7}x = \frac{4}{21}$; 5) $x : \frac{2}{5} = 1{,}6$; 6) $2{,}4 : x = \frac{8}{13}$.

36. Rozwiąż równanie:

1) $\frac{19}{50} - x = \frac{3}{20}$; 2) $0{,}8 + x = \frac{13}{15}$; 3) $x - 0{,}05 = \frac{7}{30}$;

4) $3{,}2 : x = \frac{4}{5}$; 5) $1{,}5x = \frac{15}{16}$; 6) $x : \frac{4}{5} = 2{,}8$.

37. Samochód w pierwszym dniu podróży z Kijowa do Bukaresztu pokonał przejechał 364 km, co stanowi 40 % odległości między tymi miastami. Ile zostało mu kilometrów do przejechania?

38. Kupując książkę w cenie 90 UAH, Ola wydała 30 % pieniędzy, które miała. Ile pieniędzy zostało dziewczynce?

3 **39.** Oblicz na dwa sposoby (zamień ułamek dziesiętny na liczbę mieszaną lub zamień liczbę mieszaną na ułamek dziesiętny):

1) $13{,}75 + 4\frac{1}{20}$; 2) $5\frac{8}{25} - 3{,}9$; 3) $1{,}125 \cdot 1\frac{3}{5}$; 4) $8\frac{2}{5} : 1{,}4$.

40. Oblicz na dwa sposoby (zamień ułamek dziesiętny na liczbę mieszaną lub zamień liczbę mieszaną na ułamek dziesiętny):

1) $3\frac{1}{4} + 6{,}05$; 2) $3{,}48 - 1\frac{9}{20}$; 3) $1{,}15 \cdot 1\frac{2}{5}$; 4) $5{,}2 : 1\frac{3}{10}$.

41. Po obniżce ceny o 10 % słuchawki kosztują 225 UAH. Jaka była początkowa cena słuchawek?

42. Jabłka podczas suszenia tracą 82 % swojej wagi. Ile trzeba świeżych jabłek, żeby uzyskać 9n kg suszonych?

4 **43.** Cenę towaru najpierw zwiększono o 20 %, zatem nową cenę zmniejszono o 15 %. W jaki sposób i o ile procent zmieniała się cena w porównaniu do początkowej?

44. Cenę towaru najpierw zmniejszono o 20 %, zatem nową cenę zwiększono o 15 %. W jaki sposób i o ile procent zmieniała się cena w porównaniu do początkowej?

Stosunek i proporcja

1 **45.** (*Ustnie.*) Dlaczego równość $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ jest proporcją? Nazwij jej wyrazy skrajne i środkowe.

46. (Ustnie.) Ilu kilometrom w terenie odpowiada 1 cm na mapie ze skalą:
1) 1 : 100 000; 2) 1 : 700 000; 3) 1 : 5 000 000?

2 **47.** Znajdź nieznany wyraz proporcji:

1) $x : 6 = 5 : 3$; 2) $\frac{5}{x} = \frac{20}{7}$; 3) $x : 12 = \frac{13}{24}$.

48. Znajdź nieznany wyraz proporcji:

1) $6 : x = 2 : 7$; 2) $\frac{x}{3} = \frac{7}{6}$; 3) $\frac{7}{10} = x : 5$.

49. Ile procent stanowi:

1) 2 od 5; 2) 18 od 12; 3) 3,5 od 17,5; 4) $\frac{1}{7}$ od $\frac{1}{14}$?

50. Ile procent stanowi:

1) 4 od 8; 2) 20 od 16; 3) 2,6 od 10,4; 4) $\frac{1}{10}$ od $\frac{1}{2}$?

51. Podziel liczbę:
1) 28 na dwie części w stosunku 5 : 2;
2) 36 na trzy części w stosunku 1 : 3 : 5.

52. Podziel liczbę:
1) 48 na dwie części w stosunku 1 : 3;
2) 50 na trzy części w stosunku 2 : 5 : 3.

3 **53.** Rozwiąż równanie:

1) $\frac{2x-7}{4}=\frac{5}{8}$; 2) $\frac{3x+1}{7}=\frac{3-4x}{14}$.

54. Rozwiąż równanie: 1) $\frac{2x+3}{5}=\frac{7}{10}$; 2) $\frac{2x-1}{4}=\frac{5-4x}{12}$.

55. 1) Serwisant w pierwszym tygodniu naprawił 24 urządzenia, a w drugim 30 urządzeń. O ile procent wzrosła wydajność pracy serwisanta?

2) Serwisant w pierwszym tygodniu naprawił 30 urządzeń, a w drugim 24 urządzenia. O ile procent spadła wydajność pracy serwisanta?

56. Towar kosztował 80 UAH. O ile procent wzrosła lub spadła centa towaru, jeżeli w wyniku przeszacowania wartości zaczął kosztować:

1) 72 UAH; 2) 84 UAH?

4 **57.** Do 180 g 10-procentowego roztworu soli wlano 70 g wody. Jaką stała się zawartość procentowa soli w nowym roztworze?

58. Do stopu o masie 250 g, który zawiera 40 % cyny, wlano 150 g cyny. Jaką stała się procentowa zawartość cyny w nowym stopie?

Liczby wymierne i działania na nich

1 **59.** Oblicz:

1) $-8+(-9)$; 2) $-13{,}6+(-7{,}9)$; 3) $29+(-11)$;
4) $-37+4{,}5$; 5) $-8-5$; 6) $-9-(-4)$;
7) $7-(-3)$; 8) $4-9{,}1$; 9) $2{,}9\cdot(-10)$;
10) $-4\cdot(-4{,}5)$; 11) $-4{,}2:(-4)$; 12) $8:(-0{,}01)$.

60. Wykonaj działania:

1) $-6+(-10)$; 2) $-4{,}9+(-5{,}7)$; 3) $-38+12$;
4) $7{,}2+(-5)$; 5) $-4-(-3)$; 6) $-9-11$;
7) $0-(-9)$; 8) $5-10{,}2$; 9) $-5{,}1\cdot(-0{,}1)$;
10) $-6\cdot 2{,}5$; 11) $-7{,}2:10$; 12) $-7{,}5:(-5)$.

2 **61.** Wykonaj działania:

1) $-\frac{6}{7}+\left(-\frac{4}{21}\right)$; 2) $-4\frac{7}{12}+5\frac{1}{6}$; 3) $\frac{12}{41}-1$;

4) $-3\frac{1}{8}-\left(-4\frac{3}{4}\right)$; 5) $-\frac{8}{9}\cdot\frac{27}{48}$; 6) $-1\frac{2}{7}\cdot\left(-2\frac{1}{3}\right)$;

7) $\frac{8}{15}:\left(-1\frac{1}{5}\right)$; 8) $-\frac{30}{41}:(-5)$; 9) $\left(-\frac{2}{7}\right)^2$.

62. Oblicz:

1) $-\frac{5}{9}+\left(-\frac{7}{12}\right)$; 2) $5\frac{1}{4}+\left(-7\frac{1}{8}\right)$; 3) $-\frac{8}{17}-1$;

4) $2\frac{1}{3}-\left(-5\frac{2}{9}\right)$; 5) $-\frac{7}{9}\cdot\left(-\frac{18}{49}\right)$; 6) $4\frac{1}{2}\cdot\left(-1\frac{7}{9}\right)$;

7) $-3\frac{3}{5}:\left(-\frac{9}{10}\right)$; 8) $-8:\frac{16}{17}$; 9) $\left(-\frac{3}{5}\right)^2$.

63. Napisz wszystkie liczby całkowite, które znajdują się na współrzędnej prostej pomiędzy liczbami:

1) –2,7 i 4,1; 2) –102,5 i –97,9; 3) $-5\frac{1}{3}$ i $\frac{2}{11}$.

64. Napisz wszystkie liczby całkowite, które znajdują się na współrzędnej prostej pomiędzy liczbami:

1) $-1\frac{2}{3}$ i 4,7; 2) –85,3 i –78,4; 3) $-\frac{4}{11}$ i $3\frac{2}{5}$.

65. Zaznacz na układzie współrzędnych kartezjańskich punkty: $A(-2; 4)$, $M(0; -3)$, $K(5; 1)$, $D(4; 0)$, $L(-6; -2)$, $N(2; -3)$.

66. Zaznacz na układzie współrzędnych kartezjańskich punkty: $B(2; -5)$, $C(-2; 0)$, $T(4; 2)$, $E(0; 3)$, $Q(-4; -1)$, $P(-5; 2)$.

67. Zredukuj wyrazy podobne:
1) $4x + 2y - 5x - 2y$; 2) $-5{,}9 + 11{,}2a + 7{,}8 - 18a$;
3) $-9a + 7b - 8 + 3a - b$; 4) $2{,}7x + 3x + 12y - 9{,}8y - 5{,}7x$.

68. Zredukuj wyrazy podobne:
1) $7p - 2m + 6p + 2m$; 2) $-14b + 3{,}9 - 7{,}2 + 18{,}5b$;
3) $5x - 8y + 5 - 4x + y$; 4) $2{,}5a - 2{,}9b + 3a + 3{,}7b - 5{,}5a$.

69. Otwórz nawiasy i zredukuj wyrazy podobne:
1) $-5(2a - 3) + 3(4a - 5)$; 2) $2(a - 3m) - 7(2a + m)$;
3) $(2y - 3)\cdot(-3) + 2(4y - 1)$; 4) $2{,}4(2x - 3) - 4{,}8(x - 5)$.

70. Otwórz nawiasy i zredukuj wyrazy podobne:
1) $-4(3a - 2) + 6(2a - 1)$; 2) $5(b - 3c) - 3(4b + c)$;
3) $(7x - 2)\cdot(-4) + 2(4 - 3y)$; 4) $2{,}6(3a - 5) - 7{,}8(a - 10)$.

71. Rozwiąż równanie:
1) $0{,}5(2x - 3) + 2{,}6 = 0{,}2(4 + 2x)$;

2) $\frac{1}{2}\left(6-3\frac{1}{2}x\right)=1\frac{1}{4}x+9$.

72. Rozwiąż równanie:

1) $0{,}5(3-x)+1{,}4=-0{,}3(2x-2)$; 2) $2\frac{1}{2}-1\frac{2}{3}x=\frac{2}{9}\left(1\frac{1}{2}x-\frac{9}{10}\right)$.

73. Znajdź wartość wyrażenia

$$3\frac{1}{4}\cdot\left(-12\frac{2}{5}-(-4,2):\frac{7}{15}\right)+17,05$$

i dowiedz się, z którego wieku pochodzi pierwsza wzmianka pisemna o miejscowości Gurzuf na Krymie.

74. Oblicz wartość wyrażenia

$$1124,2+1\frac{1}{2}\cdot\left(-18\frac{3}{5}-(-5,4):\frac{9}{13}\right)$$

i dowiedz się rok założenia soboru św. Michała o Złotych Kopułach w Kijowie.

75. Uprość wyrażenie $5(2{,}6a+3{,}4b)-2(6a-2{,}5b)$ i znajdź jego wartość, jeżeli a $=-11$; $b=-1\frac{3}{22}$.

76. Uprość wyrażenie $6(1{,}5x+2{,}5y)-5(2x-3y)$ i znajdź jego wartość, jeżeli $x=-2$; $y=-1\frac{7}{30}$.

4 **77.** Znajdź sumę, wyrazami której są liczby: odwrotna i przeciwna do liczby 2,6.

78. Znajdź wartość wyrażenia a^2, jeżeli $a=14,75-2\frac{13}{20}+3\frac{2}{9}\cdot(-5,4)$.

79. Znajdź wartość wyrażenia b^3, jeżeli $b=24{,}25-1\frac{17}{20}+4\frac{5}{6}\cdot(-4{,}8)$.

80. Znajdź wartość wyrażenia $10b-(2b+4x)$, jeżeli $x-2b=-5$.

81. Znajdź wartość wyrażenia $15a-(3a+4m)$, jeżeli $m-3a=-3$.

Przygotuj się do przyswojenia nowego materiału

82. Czy jest liczba –2 pierwiastkiem równania:

1) $x+5=7$; 2) $x\cdot 4=-8$; 3) $x-3=-5$; 4) $-10:x=-5$?

83. Znajdź pierwiastek równania:

1) $x-3=8$; 2) $7+x=3$; 3) $-4x=-20$; 4) $x:3=-7$.

Jeżeli potrzebujesz przypomnieć sobie pojęcie lub definicję z materiału teoretycznego za 5-6 klasy, można to zrobić, odwiedzając link *https://cutt.ly/AwKIdi35* lub skanując kod QR.

ROZDZIAŁ 1

RÓWNANIE LINIOWE Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ

W TYM ROZDZIALE:

- **przypomnisz** sobie właściwości równań z jedną niewiadomą;
- **zapoznasz się** z równaniem liniowym z jedną niewiadomą;
- **nauczysz się** rozwiązywać równania liniowe z jedną niewiadomą i równania do nich sprowadzalne; zadania tekstowe za pomocą równań.

$ax = b$

$2x = -3$

$15x = 0$

§ 1. Ogólne informacje o równaniach

Równanie i jego rozwiązania

Przez wiele stuleci algebra rozwijała się jako nauka o równaniach.

Równaniem nazywamy równość, która zawiera niewiadomą.

Podstawowe informacje o równaniach już znasz z poprzednich klas. Wyrażenie, zapisane w równaniu po lewej stronie znaku równości nazywamy *lewą stroną równania*, a wyrażenie zapisane po prawej stronie – *prawą stroną równania*.

Jeżeli w równaniu $4x - 6 = x$ zamiast niewiadomej x podstawimy liczbę 2, to otrzymamy prawdziwą równość liczbową: $4 \cdot 2 - 6 = 2$, ponieważ wartości liczbowe obu stron będą sobie równe. W tym przypadku mówi się, że liczba 2 jest *pierwiastkiem równania*.

Wartość niewiadomej, która przekształca równanie w prawdziwą równość liczbową nazywamy ***pierwiastkiem*** (lub ***rozwiązaniem***) ***równania***.

O liczbie, która jest pierwiastkiem równania, również mówimy, że spełnia dane równanie

Różne równania mogą mieć różną ilość pierwiastków.

Na przykład, równanie $4x - 6 = x$ ma tylko jeden pierwiastek – liczbę 2. Równanie $x(x - 6) = 0$ ma dwa pierwiastki – liczby 0 i 6. Równanie

$x + 0{,}1 = 0{,}1 + x$ spełni dowolną wartość niewiadomej x, czyli jakakolwiek liczba jest jej pierwiastkiem, więc to równanie ma nieskończoną ilość pierwiastków. Ale nie istnieje żandej wartości niewiadomej x, które przekształciłoby równanie $x + 1 = x$ w prawdziwą równość liczbową, ponieważ dla każdej wartości niewiadomej x wartość lewej strony równania będzie na 1 więcej od wartości jego prawej strony. Dlatego równanie $x + 1 = x$ nie ma pierwiastków.

***Rozwiązać równanie* – oznacza znaleźć wszystkie jego pierwiastki lub udowodnić, że pierwiastki nie istnieją.**

Równania równoważne

Rozpatrzymy równanie $x + 1 = 5$ i $3x = 12$. Każde z nich ma jeden pierwiastek – liczbę 4. Takie równanie jest *równoważnym*.

Dwa równania nazywamy ***równoważnymi***, jeżeli one mają takie same pierwiastki. Do równoważnych należą również takie równania, w których pierwiastki nie istnieją.

Przykład 1. Czy są równoważnymi następujące równania:
1) $x + 3 = 4$ i $5x = 10$;
2) $x + 2 = x$ i $2 - x = 5 - x$;
3) $18 - x = 11$ i $21 : x = 3$?

Rozwiązanie. 1) Pierwiastkiem równania $x + 3 = 4$ jest liczba 1, a pierwiastkiem równania $5x = 10$ – liczba 2. Dlatego równanieя $x + 3 = 4$ i $5x = 10$ nie są równoważne.
2) W żadnym z równań $x + 2 = x$ i $2 - x = 5 - x$ nie istnieje pierwiastków, dlatego te równania są równoważne.
3) Pierwiastkiem równania $18 - x = 11$ jest liczba 7. Pierwiastkiem równania $21 : x = 3$ jest również liczba 7. Dlatego równanie $18 - x = 11$ i $21 : x = 3$ – są równoważne

Odpowiedź: 1) nie; 2) tak, 3) tak.

Właściwości równań

Aby rozwiązywać równania, używamy cechy, które przekszatałcają równanie na równaważne do nich równania.

1) jeżeli w jakiejkolwiek części równania otworzyć nawiasy lub zredukować wyrazy podobne, wówczas otrzymamy równanie równoważne danemu;

2) jeżeli w równaniu przeniesiemy wyrazy z jednej strony równania na drugą, zmieniając jego znak na przeciwny, to otrzymamy równanie równoważne danemu;
3) jeżeli obie części równania pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę inną niż zero, to otrzymamy równanie równoważne.

Przykład 2. Wyjaśnij, czy równania są równoważne:
1) $2(x-1)=5x$ i $2x-2=5x$;
2) $3a+2=5a-a-7$ i $3a+2=4a-7$;
3) $5x=2x+9$ i $5x-2x=9$;
4) $0{,}5b=1{,}5b-3{,}5$ i $b=3b-7$.

Rozwiązanie. 1) Równanie $2(x-1)=5x$ i $2x-2=5x$ jest równoważne, ponieważ drugie równanie otrzymujemy z pierwszego za pomocą otwarcia nawiasów w jego lewej stronie.
2) Równanie $3a+2=5a-a-7$ i $3a+2=4a-7$ – równoważne, ponieważ drugie równanie otrzymujemy z pierwszego za pomocą redukcji wyrazów podobnych w jego prawej stronie.
3) Równanie $5x=2x+9$ i $5x-2x=9$ – równoważne, ponieważ drugie równanie otrzymujemy z pierwszego za pomocą przeniesienia wyrazu z prawej strony równania na lewą ze zmianą znaku tego wyrazu na przeciwny.
4) Równanie $0{,}5b=1{,}5b-3{,}5$ i $b=3b-7$ – równoważne, ponieważ drugie równanie otrzymujemy za pomocą mnożenia na 2 obu stron pierwszego równania.
Odpowiedź: 1) – 4) tak, równania równoważne.

Dawno, dawno temu...

W IX wieku wybitny arabski matematyk Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi w swoim dziele „Kitab al-dżabr wa-al-mukabala" sformułował i usystematyzował dostępne wówczas metody rozwiązywania równań. Termin al-dżabr, który zaczerpnięto z jego książki (w tłumaczeniu z arabskiego oznacza „odtwarzanie") zaczęto później używać jako „algebra" i dał nazwę całej nauce.

W czasach, kiedy al-Khwarizmi pisał swoje dzieło, liczby ujemne uważano za nieprawdziwe. Dlatego, w momencie przenoszenia liczby o współczynniku ujemnym w drugą stronę, zmieniając jej znak, uważano, że ona „odtwarza się" (staje się dodatnim), czyli z nieprawdziwego przekształca się na prawdziwe. Właśnie takie przekształcenie równań al-Khwarizmi nazwał „odtworzeniem".

Właściwość wzajemnego redukowania wyrazów podobnych w przeciwstawnych stronach, al-Khwarizmi nazwał „przeciwstawianie” (z arabskiego – „wa-al-mukabala”).

Al-Khwarizmi był pierwszym uczonym, który oddzielił algebrę od arytmetyki i rozpatrzył ją jako oddzielną naukę matematyczną. Algebrę al-Khwarizmi Europejczycy studiowali na łacinie przez XII-XVI wieki. Dalszy rozwój algebry związany jest właśnie z europejskimi uczonymi, zwłaszcza z włoskimi matematykami epoki renesansu.

Do xIX wieku algebra rozwijała się jako nauka, która bada metody rozwiązywania równań. Później ona wzbogaciła się nowymi treściami: redukcja wyrazów, funkcje, rozwiązywanie nierówności itp. A teraz równanie jest tylko jedną z części składowych algebry.

Muhammad Ibn Musa al-Khwarizmi (783 – ok. 850)

Co nazywamy równaniem? ○ Co nazywamy pierwiastkiem (lub rozwiązaniem) równania? ○ Co znaczy rozwiązać równanie? ○ Jakie równania nazywamy równoważnymi? ○ Jakie właściwości wykorzystujemy podczas rozwiązywania równań?

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

1

84. (*Ustnie.*) Który z zapisów jest równaniem (uzasadnij odpowiedź):

1) $4x - 12 > 0$; 2) $3x + 7$;
3) $4x - 2 = 10$; 4) $(14 - 10) \cdot 2 = 8$?

85. (*Ustnie.*) Czy liczba 4 jest pierwiastkiem równania:

1) $2x = 8$; 2) $x - 2 = 3$; 3) $2x - 3 = 6$; 4) $32 : x = 8$?

86. Czy liczba 3 jest rozwiązaniem równania:

1) $x + 5 = 8$; 2) $2x = 9$; 3) $x - 4 = -1$; 4) $x : 3 = 0$?

2

87. Które z liczb są pierwiastkiem równania $x^2 = 2x + 3$:

1) 0; 2) –1; 3) 1; 4) 3?

88. Czy jest pierwiastkiem równania $x^2 = 4 - 3x$ liczba:

1) 0; 2) 1; 3) –2; 4) –4?

89. Udowodnij, że każda z liczb 1,2 i –1,2 jest pierwiastkiem równania $x^2 = 1{,}44$.

90. Czy poniższe równania są równoważne

1) $x + 2 = 5$ i $x : 3 = 1$; 2) $x - 3 = 7$ i $2x = 18$?

91. Czy poniższe równania są równoważne:

1) $x - 2 = 3$ i $2x = 10$; 2) $x + 3 = 7$ i $x : 2 = 3$?

3 **92.** Udowodnij, że:
1) pierwiastkiem równania $2(x-3)=2x-6$ jest dowolna liczba;
2) równanie $y-7=y$ nie ma pierwiastków.

93. Udowodnij, że:
1) pierwiastkiem równania $3(2-c)=6-3c$ jest dowolna liczba;
2) równanie $x=x+8$ nie ma pierwiastków.

94. Napisz równanie, które będzie zawierało:
1) jedyny pierwiastek – liczbę -2;
2) dwa pierwiastki – liczby 5 i -5.

95. Wyjaśnij, nie rozwiązując równań, czy są one równoważne:
1) $4(x-2)=19$ i $4x-8=19$;
2) $2x-3=3x+5$ i $2x-3x=5+3$;
3) $8(x-3)=40$ i $x-3=5$;
4) $\frac{2x}{3}=11$ i $2x=33$.

96. Wyjaśnij, nie rozwiązując, czy równanie są równoważne:
1) $8(x-1)=5$ i $8x-8=5$;
2) $3x+7=4x-8$ i $3x-4x=-8-7$;
3) $9(x+2)=18$ i $x+2=2$;
4) $-\frac{3x}{4}=7$ i $-3x=28$.

4 **97.** Czy poniższe równania posiada rozwiązanie:
1) $x+2=2-x$;
2) $x+3=3+x$;
3) $x+1=-1+x$;
4) $0\cdot x=0$;
5) $0\cdot(x-1)=3$;
6) $5(x-1)=5x-5$;
7) $0:x=0$;
8) $2(x-3)=2x-7$?

Ćwiczenia powtórzeniowe

98. Oblicz:
1) $\frac{2}{3}+\frac{7}{12}$;
2) $\frac{8}{21}-\frac{3}{14}$;
3) $2\frac{3}{5}+3\frac{7}{10}$;
4) $\frac{5}{11}-\frac{2}{33}$;
5) $\frac{9}{20}+1\frac{1}{15}$;
6) $5\frac{4}{15}-1\frac{2}{7}$.

99. Znajdź:
1) 25 % od liczby 200;
2) 13 % od liczby 82;
3) 20,5 % od liczby 64;
4) 21 % od liczby $3\frac{2}{7}$.

Matematyka życia

100. Aby zaoszczędzić na zużyciu energii elektrycznej, gospodarstwo domowe zdecydowała się na zamontowanie liczniki dwutaryfowego. Opłata za prąd w godzinach pozaszczytowych wynosi 50 % opłaty w odróżnieniu od godzin szczytowych. Licznik zakupiono za 1500 UAH i jeszcze 500 UAH zapłacono za montaż i przepisanie licznika. Od czerwca 2023 roku taryfa dla gospodarstw domowych stanowi 2,64 UAH za 1 kWh. Gospodarstwo domowe zużywa 500 kWh energii elektrycznej miesięcznie, z czego 100 kWh w godzinach pozaszczytowych. Według licznika dwutaryfowego koszt energii elektrycznej, wykorzystywanej w godzinach pozaszczytowych obliczany jest według taryfy 1,32 UAH za 1 kWh. Za ile miesięcy gospodarstwu domowemu okupi się montaż licznika dwutaryfowego?

Przygotuj się na przyswojenie nowego materiału

101. Przenieś na lewą stronę równania wszystkie wyrazy, które zawierają niewiadomą, a na prawą stronę wszystkie wyrazy, które jej nie zawierają:

1) $5y + 11 = 8 - 3y$; 2) $6x - 13 = 2x + 7$;
3) $-2m - 13 = -3m + 5$; 4) $-1 - 4x = 17x - 8$.

102. Rozwiąż równanie:

1) $-3x = -21$; 2) $-2x = 40$;
3) $0,2x = -5$; 4) $50x = -5$.

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

103. Ile stanowi reszta przy dzieleniu na 1001 daje liczba

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 + 2000?$$

§ 2. Równanie liniowe z jedną niewiadomą

Równanie liniowe z jedną niewiadomą i jego rozwiązywanie

Wiemy, jak rozwiązać równanie $2x = -8$; $-0,01x = 17$; $\frac{1}{3}x = 5$. Każde z tych równań ma postać $ax = b$, gdzie x – niewiadoma, a i b – pewne liczby.

Równanie w postaci $ax = b$, gdzie x — niewiadoma, a i b — liczby, nazywamy równaniem ***liniowym z jedną niewiadomą***. Liczby a i b nazywamy ***współczynnikami*** tego równania.

Jeżeli $a \neq 0$, to równanie $ax = b$ nazywa się *równaniem pierwszego stopnia z jedną niewiadomą*. Dzieląc obie strony takiego równania na a, otrzymamy $x = \frac{b}{a}$, czyli jedynym pierwiastkiem tego równania jest liczba $\frac{b}{a}$.

Jeżeli $a = b = 0$, to równanie liniowe nabiera postaci $\mathbf{0}x = \mathbf{0}$. Jego pierwiastkiem jest jakakolwiek liczba, ponieważ dla dowolnej wartości x wartość lewej i prawej strony równania będą sobie równe i będą wynosić zero. Dlatego równanie $\mathbf{0}x = \mathbf{0}$ posiada nieskończenie wiele pierwiastków.

Jeżeli $a = 0$, a $b \neq 0$, równanie liniowe nabiera postaci $\mathbf{0}x = b$. Poza tym nie istnieje żadnej wartości niewiadomej x, która przekształcałaby lewą i prawą stronę równanie na jednakową liczbę. Przecież wartość lewej strony równania dla jakiejkolwiek wartości x będzie równa zeru, a wartość prawej strony - liczbie b, inna niż zero. Dlatego równanie $\mathbf{0}x = b$ dla $b \neq 0$ nie ma pierwiastków.

Uporządkujemy dane o rozwiązaniach równania liniowego $ax = b$, gdzie a i b – liczby, w postaci schematu:

$ax = b$, gdzie x – niewiadoma

jeżeli $a \neq 0$, wtedy $x = \frac{b}{a}$	**jeżeli $a = b = 0$, wtedy x – jakikolwa numer**	**jeżeli $a = 0$, $b \neq 0$, to równanie nie ma pierwiastków**

Przykład 1. Rozwiąż równanie:

1) $0{,}2x = 7$; 2) $-\frac{2}{3}x = 2\frac{2}{3}$; 3) $\mathbf{0}x = 7$.

Rozwiązanie.

1) $0{,}2x = 7$;
$x = 7 : 0{,}2$;
$x = 35$.
Odpowiedź: 35.

2) $-\frac{2}{3}x = 2\frac{2}{3}$;
$x = 2\frac{2}{3} : \left(-\frac{2}{3}\right)$;
$x = -4$.
Odpowiedź: -4.

3) $0x = 7$;
równanie nie ma pierwiastków.
Odpowiedź: *nie ma pierwiastków.*

Przykład 2. Dla jakiej wartości b równania będą równoważne $-2x = 8$ i $3x + b = 11$?

Rozwiązanie. 1) Rozwiążemy równanie $-2x = 8$.
Otrzymamy: $x = 8 : (-2)$; $x = -4$.
2) Żeby równania $-2x = 8$ i $3x + b = 11$ były równoważne koniecznością jest to, żeby drugie równanie miało jeden pierwiastek, który równa się liczbie -4. Ponieważ $x = -4$, wtedy otrzymamy: $-12 + b = 11$; $b = 23$. Lekko przekonać się, że równani $3x + 23 = 11$ ma jeden pierwiastek równy -4. *Odpowiedź:* 23.

Rozwiązywanie równań, które przekstałca się w liniowe

Procesem rozwiązywania wielu równań jest przekształcenie tych równań w liniowe za pomocą równoznacznych przekształceń według właściwości równań.

Przykład 3. Rozwiąż równanie:

1) $3(x + 3) - 2x = 6 - 4x$; 2) $\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{5-x}{3} = \dfrac{x+13}{6}$.

Rozwiązanie.

1. Pozbędziemy się mianowników (jeżeli one są)

1) $3(x + 3) - 2x = 6 - 4x$.

2) $\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{5-x}{3} = \dfrac{x+13}{6}$.

Pomnożymy obydwie strony równania na 6 (na najmniejszy wspólny mianownik ułamków). Otrzymamy:

$$\frac{6(x+1)}{2} + \frac{6(5-x)}{3} = \frac{6(x+13)}{6};$$

$$3(x + 1) + 2(5 - x) = x + 13.$$

2. Otworzymy nawiasy (jeżeli one są):

$3x + 9 - 2x = 6 - 4x$. | $3x + 3 + 10 - 2x = x + 13$.

3. Przeniesiemy wyrazy z niewiadomymi w lewą stronę równania, a inne – w prawą, zmianiając znaki tych wyrazów na przeciwne:

$3x - 2x + 4x = 6 - 9$. | $3x - 2x - x = 13 - 3 - 10$.

4. Zredukujemy wyrazy podobne:

$5x = -3$. | $0x = 0$.

5. Rozwiążemy otrzymane równanie liniowe:

$x = -3 : 5$;
$x = -0{,}6$.
Odpowiedź: $-0{,}6$.

x – dowolna liczba.
Odpowiedź: dowolna liczba.

Przykład 4. Rozwiąż równanie $5(x+p)=3x-7p$, x – niewiadoma.

Rozwiązanie. Otworzymy nawiasy w lewej stronie równania:
$5x+5p=3x-7p$.
Przeniesiemy wyraz 3x na lewą stronę, a $5p$ – na prawą.
Otrzymamy: $5x-3x=-7p-5p$, czyli $2x=-12p$.
Wtedy $x=(-12p):2$, czyli $x=(-12:2)p$, więc, $x=-6p$.
Odpowiedź: $-6p$.

Przykład 5. *Rozwiąż równanie* $|2x-7|=3$.

Rozwiązanie. Żeby wartość bezwzględna jakiegoś wyrazu była równa liczbie 3, wartość tego wyrazy musi być równa 3 lub –3.
Otrzymamy: $|2x-7|=3$;

$2x-7=3$;	*lub*	$2x-7=-3$;
$2x=10$;		$2x=4$;
$x=5$.		$x=2$.

Odpowiedź: 5; 2.

Jakie równanie nazywamy równaniem liniowym z jedną niewiadomą? Podaj przykłady równań liniowych. ○ W jakim przypadku równanie $ax=b$ ma jeden pierwiastek? ○ W jakim przypadku równanie $ax=b$ ma nieskończenie wiele pierwiastków? ○ W jakim przypadku równanie $ax=b$ nie ma pierwiastków?

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

1 **104.** (*Ustnie.*) Które z równań jest liniowe:

1) $15x=0$; 2) $-7x=-\frac{1}{2}$;
3) $x^2=2x$; 4) $0x=19$;
5) $x+3=x^2$; 6) $0x=0$?

105. (*Ustnie.*) Ile pierwiastków ma równanie:
1) $2x=-3$;
2) $0x=7$;
3) $0x=0$?

106. Wyjaśnij, które z danych równań ma tylko jeden pierwiastek, nie ma pierwiastków, ma nieskończenie wiele pierwiastków:
1) $-2x=-9$; 2) $0x=0$;
3) $0{,}42x=0$; 4) $17=0x$;
5) $\frac{2}{3}x=-9$; 6) $0x=-12$.

2 **107.** (*Ustnie.*) Rozwiąż równanie:

1) $-2x = -12$; 2) $0{,}5x = -2{,}5$; 3) $-2{,}5x = 7{,}5$;

4) $\frac{1}{5}x = \frac{3}{10}$; 5) $\frac{4}{7}x = 1$; 6) $-5x = -12$.

108. Rozwiąż równanie:

1) $-3x = -21$; 2) $-2x = \frac{2}{9}$; 3) $-\frac{1}{5}x = -5$;

4) $50x = 5$; 5) $-x = 1\frac{2}{7}$; 6) $-0{,}01x = 0{,}17$;

7) $\frac{2}{9}x = -\frac{4}{27}$; 8) $-1{,}2x = -4{,}2$; 9) $\frac{7}{8}x = 0$.

109. Znajdź pierwiastek równania:

1) $2x = -8$; 2) $\frac{1}{5}x = 9$; 3) $-3x = \frac{1}{4}$;

4) $-10x = -5$; 5) $\frac{2}{15}x = 0$; 6) $0{,}1x = -0{,}18$.

110. Określ, co należy zapisać w prawej stronie równania zamiast luk, jeżeli znamy jego pierwiastek:

1) $8x = \dots$; $x = -9$; 2) $-9x = \dots$; $x = 0$; 3) $\frac{3}{4}x = \dots$; $x = 12$.

111. Znajdź pierwiastek równania:

1) $7x + 14 = 0$; 2) $0{,}3x - 21 = 0{,}5x - 23$;

3) $4x + 3 = 6x - 13$; 4) $5x + (3x - 7) = 9$;

5) $47 = 10 - (9x + 2)$; 6) $(3x + 2) - (8x + 6) = 14$.

112. Rozwiąż równanie:

1) $2x - 10 = 0$; 2) $1{,}4x - 12 = 0{,}9x + 4$;

3) $3x + 14 = 5x + 16$; 4) $12 - (5x + 10) = -3$;

5) $6 - (8x + 11) = -1$; 6) $(3x - 4) - (6 - 4x) = 4$.

113. Które z równań jest równoważne równaniu $5x = 10$:

1) $x + 3 = 5$; 2) $5 - x = 7$;

3) $x + 2 = x + 1$; 4) $x - 7 = -5$;

5) $x = 8 - 3x$; 6) $4x - 7 = 4x$?

114. Czy równania są równoważne:

1) $4x - x = 17$ i $3x = 17$; 2) $5x - 9 = 3x$ i $6x = 21$;

3) $2x = -12$ i $x + 6 = 0$; 4) $12x = 0$ i $15x = 15$?

115. Dla jakiej wartości x wartość wyrazu:
1) $3x + 7$ równa się -2;
2) $4(x + 1)$ jest równa wartości wyrazu $5x - 9$?

116. Dla jakiej wartości y:
1) wartość wyrazu $5y - 13$ równa się -3;
2) wartość wyrazów $3(y - 2)$ i $13y - 8$ są równe sobie?

117. Rozwiąż równanie:

1) $\frac{x+1}{3} = 5$; 2) $\frac{2x-7}{5} = 1$; 3) $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 8$; 4) $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 1$.

118. Znajdź pierwiastek równania:

1) $\frac{x-2}{4} = 1$; 2) $\frac{3x+2}{5} = 4$; 3) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 1$; 4) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$.

119. Ułóż równanie liniowe, którego pierwiastek wynosi:
1) liczba -2; 2) liczba $-0{,}2$.

120. Ułóż równanie liniowe:
1) które nie ma pierwiastków; 2) pierwiastkiem którego będzie dowolna liczba.

121. Ułóż równanie liniowe, pierwiastek którego wynosi:
1) liczba -8; 2) dowolna liczba.

3 **122.** Znajdź pierwiastek równania:
1) $(4x - 2) + (5x - 4) = 9 - (5 - 11x)$;
2) $(7 - 8x) - (9 - 12x) + (5x + 4) = -16$;
3) $3(4x - 5) - 10(2x - 1) = 33$;
4) $9(3(x + 1) - 2x) = 7(x + 1)$.

123. Rozwiąż równanie:
1) $(9x - 4) + (15x - 5) = 18 - (25 - 22x)$;
2) $(10x + 6) - (9 - 9x) + (8 - 11x) = -19$;
3) $7(x - 1) - 3(2x + 1) = -x - 15$;
4) $5(4(x - 1) - 3x) = 9x$.

124. Rozwiąż równanie: $\frac{3x-11}{4} = \frac{2x-2}{3}$ i $\frac{4y-16}{2} = \frac{6y-10}{5}$.

Znajdź iloczyn 10xy i dowiedz się rok założenia Czerniowieckiego Uniwersytetu Narodowego im. Jurija Fedkowycza

125. Rozwiąż równanie: $\frac{2x+13}{3} = \frac{6x-1}{4}$ i $\frac{3y-9}{5} = \frac{2y+6}{6}$.

Znajdź wartość wyrazu $x + y + 1788$ i dowiedz się rok założenia Charkowskiego Uniwersytetu Narodowego im. Wasyla Kazarina.

126. Rozwiąż równanie, gdzie x – niewiadoma:

1) $2x + a = x + a$; 2) $b + x = c - x$;
3) $6x + 2m = x - 8m$; 4) $9a + x = 3b - 2x$.

127. Rozwiąż równanie, gdzie x – niewiadoma:

1) $7x + m = 2x + m$; 2) $a + x = 2m - x$;
3) $3x + b = 9b - x$; 4) $5p + 2x = 10a - 3x$.

128. Czy równania są równoważne:

1) $2x - 4 = 2$ i $5(x - 3) + 1 = 3x - 8$;
2) $5x + 3 = 8$ i $7(x - 2) + 20 = 4x + 3$;
3) $5x = 0$ i $0 \cdot x = 5$;
4) $7x + 1 = 7x + 2$ i $5(x + 1) = 5x + 5$;
5) $0 : x = 7$ i $0 \cdot x = 7$;
6) $3(x - 2) = 3x - 6$ i $2(x + 7) = 2(x + 1) + 12$?

129. Przy jakiej wartości y wartość wyrażenia:

1) $5y + 7$ trzy razy większa niż wartość wyrażenia $y + 5$;
2) $2y - 4$ o 7,4 większa niż wartość wyrażenia $3 - 7y$?

130. Przy jakiej wartości x wartość wyrażenia:

1) $7x + 8$ dwa razy większa niż wartość wyrażenia $x + 7$;
2) $5x - 8$ o 17,2 mniejsza niż wartość wyrażenia $x + 2$?

131. Ułóż równanie, które byłoby równoważne równaniu

$$7(2x - 8) = 5(7x - 8) - 15x.$$

132. Rozwiąż równanie:

1) $|x| + 3 = 7$; 2) $|x| - 2 = -9$; 3) $2|x| - 6 = 0$;
4) $|x + 5| = 0$; 5) $|7 - x| = 1$; 6) $|x + 12| = -3$;
7) $|2x + 1| = 7$; 8) $2(|x| - 3) = |x|$; 9) $\frac{1}{2}|x - 1| + 3 = 5$.

133. Rozwiąż równanie:

1) $|x| - 5 = 4$; 2) $|x| + 1 = -2$; 3) $\frac{1}{2}|x| - 4 = 0$;
4) $|2x - 1| = 0$; 5) $|2x - 7| = 3$; 6) $4(|x| - 3) = |x|$.

134. Przy jakiej wartości a równanie:

1) $2ax = 16$ ma pierwiastek równy 4;
2) $3x = a$ ma pierwiastek równy $\frac{4}{7}$;
3) $5(a + 1)x = 40$ ma pierwiastek równy –1?

135. Przy jakiej wartości b pierwiastkiem równania:

1) $3bx = -24$ *jest liczba* -4; 2) $(2b - 5)x = 45$ *jest liczba* 3?

136. Rozwiąż równanie:

1) $4x + 7 = 3(x - 2) + x$; 2) $2x + 5 = 2(x - 4) + 13$.

137. Znajdź pierwiastek równania:

1) $3(x - 2) + 4x = 7(x - 1) + 1$; 2) $2(x + 1) + 4x = 6(x + 3)$.

138. Rozwiąż równanie:

1) $\frac{3x-1}{2} + \frac{6x+3}{11} = 10$; 2) $\frac{8x-3}{7} - \frac{3x+1}{10} = 2$;

3) $\frac{x}{10} + \frac{2x}{5} = \frac{7x}{15} - \frac{1}{6}$; 4) $\frac{1+2x}{2} - \frac{3x+2}{3} = \frac{5x+4}{6}$;

5) $\frac{2x-3}{5} - \frac{1-x}{4} + \frac{5x+1}{20} = \frac{9x+3}{10}$;

6) $\frac{3x-5}{4} - \frac{2-x}{3} + \frac{2x+5}{12} = \frac{5x-6}{4}$.

139. Znajdź pierwiastek równania:

1) $\frac{2x+1}{3} + \frac{x+7}{2} = 5$; 2) $\frac{5x-6}{12} - \frac{x-5}{8} = 1$;

3) $\frac{x}{3} + \frac{2x}{9} = \frac{5x}{6} - \frac{1}{18}$; 4) $\frac{3x+1}{5} - \frac{2+x}{2} = \frac{x-8}{10}$.

4 **140.** Przy jakiej wartości b równania mają jednakowe pierwiastki:

1) $4x - 3 = 5$ i $3x + b = 17$; 2) $x + b = 9$ i $2x - b = x$?

141. Przy jakiej wartości a równania mają jednakowe pierwiastki:

1) $2x - 3 = 7$ i $a - 3x = 9$; 2) $x + a = 7$ i $3x - a = 2x$?

142. Znajdź wszystkie wartości całkowite m dla których pierwiastek równania $mx = 4$ jest liczbą całkowitą.

143. Znajdź wszystkie wartości całkowite b, dla których pierwiastek równania $bx = -6$ jest liczbą naturalną.

144. Przy jakiej wartości a nie ma pierwiastków równania:

1) $(a - 1)x = 5$; 2) $(a + 3)x = a - 2$; 3) $(a - 4)x = a - 4$?

145. Przy jakiej wartości b nie ma rozwiązania równania:

1) $(b + 1)x = 6$; 2) $(b - 3)x = b$; 3) $(b + 1)x = b + 1$?

146. Przy jakiej wartości m dowolna liczba jest pierwiastkiem równania:

1) $(m - 1)x = 1 - m$;
2) $m(m + 2)x = (m + 2)$;
3) $(m - 3)x = 5$?

147. Przy jakiej wartości a jest nieskończenie wiele pierwiastków równania:
1) $(a + 2)x = 2 + a$;
2) $(a - 3)x = 9$;
3) $a(a - 4)x = 4 - a$?

148. Rozwiąż równanie, gdzie x – niewiadoma.
1) $(b + 1)x = 7$; 2) $(5 - b)x = b - 5$; 3) $(|b| - 2)x = b + 2$.

149. Rozwiąż równanie:
1) $|x| + 4x = 15$; 2) $|7x| - x = 24$.

Ćwiczenia powtórzeniowe

150. Oblicz wartość wyrażenia:
1) $4a + 12b + 8a$, *jeżeli* $a = -13$; $b = 13$;
2) $(3x - 2x)(5m + 4m)$, *jeżeli* $x = 1\frac{8}{9}$; $m = -1\frac{1}{2}$.

151. Oblicz liczbę, jeżeli:
1) 15 % *z tego równa się* 300;
2) 11 % *z tego równa się* 28,16.

152. Zredukuj podobne wyrazy:
1) $7x - 2y + 3x + 17y$; 2) $-5{,}2 + 17a + 4{,}9 - 12a$;
3) $-5x + 7 - 2y + 5x - 12y$; 4) $5\frac{1}{2}p - 2\frac{5}{6}a + 7\frac{1}{2}p + 4\frac{1}{3}a$.

153. Otwórz nawiasy i zredukuj wyrażenie:
1) $a - (a - (2a - 8))$; 2) $5m - ((n - m) + 3n)$;
3) $15a - (2a - (3a - (a + 1)))$; 4) $b - (b - ((b - a) - 2a))$.

Matematyka życia

154. Dzienna dawka witaminy C dla osoby dorosłej wynosi 0,05 g. 100 g jagód maliny zawiera prawie 25 mg witaminy C (1 mg = 0,001 g).
1) Oblicz, ile gramów witaminy C zawiera 1 kg jagód malin.
2) Ile dziennych dawek witamy C może zastąpić spożycie 1 kg jadóg malin?

Przygotuj się do przyswojenia nowego materiału

155. Jedna liczba o 6 mniejsza od innej. Mniejsza liczba jest oznaczona symbolem x. Przedstaw symbolem x inną liczbę.

156. Jedna liczba jest 4 razy większa niż druga. Mniejsza liczba jest oznaczona symbolem x. Przedstaw symbolem x inną liczbę.

157. Na dwóch kwietnikach łącznie rośnie 62 tulipany, przy czym na jednym kwietniku jest o 6 tulipanów mniej niż na drugim. Ile tulipanów rośnie na każdym kwietniku?

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

158. Wiadomo, że $x + y = 13$. Dla jakich liczb naturalnych wartość x i y wyrażenie xy przyjmuje największą wartość?

§ 3. Rozwiązywanie zadań za pomocą równań liniowych. Równanie jako model matematyczny zadania

Model matematyczny zadania

Aby rozwiązać problem praktyczny, zaleca się najpierw stworzyć jego model matematyczny, czyli zapisać zależność matematyczną między wiadomymi i niewiadomymi wartościami za pomocą pojęć matematycznych, relacji, wzorów, równań itp.

Rozwiązywanie zadań tekstowych za pomocą równań

Rozpatrzymy zadania tekstowe, matematyczne modele których są równaniami liniowymi i równaniami, które przekształcają się na liniowe.

Rozwiązywać zadania za pomocą równania należy w następującej kolejności:

1) oznaczyć niewiadomą jedną z niewiadomych wartości;
2) inne niewiadome wartości (jeżeli one są) przedstawić poprzez wprowadzoną niewiadomą;
3) według warunku zadania ustalić współzależność między niewiadomymi i wiadomymi wartościami wielkości i ułożyć równanie;
4) rozwiązać otrzymane równanie;
5) przeanalizować rozwiązanie równania i znaleźć niewiadomą wartość, oraz, jeśli to konieczne, wartości innych niewiadomych wielkości;

Rozpatrzymy kilka zadań i rozwiążemy je za pomocą równania liniowego.

Zadanie 1. Na swoje urodziny siostry bliźniaczki Natalia i Helena otrzymały łącznie 127 *SMS*-ów z pozdrowieniami, przy tym Natalia otrzymała na 13 wiadomości więcej niż Helena. Ile *SMS*-ów otrzymała każda siostrzyczka na swoje urodziny?

Rozwiązanie. Zakładamy, że Helena otrzymała x wiadomości, wtedy Natalia – $(x + 13)$. Obie razem otrzymały – $(x + x + 13)$ wiadomości, co według warunku zadania równe 127.

Otrzymujemy równanie: $x + x + 13 = 127$. Skąd $x = 57$.

Więc Helena otrzymała 57 wiadomości,

$57 + 13 = 70$ (wiadom.) – otrzymała Natalia.

Odpowiedź: 70 wiadomości; 57 wiadomości.

Zadanie 2. Maksymalną dopuszczalną kwotę pożyczki wyliczamy według wzoru:

$$S = \frac{C}{3} \cdot n,$$

gdzie S – kwota pożyczki, C – średnia miesięczna wypłata pożyczkobiorcy. Dla pożyczki na okres jednego roku zakładamy, że $n = 9$, na okres dwóch lat – $n = 21$, na okres trzech lat – $n = 33$. Jaka najmniejsza kwota średniej miesięcznej wypłaty musi być u pożyczkobiorcy, żeby bank udzielił mu kredytu na kwotę 30 000 tys. na: 1) 1 rok; 2) 2 lata; 3) 3 lata?

Rozwiązanie. Zakładamy, że S = 30 000 UAH. Zakładamy, że najmniejsza kwota średniej miesięcznej wypłaty pożyczkobiorcy – x UAH.

1) Otrzymujemy równanie: $30\ 000 = \frac{x}{3} \cdot 9$; skąd $x = 10\ 000$.

Więc, średnia miesięczna wypłata pożyczkobiorcy musi wynosić co najmniej 10 000 UAH.

2) Otrzymujemy równanie: $30\ 000 = \frac{x}{3} \cdot 21$; skąd $x \approx 4285{,}7$.

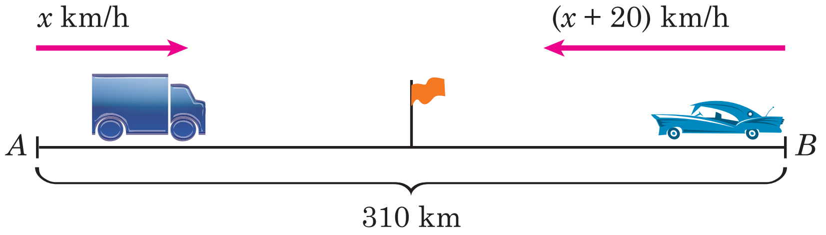
Więc, średnia miesięczna wypłata musi stanowić co najmniej 4286 UAH.

3) Otrzymujemy równanie: $30\ 000 = \frac{x}{3} \cdot 33$; skąd $x \approx 2727{,}3$.

Więc, średnia miesięczna wypłata musi stanowić co najmniej 2728 UAH.

Odpowiedź: 1) 10 000 UAH;
2) 4286 UAH;
3) 2728 UAH.

Zadanie 3. Z miasta A do miasta *B*, między którymi odległość wynosi 310 km, wyjechała ciężarówka. 30 minut później z miasta *B* do miasta *A* wyjechał samochód osobowy. Ciężarówka i samochód osobowy spotkali się za 2 h po wyruszeniu samochodu osobowego. Znajdź prędkość każdego z tych samochodów, jeżeli prędkość samochodu osobowego jest o 20 km/h większa od prędkości ciężarówki.



Rozwiązanie. Przyjmujemy, że prędkość ciężarówki – x km/h. Warunek zadania dogodnie przedstawić w postaci tablicy: :

Uczestnicy ruchu	***v*, km/h**	***t*, god**	***s*, km**	
Ciężarówka	x	2,5	$2{,}5x$	310 km
Samochód osobowy	$x + 20$	2	$2(x + 20)$	

Ponieważ samochody wyjechały sobie na spotkanie i spotkały się, to łącznie przejechały 310 km.

Otrzymujemy równanie: $\mathbf{2,5x + 2(x + 20) = 310.}$

Rozwiążemy go: $2{,}5x + 2x + 40 = 310;$

$4{,}5x = 270;$

$x = 60$ (km/h) – prędkość ciężarówki;

$60 + 20 = 80$ (km/h) - prędkość samochodu osobowego.

Odpowiedź: 60 km/h; 80 km/h.

? Jaką sekwencję działań należy zastosować przy rozwiązaniu zadania za pomocą równania?

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

1 **159.** (*Ustnie.*) Jedna liczba jest 30 większa niż druga. Mniejsza z nich jest oznaczona symbolem *x*. Przestaw za pomocą *x* większą z tych liczb.

160. (*Ustnie.*) Jedna liczba dodatnia jest 4 razy większa niż druga. Mniejsza z nich jest oznaczona symbolem *x*. Przestaw za pomocą *x* większą z tych liczb.

161. Na jednym kwietniku rośnie *x* krzewów róż, na drugim trzy razy więcej. Przestaw za pomocą *x* ilość krzewów róż, które rosną na drugim kwietniku.

162. (*Ustnie.*) Odległość równą x km rowerzystka pokonuje za 3 godziny. Przedstaw za pomocą x prędkość jej ruchu.

163. (*Ustnie.*) Pierwsza liczba jest oznaczona symbolem x, a druga liczba wynosi ćwierć pierwszej. Przedstaw drugą liczbę symbolem x.

164. Pierwsza liczba dorównuje x, a druga liczba wynosi 60 % pierwszej. Przedstaw symbolem x drugą liczbę.

165.(*Ustnie.*) Suma długości dwóch odcinków wynosi 16 cm. Długość jednego z nich x cm. Przedstaw za pomocą x długość drugiego odcinka.

166. (*Ustnie.*) Prędkość własna łodzi wynosi 24 km/h, a prędkość prędkość prądku rzeki – x km/h. Przedstaw w postaci x prędkość łodzi z prądem rzeki i pod prąd.

167. Zadali liczbę. Jeżeli odejmiemy od niej 7 i otrzymany wynik podzielimy na 9, to otrzymamy 12. Jaka liczba została zadana?

168. Znajdź liczbę, połowa której razem z jej jedną trzecią jest równa 40.

169. W dwóch cysternach razem jest 64 t paliwa, przy czym w pierwszej o 4 tony mniej niż w drugiej. Ile ton paliwa jest w każdej cysternie?

170. We flocie samochodowej ciężarówek jest 6 razy więcej niż samochodów osobowych. Ile jest samochodów osobowych we flocie samochodowej, jeżeli razem z ciężarówkami jest ich 91?

171. Jedna z dwóch liczb dodatnich jest trzy razy większa niż druga. Znajdź te liczby jeżeli ich różnica wynosi 32.

172. Babcia i mama mają razem 99 lat. Ile lat ma każda z nich, jeżeli babcia jest starsza od mamy na 25 lat?

173. Suma dwóch liczb stanowi 240, a ich relacja stanowi 5 : 7. Znajdź te liczby.

174. Różnica dwóch liczb stanowi 36, a ich relacja stanowi 7 : 4. Znajdź te liczby.

175. Obwód trójkąta wynosi 20 cm. Dwa jego boki są równe między sobą i każdy z nich na 1 dm większy od trzeciego. Oblicz boki trójkąta.

176. W ciągu dwóch dni sprzedano 384 kg bananów, przy tym drugiego dnia sprzedano $\frac{3}{5}$ od tego, co sprzedano pierwszego. Ile kilogramów bananów sprzedano w pierwszym dniu i ile w drugim?

177. Grupa studentów w drugim dniu pokonała $\frac{7}{8}$ odległości, którą pokonała pierwszego dnia. Ile kilometrów pokonali studenci w pierwszym dniu i ile w drugim, jeżeli w pierwszym dniu pokonano o 3 km więcej niż w drugim?

178. Babcia lepiła pierogi przez dwie godziny. W drugiej godzinie nalepiła na 5 % więcej pierogów niż w pierwszej. Ile pierogów nalepiła babcia w pierwszej godzinie i ile w drugiej, jeżeli w drugiej godzinie ona nalepiła na 3 pierogi więcej niż w pierwszej?

179. Za pralkę i jej podłączenie zapłacono 11 760 UAH. Koszt podłączenia wynosi 5 % ceny pralki. Ile kosztuje pralka?

180. W ciągu 2 h motocyklista pokonuje tą samą odległość, co rowerzystka w ciągu 5 h. Prędkość motocyklisty jest na 27 km/h większa od prędkości rowerzystki. Oblicz prędkość każdego z nich..

181. Skrzynka z pomarańczami jest o 3 kg cięższa od skrzynki z cytrynami. Ile wynosi masa każdego z nich, jeżeli masa czterech skrzynek z pomarańczami jest równa pięciu skrzynkom z cytrynami?

182. Turysta szedł z miasta do wsi z prędkością 4 km/h, a wracał z powrotem z prędkością 3 km/h. W drodze spędził 7 h. Oblicz odległość od miasta do wioski.

183. Obwód prostokąta wynosi 36 cm, przy tym jeden z boków jest o 4 cm większy od drugiego. Oblicz boki prostokąta i jego pole.

184. Podczas wakacji Sergiusz przeczytał dwa razy więcej opowiadań niż Kostek. Ale we wrześniu Kostkowi udało się przeczytać jeszcze 24 opowiadania, po czym okazało się, że chłopaki przeczytali jednakową ilość opowiadań. Ile opowiadań przeczytał każdy z chłopaków przed rozpoczęciem roku szkolnego?

185. Marysia miała trzy razy więcej pieniędzy niż Ola. Po tym jak Marysia straciła 18 UAH, dziewczyny miały jednakową ilość pieniędzy. Ile pieniędzy miała każda z dziewczyn na początku?

186. Z okazji rocznicy rocznicy swojego otwarcia sieć cukierni dawała swoim klientom zestawy słodyczy marki handlowej „Dobre", „Słodko" i „Smacznie" gratis. Na końcu świętowania okazało się, że zestawów „Słodko" sprezentowano o 12 więcej niż zestawów „Dobre", a zestawów „Smacznie" o 31 więcej niż „Słodko". Po ile zestawów każde marki handlowej podarowano, jeżeli klientów było 430 i każdy z nich otrzymał po jednym zestawie?

187. Jeden bok trójkąta jest o 9 cm mniejszy niż drugi i dwa razy mniejszy niż trzeci. Oblicz boki trójkąta, jeżeli jego obwód wynosi 105 cm.

188. Czy możliwe jest umieszczenie 68 puszek konserw w trzech pudełkach tak, aby drugie pudełko zawierało dwa razy więcej puszek niż pierwsze, a trzecie pudełko zawierało o 3 puszki mniej niż pierwsze?

189. Czy można ułożyć 68 puszek konserw w trzech skrzynkach w taki sposób, żeby w drugiej skrzynce było dwa razy więcej puszek niż w pierwszej, a w trzeciej o 3 puszki mniej niż w drugiej?

190. Ojciec ma teraz 38 lat, a jego syn 10. Za ile lat ojciec będzie trzy razy starszy od syna?

191. Na jednej działce krzewów agrestu jest trzy razy więcej niż na drugiej. Jeżeli z pierwszej działki zabrać 12 krzewów i posadzić na drugiej, to krzewów agrestu na obu działkach będzie jednakowo. Ile krzewów agrestu rośnie na każdej działce?

192. W dwóch skrzydłach pensjonatu mieszkała jednakowa ilość urlopowiczów. W związku z remontem postanowiono przesiedlić 24 urlopowiczów z pierwszego skrzydła do drugiego, po czym ilość urlopowiczów w pierwszym skrzydle zrobiła się 4 razy mniejsza niż w drugim. Po ile urlopowiczów mieszkało w każdym skrzydle do rozpoczęcia remontu?

193. W dwóch workach była jednakowa ilość cukru. Po tym jak z pierwszego worka przesypano 8 kg do drugiego, w nim zrobiło się dwa razy mniej cukru niż w drugim. Po ile kilogramów cukru było w każdym worku na początku?

194. Na kwotę 440 UAH kupiono 25 zeszytów w kratkę i linijkę. Cena zeszyta w linijkę – 17 UAH, a w kratkę – 18 UAH. Po ile zeszytów każdego rodzaju kupiono?

195. Na święto kupiono 12 opakowań cukierków po 55 UAH i po 62,5 UAH za opakowanie, łącznie na kwotę 697,5 UAH. Po ile opakowań każdego rodzaju kupiono?

196. Starożytne zadanie greckie. Pitagorasa zapytano: „Ile uczniów uczy się w twojej szkole?". Na co on odpowiedział: „Połowa wszystkich moich uczniów studiuje matematykę, ćwierć – muzykę, siódma część milczy i poza tym jest jeszcze trzy kobiety". Ile uczniów uczyło się w szkole Pitagorasa?

197. Masa bańki z mlekiem wynosi 25 kg i jeszcze połowę jego masy. Ile wynosi masa bańki z mlekiem?

4 **198.** $\frac{1}{4}$ jednej liczby jest równa $\frac{2}{3}$ drugiej liczby. Znajdź te liczby, jeżeli ich suma wynosi 66.

199. 60 % jednej liczby jest równa 45 % drugiej. Znajdź te liczby, jeżeli ich suma jest równa 210.

200. Łódź straciła na drogę względem prądu 2,5 h, a pod prąd 3,6 h. Odległość, którą przepłynęła łódka względem prądu okazała się na 7,6 km mniejszą niż odległość, którą przepnynęła pod prąd. Oblicz własną prędkość łódki, jeżeli prędkość nurtu wynosi 2 km/h.

201. Motorówka względem prądu rzeki płynęła 1,6 h, a pod prąd – 2,5 h. Odległość, którą pokonała motorówka pod prąd okazała się na 6,2 km większą niż odległość, którą pokonała motorówka względem prądu. Oblicz prędkość nurtu, jeżeli prędkość własna motorówka wynosi 16 km/h.

202. Rowerzysta wyjechał z punktu *A* do punktu *B* z prędkością **12 km/h.** Za 3 h z punktu *B* do punktu *A* wyjechała motocyklistka z prędkością 45 km/h. Ile godzin do spotkania się z motocyklistką jechał rowerzysta, jeżeli odległość od punktu *A* do punktu *B* wynosi 235,5 km? Na jakiej odległości od punktu *A* oni się spotkali?

203. W kierunku stacji kolejowej z osiedla z prędkością 14 km/h wyjechała rowerzystka, a 2 godziny po niej z tego samego miejsca, ale w przeciwnym kierunku z prędkością 4km/h wyruszył pieszy. Za ile godzin po swoim wyjściu pieszy znajdzie się na odległości 73 km od rowerzystki? Na jakiej odległości od osiedla będzie znajdować się na dany moment?

204. Pierwszy arbuz jest na 5 kg lżejszy od drugiego i trzy razy lżejszy od trzeciego. Pierwszy i trzeci arbuz łącznie dwa razy cięższe od drugiego. Znajdź masę każdego arbuza.

205. Podczas przygotowania do olimpiady z matematyki Janek rozwiązał o 3 zadania mniej niż Oksana i 2 razy mniej niż Sergiusz. Przy tym Janek i Sergiusz łącznie rozwiązali 2,1 razy więcej zadań niż Oksana. Ile zadań rozwiązał każdy z uczniów w trakcie przygotowywania się do olimpiady?

Ćwiczenia powtórzeniowe

206. Oblicz:

1) $-3\frac{1}{4} \cdot 3\frac{9}{13}$; 2) $-3\frac{1}{7} \cdot \left(-1\frac{3}{11}\right)$; 3) $5\frac{1}{3} \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right)$;

4) $-2\frac{4}{5} : 1\frac{1}{15}$; 5) $-2\frac{1}{31} : \left(-31\frac{1}{2}\right)$; 6) $\frac{7}{9} : (-14)$.

207. Ile jest procent:
1) liczba 7 od liczby 28;
2) liczba 2,7 od liczby $3\frac{3}{5}$?

208. Wytłumacz, dlaczego nie ma rozwiązania równanie:
1) $0 \cdot x = 15$; 2) $x + 8 = x$;
3) $y - 2 = y + 3$; 4) $7 - m = 2 - m$;
5) $0 : x = 13$; 6) $3(x + 1) = 3x$.

209. Znajdź wszystkie wartości a, dla których równanie $ax = -8$ ma:
1) dodatni pierwiastek;
2) ujemny pierwiastek.

Matematyka życia

210. Na autostradzie stoi znak drogowy, który pokazuje ograniczenie prędkości do 50 km/h na najbliższym odcinku drogi 10 km. Kierowca pokonał ten **odcinek w 10 minut.** Czy na tym odcinku drogi naruszył przepisy ruchu drogowego?

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

211. Mama, tato i dwójka ich dzieci muszą przeprawić się na łodzią na przeciwległy brzeg rzeki. Masa ciała taty – 75 kg, mamy – 60 kg, dzieci po 38 kg. Jak mają korzystać z łodzi, jeżeli jej ładowność to 80 kg i każdy w tej rodzinie umie wiosłować?

SAMODZIELNA PRACA DOMOWA NR 1

Zadania 1–12 mają po 4 warianty odpowiedzi (A-D), wśród których jest tylko jedna prawidłowa.

1

1. Pierwiastkiem jakiego równania jest liczba 8?
A. $x : 4 = 3$ **B.** $x - 9 = 1$
C. $x + 7 = 15$ **D.** $2x = 10$

2. Które z równań jest liniowe?
A. $4x^2 = 5$ **B.** $x + 7 = x^2$
C. $3x + x^2 = 0$ **D.** $2x = 0$

3. Które z równań nie ma pierwiastków?
A. $7x = 0$ **B.** $0x = 7$ **C.** $0x = 0$ **D.** $7x = 7$

2

4. Znajdź pierwiastek równania $0{,}3x - 1{,}5 = 0$.
A. 5 **B.** –5 **C.** $\frac{1}{5}$ **D.** $-\frac{1}{5}$

5. Które z równań jest równoważne równaniu $3x - 8 = 10$?
A. $2x = -12$ **B.** $x + 7 = 1$ **C.** $5x = 30$ **D.** $x - 9 = 3$

6. Na jednej z półek książek jest trzy razy więcej niż na innej. Ile książek na te półce, jeżeli razem na dwóch półkach jest 48 książek.
A. 12 **B.** 16 **C.** 30 **D.** 36

3

7. Wskaż równaniem, w którym pierwiastkiem będzie dowolna liczba.
A. $12x = -8$ **B.** $2(x - 1) = 2x$
C. $2(x - 1) = 2x - 2$ **D.** $2x = 2x - 2$

8. Znajdź pierwiastek równania $\frac{x+2}{5} + \frac{x-2}{10} = \frac{1}{2}$.
A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 5

9. Rozwiąż równanie $|2x - 5| = 7$. Jeżeli równanie ma tylko jeden pierwiastek, zapisz go w odpowiedzi; jeżeli równanie ma więcej niż jeden pierwiastek, zapisz ich sumę w odpowiedzi.
A. 7 **B.** 6 **C.** –1 **D.** 5

4

10. Znajdź najmniejszą wartość całkowitą a, dla której pierwiastkiem równania $ax = 8$ jest liczba całkowita.
A. 4 **B.** 1 **C.** –8 **D.** –16

11. Dla jakiej wartości a równanie $(a + 3)x = a(a - 3)$ nie ma rozwiązania?
A. nie ma takiej wartośći a **B.** –3 **C.** 0 **D.** 3

12. 80 % od liczby całkowitej jest równe $\frac{2}{7}$ drugiej liczby. Znajdź mniejszą z tych liczb, jeżeli ich suma wynosi 76.

A. 30 **B.** 24 **C.** 22 **D.** 20

Zadania 1–12 można także rozwiązać na stronie https://cutt.ly/HwKdb537 lub za pomocą QR kodu.

W zadaniu 13 trzeba dopasować informacje oznaczone cyframi i literami. Jedna odpowiedź jest zbędna.

13. W pierwszym koszyczku jest o 6 jabłek mniej niż w drugim i dwa razy mniej niż w trzecim. Razem w 3 koszyczkach jest 62 jabłka. Dopasuj pytania w zadaniu (1-3) do odpowiedzi na nie (A-D).

Pytania	*Odpowiedzi*
1. Ile jabłek jest w pierwszym koszyku?	**A**. 28 jabłek
2. Ile jabłek jest w drugim koszyku?	**B**. 20 jabłek
3. Ile jabłek jest w trzecim koszyku?	**C**. 16 jabłek
	D. 14 jabłek

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE WIEDZĘ Z § 1–3

1. Czy liczba 4 jest pierwiastkiem równania:
1) $x + 7 = 10$; 2) $3x = 12$?

2. Które z równań jest liniowym:
1) $5x = -2$; 2) $x^2 = 7$;
3) $7 : x = 7$; 4) $0x = 0$?

3. Ile pierwiastków ma równanie:
1) $-3x = 5$; 2) $0x = 7$?

4. Rozwiąż równanie:
1) $-4x = 12$; 2) $0{,}2x - 1{,}2 = 0$.

5. Czy dane równania są równoważne: $3x - 2 = x + 8$ i $2(x - 3) = x - 1$?

6. W pierwszym koszyku jest dwa razy więcej grzybów niż w drugim. Ile grzybów jest w każdym koszu, jeżeli w dwóch koszykach razem jest 78 grzybów?

7. Rozwiąż równania:
1) $\frac{2x+1}{5} + \frac{3x-2}{4} = 2$; 2) $5x - (x + 5) = 4(x - 2)$.

8. Łódź płynęła z prądem 3,5 h, a pod prąd 4,2 h. Odległość, którą pokonała łódź płynąca z prądem jest na 9,8 km większa niż odległość, którą pokonała łódź płynąca pod prąd. Znajdź własną prędkość łodzi, jeżeli prędkość prądu rzeki jest równa 2 km/h.

Dodatkowe zadania

3 **9.** Rozwiąż równanie $|4x - 3| = 5$.

4 **10.** Znajdź wszystkie wartości całkowite, dla których pierwiastek równania $ax = -6$ jest liczbą całkowitą.

11. Pieszy z miasta do wsi szedł z prędkością 4 km/h. Za 2 h z wioski do miasta wyruszyła rowerzystka z prędkością 16 km/h. Ile godzin jechała rowerzystka na spotkanie z pieszym, jeżeli odległość z wioski do miasta wynosi 38 km?

ĆWICZENIA POWTÓRZENIOWE DLA ROZDZIAŁU 1

Do § 1

1 **212.** Czy liczba –5 jest pierwiastkiem równania:
1) $x + 3 = 2$; 2) $2 - x = 7$; 3) $x : 5 = 1$; 4) $4x = -20$?

2 **213.** Udowodnij, że każda z liczb 2, –3 i 0 jest pierwiastkiem równania $x(x - 2)(x + 3) = 0$.

3 **214.** Sprawdź, czy równania są równoważne:
1) $|x| = 2$ i $x(x + 2) = 0$; 2) $|x| = 4$ i $x^2 = 16$.

4 **215.** Czy stwierdzenie jest poprawne: „Jeżeli każdy pierwiastek jednego równania jest pierwiastkiem drugiego, to te równania są równoważne?

Do § 2

1 **216.** Podaj ilość pierwiastków równania:
1) $7x = -12$; 2) $0x = 0$; 3) $-3x = -17$; 4) $0x = -8$.

2 **217.** Rozwiąż równanie:
1) $-\dfrac{2}{3}x = 6$; 2) $\dfrac{4}{7}x = -\dfrac{16}{21}$; 3) $\dfrac{x-1}{7} = 3$; 4) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} = 15$;
5) $4{,}7x - 2 = 4{,}5x + 3$; 6) $2x - 3 - (3x - 2) = -8$.

3 **218.** Znajdź pierwiastek równania:
1) $10(2x - 7) - 5(4x - 2) = -60$; 2) $3(5x - 4) - (15x - 2) = 9$;
3) $\dfrac{3x+1}{7} + \dfrac{2x+1}{5} = 2$; 4) $\dfrac{2x+1}{3} - \dfrac{7-x}{6} = \dfrac{5x-3}{2}$.

4 **219.** Dla jakiej wartości a:
1) równanie $ax = 8$ nie ma pierwiastków;
2 pierwiastkiem równania $(a + 3)x = a + 3$ jest dowolna liczba?

* **220.** Rozwiąż równanie $(a - 1)x = 8$ względem niewiadomej x.

Do § 3

1 **221.** Na warsztacie samochodowym w ciągu 3 dni odremontowali x samochodów. Zapisz w postaci x ilość dziennie naprawianych samochodów, jeżeli codziennie naprawiano jednakową ilość samochodów.

2 **222.** Obwód prostokąta jest równy 36 cm, a jego długość jest dwa razy większa niż szerokość. Oblicz boki prostokąta i jego pole.

3 **223.** Za 7 ołówków i 3 długopisy zapłacono 50 UAH 85 kop. Ile kosztuje jeden ołówek, jeżeli on jest tańczy od długopisu o 4 UAH 95 kop.?

224. W koszyczku było 4 razy mniej winogronu niż w skrzynce. Po tym jak ze skrzynki do kosza przełożono 1,5 kg winogronu, w koszyczku zostało trzy razy mniej winogronu niż w skrzynce. Ile kilogramów winogronu było na początku w koszyczku i ile w skrzynce?

225. W ciągu 4,5 h łódź z prądem rzeki pokonuje tę samą odległość, którą w ciągu 6 h pod prąd. Znajdź prędkość prądu, jeżeli prędkość własna łódki stanowi 14 km/h.

226. Na stacji przesiadkowej pociąg był opóźniony o 0,5 h. Zwiększając prędkość o 15 km/h, pociąg za 2 godziny dotarł do przystanka końcowego dokładnie zgodnie z harmonogramem. Ile wynosiła prędkość pociągu do opóźnienia?

4 **227.** Na dwóch talerzach było 60 pierogów. Po tym jak z pierwszego talerza zjedzono trzy razy więcej pierogów niż z drugiego, zostało na ni, dwa razy mniej pierogów niż na drugim. Po ile pierogów zostało na każdym talerzu?

228. Na premie dla pracowników biura przelano określoną kwotę pieniędzy. Jeżeli każdy otrzyma po 11 000 UAH, to zostanie jeszcze 2000 UAH, a żeby każdy otrzymał po 12 000 UAH nie wystarczy 6000 UAH. Ile pracowników biurowych i jaką kwotę pieniędzy przelano na premie?

* **229.** Na jednym stoisku z warzywami zaplanowano sprzedać 95 kg cytryn, a na drugim – 60 kg. Pierwsze codziennie sprzedawało po 7 kg, a drugie po 6 kg. Za ile dni cytryn przy pierwszym stoisku będzie dwa razy więcej niż w drugim?

230. Zmieszano 15-procentowy roztwór nawozu z 5-procentowym i otrzymano 180 g 7,5-procentowego roztworu. Po ile gramów każdego roztworu pobrano?

Najważniejsze w 1. rozdziale

RÓWNANIE

Równaniem nazywamy równość, która zawiera niewiadomą.

PIERWIASTEK RÓWNANIA

Wartość niewiadomej, która przekształca równanie w prawdziwą równość liczbową, nazywamy ***pierwiastkiem*** lub ***rozwiązaniem równania***.

Rozwiązać równanie oznacza znaleźć wszystkie jego pierwiastki lub udowodnić, że nie ma pierwiastków.

RÓWNANIA RÓWNOWAŻNE

Dwa równania nazywany ***równoważnymi***, jeżeli one mają takie same pierwiastki. Za równoważne uważane są również takie równania, które nie mają pierwiastków.

RÓWNANIA LINIOWE Z JEDNĄ NIEWIADOMĄ

Równanie w spotaci ax = b, gdzie x - niewiadoma, a i b – niektóre liczby, nazywamy równaniem ***liniowym z jedną niewiadomą.***

ROZWIĄZANIA RÓWNANIA LINIOWEGO

$ax = b$, x – niewiadoma, a i b – liczby

jeżeli $a \neq 0$, to $\boldsymbol{x} = \dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}}$	jeżeli $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$ i $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$, to x – dowolna liczba	jeżeli $a = 0$, i $b \neq 0$, to równanie nie ma pierwiastj

ROZWIĄZYWANIE ZADAŃ ZA POMOCĄ RÓWNAŃ LINIOWYCH

Rozwiązać zadanie za pomocą równania można w następującej kolejności:

1) oznaczyć niewiadomą jedną z niewiadomych wartości;
2) inne niewiadome wartości (jeżeli one są) wyrazić poprzez wprowadzoną niewiadomą;
3) według warunku zadania ustalić współzależność między niewiadomymi i wiadomymi wartościami wielkości i ułożyć równanie;
4) rozwiązać otrzymane równanie;
5) przeanalizować rozwiązanie równania i znaleźć niewiadomą wartość, oraz, jeśli to konieczne, wartości innych niewiadomych wielkości;
6) zapisać odpowiedź na zadanie.

ROZDZIAL 2

WYRAŻENIA CAŁKOWITE

$2y + 3y$

$(a+b)^2$

a^n

W TYM ROZDZIALE:

- przypomnisz sobie, co to wyrażenia liczbowe i literowe, ich znaczenie; potęgowanie, podstawa i wykładnik potęgowania;
- zapoznasz się z pojęciami jednomianu i wielomianu, tożsamości, tożsamością równych wyrażeń;
- nauczysz się wykonywać działania arytmetyczne na jednomianach i wielomianach; przekształcać wyrażenia tożsamościowe; stosować wzory skróconego mnożenia i właściwości potęgowania, rozkładać wielomiany na czynniki.

§ 4. Wyrażenia z niewiadomymi. Całkowite wyrażenia wymierne. Wartości liczbowe wyrażenia

Wyrażenia liczbowe i ich znaczenie

Wyrażenia liczbowe tworzy się z liczb za pomocą znaków arytmetycznych i nawiasów.

Na przykład, wyrażenia $12 \cdot 3 - 9$; $1{,}2^3$; $5\frac{1}{7} - \left(5{,}7 : 3 + 1\frac{7}{9}\right)$ są wyrażeniami liczbowymi.

Liczbę, która jest wynikiem wykonania wszystkich działań w wyrażeniu liczbowym, nazywamy wartością wyrażenia.

Na przykład, $12 \cdot 3 - 9 = 27$, dlatego 27 jest wartośćią liczbową wyrażenia $12 \cdot 3 - 9$.

Jeżeli wyrażenie liczbowe zawiera działanie niemożliwe do wykonania, to mówi się, że wyrażenie nie ma sensu (liczbowego). Na przykład, wyrażenie $5 : (8 : 2 - 4)$ nie ma sensu, ponieważ $8 : 2 - 4 = 0$ i następne działanie $5 : 0$ niemożliwe wykonać.

Wyrażenia z niewiadomymi

Oprócz wyrażeni liczbowych, w matematyce rozpatrują wyrażenia, które zawierają litery. Takie wyrażenia wcześniej były nazywane *literowymi*.

Przykład 1. Zakładamy, że trzeba obliczyć pole prostokąta, którego długość wynosi 10 cm, a szerokość – b cm.

Według wzoru pola prostokąta otrzymujemy: $S = 10b$. Jeżeli, na przykład, $b = 3$, wtedy $S = 10 \cdot 3 = 30$, a jeżeli $b = 7$, to $S = 70$.

W wyrażeniu $10b$ literze b można nadać różne wartości, czyli jej wartość może być zmienną. Odpowiednio zmieni się też wartość wyrażenia $10b$. Dlatego literę b w takim wyrażeniu nazywamy *niewiadomą*, a samo wyrażenie $10b$ – *wyrażeniem z niewiadomą*.

Wyrażenia z niewiadomymi tworzy się z liczb i niewiadomych za pomocą znaków działań arytmetycznych i nawiasów.

Na przykład, wyrażenia $5 + a$; $2(b - 3x)$; $\frac{c-5p}{d}$ – wyrażenia z niewiadomymi

Jeżeli zamiast niewiadomych w wyrażeniu podstawimy określone liczby, wtedy otrzymamy wyrażenie liczbowe. Jego wartość nazywamy ***liczbową wartością wyrażenia*** dla wybranych wartości niewiadomych.

Przykład 2. Znajdź wartość wyrażenia:

1) $(5 + b) : 4$, jeżeli $b = 0; -2$; 2) $\frac{a-c}{12}$, jeżeli $a = 17$, $c = -5$.

Rozwiązanie. 1) Jeżeli $b = 0$, wtedy $(5 + b) : 4 = (5 + 0) : 4 = 1{,}25$; jeżeli $b = -2$, wtedy $(5 + b) : 4 = (5 + (-2)) : 4 = 0{,}75$.

2) Jeżeli $a = 17$, $c = -5$, wtedy $\frac{a-c}{12} = \frac{17-(-5)}{12} = \frac{22}{12} = 1\frac{5}{6}$.

Odpowiedź: 1) 1,25; 0,75; 2) $1\frac{5}{6}$.

Wyrażenia wymierne

Wyrażenie, które zawiera tylko działania z dodawaniem, odejmowaniem, mnożeniem, dzieleniem i potęgowanie, nazywamy ***wyrażeniem wymiernym.***

Na przykład wyrażenia:

$$2a - m;\quad \frac{p+2q}{9};\quad -\frac{2}{3}(x-9+y);\quad \frac{5+x}{m};\quad \frac{17}{x^2-3};\quad a+b-\frac{1}{c}$$

są wyrażeniami wymiernymi.

Wyrażenie racjonalne, które nie zawiera dzielenia na wyrażenia z niewiadomą, nazywamy ***całkowitym wyrażeniem wymiernym.***

Jeżeli w wyrażeniu wymiernym jest dzielenie na wyrażenie z niewiadomą, wtedy nazywamy je ***ułamkowym wyrażeniem wymiernym***. Pierwsze trzy z powyższych wyrażeń wymiernych – całkowite, a trzy ostatnie – ułamkowe.

Wyrażenia z niewiadomymi wykorzystuje się dla zapisywania wzorów.

Na przykład,, $s = vt$ – wzór na obliczenie odległości,

$P = 2(a + b)$ – wzór na obliczenie obwodu prostokąta,

$n = 2k$, gdzie k – liczba naturalna – wzór na parzystą liczbę naturalną,,

$n = 2k + 1$, gdzie k – liczba naturalna lub 0 (lub $n = 2k - 1$, gdzie k – liczba naturalna), – wzór na nieparzystą liczbę całkowitą dodatnią,

$n = 7k$, gdzie k – liczba naturalna, – wzór liczby naturalnej, wielokrotność której 7.

Wyrażenia niewymierne będą rozpatrywane w kolejnych klasach.

Dawno, dawno temu...

Pojawienie się liter i znaków działań arytmetycznych w wyrażeniach matematycznych jest wynikiem rozwoju nauk matematycznych. W swoich pracach starożytni egipscy naukowcy nazywali poszukiwaną liczbę „hau" (w tłumaczeniu – „sterta"), a znaki działań matematycznych w ogóle nie używali, zapisując wszystko przeważnie słowami. I chociaż potrzeba używania znaków działań matematycznych powstała jeszcze w Starożytnym Egipcie, pojawiły się one znacznie później. Zamiast znaków dodawania i odejmowania starożytni matematycy wykorzystywali rysunki lub słowa, a to doprowadzało do nieporęcznych zapisów.

„W pracach naukowych matematycy zaczęli znaki działań arytmetycznych wykorzystywać począwszy od xV wieku. Stanem na dzień dzisiejszy wiadomo, kto i kiedy zaproponował niektóre znaki matematyczny w zapisach. Tym samym, znaki „+" i „-„ pojawiają się po raz pierwszy w 1489 roku w pracy „Arytmetyka" Johannesa Widmanna, profesora uniwersytetu w Lipsku. Znak „x" dla oznaczenia działania mnożenia wprowadził angielski matematyk William Oughtred w 1631 roku. Dla oznaczenia działania dzielenia wykorzystywał on ukośnik („/"). W pracach matematycznych ukośnik ułamkowy (dla oddzielenia licznika ułamka od jego mianownika) już w 1202 roku wykorzystywał Leonardo z Pizy, znany matematyk średniowiecznej Europy. Niemiecki matematyk, fizyk i filozof Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) zaproponował wykorzystywać jako znak mnożenia kropkę („·"), a jako znak dzielenia – dwukropek („:"). Stało się to w roku 1693 i 1684 odpowiednio. Znak równości („=") wprowadził w 1557 roku Robert Recorde, matematyk urodzony w Walii, który dłuższy czas był osobistym lekarzem brytyjskiej rodziny królewskiej.

Francois Viete
(*1540–1603*)

Ogromny wkład w rozwój symboliki algebraicznej wniósł w xVI wieku wybitny francuski matematyk Francois Viete, nazywanego „ojcem" algebry. Właśnie on zaczął oznaczać literami nie tylko niewiadome, ale również dowolne liczby, zwłaszcza współczynniki przy zmiennych.

Ale jego symbolika różniła się od współczesnej. Zamiast *x*, *x*2 i *x*3 Viete napisał litery *N* (*Numerus* - liczba), *Q* (*Quadratus* - kwadrat) i *C* (*Cubus* - sześcian) odpowiednio. Na przykład, równanie *x*3 + 7*x*2 - 8*x* = 20 on zapisywał w następującej postaci:

1*C* + 7*Q* - 8*N* *aequ* 20 (*aequali* – równa się).

Z czego składają się wyrażenia liczbowe? ○ Co nazywamy wartością wyrażenia liczbowego? ○ Czym jest wyrażenie z niewiadomymi? ○ Co nazywamy wartością liczbową wyrażenia dla wybranych wartości niewiadomych? ○ Podaj przykład wyrażenia liczbowego i wyrażenia z niewiadomymi. ○ Jakie wyrażenie nazywamy wyrażeniem całkowitym wymiernym?

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

1

231. (*Ustnie.*) Które z podanych wyrażeń są liczbowymi, a które wyrażeniami z niewiadomymi:

1) $5 + m^2 - a$; 2) $(12 - 3) : 4$;

3) $\dfrac{5 + x}{a + b}$; 4) $(0 - 8) \cdot 5 - 13$?

232. (*Ustnie.*) Które z wyrażeń wymiernych są całkowite, a które ułamkowe:

1) $\dfrac{a^3 + c}{5}$; 2) $\dfrac{5}{a^3 + c}$; 3) $m + \dfrac{x}{7}$; 4) $m + \dfrac{7}{x}$?

233. Zapisz osobno: wyrażenia liczbowe; wyrażenia z niewiadomymi; całkowite wyrażenia wymierne; ułamkowe wyrażenia wymierne:

1) $5 + c$; 2) $(2 - 15) \cdot 4$; 3) $\dfrac{a + m}{p}$; 4) $q^2 - 19$;

5) $7 + \dfrac{a}{5}$; 6) $\dfrac{1}{4}ab$; 7) $\dfrac{9 - 5}{11}$; 8) $\dfrac{a^2 - b^2}{c^2}$.

234. Przeczytaj słownie wyrażenia z niewiadomymi:

1) $x + 7$; 2) $m - a$; 3) $5ab$; 4) $5 : (c + 9)$.

235. Ułóż i zapisz po dwa wyrażenia:

1) z niewiadomą a; 2) z niewiadomymi x i y.

236. Ułóż i zapisz po dwa wyrażenia:

1) z niewiadomą x; 2) z niewiadomymi a i b.

237. (*Ustnie.*) Które z podanych wyrażeń liczbowych nie mają sensu:

1) $(5 - 6) : 7$; 2) $(10 - 2 \cdot 5) : 7$;

3) $4 : (12 - 2 \cdot 6)$; 4) $\dfrac{17}{15 + 5 \cdot (-3)}$?

2 **238.** Znajdź wartość wyrażenia:

1) $5x - 3$, jeżeli $x = 1{,}8$; $x = 2\frac{1}{5}$;

2) $a^2 + 3a$, jeżeli $a = -1$; $a = 0{,}8$.

239. Znajdź wartość wyrażenia:

1) $5m + 2n$, jeżeli $m = -1{,}3$; $n = 2\frac{1}{2}$;

2) $a(2b - c)$, jeżeli $a = 1{,}5$; $b = 3{,}2$; $c = -1{,}4$.

240. Znajdź wartość wyrażenia:

1) $b^2 - 4b$, jeżeli $b = -2$; $b = 0{,}5$;

2) $x^2 - y^2$, jeżeli $x = 5$; $y = -3$; jeżeli $x = 0{,}1$; $y = 0{,}2$.

241. Zapisz w postaci wyrażenia:

1) sumę liczb b i c;

2) iloczyn liczb $5m$ i n^3;

3) kwadrat sumy liczb a i $9p$;

4) różnicę kwadratów liczb $3d$ i $7t$.

242. Zapisz w postaci wyrażenia:

1) różnicę liczb p i 7;
2) ułamek liczb $a + c$ i d;

3) sumę liczby a i iloczyn liczb m i n.

243. Wypełnij w zeszycie poniższe tablice:

m	2	3	–1	0	–2
n	1	2	0	–5	–3
$2m - 3n$					

x	–1	0	1	2
$x^2 + 2$				
$x^2 + 2x$				

244. Dowiedz się nazwisko wybitnego ukraińskiego kardiochirurga. Aby to zrobić, znajdź wartość wyrażenia w pierwszej tablicy i przenieś litery, które odpowiadają znalezionym wartościom, do drugiej.

x	–2	–1	0	1	2
$x^2 - 4x$					
Litery	O	A	B	M	C

5	–3	12	–4	12	0

245. Porównaj sumę $a + b$ z iloczynem ab, jeżeli:

1) $a = 0$, $b = -2$;
2) $a = -3$, $b = 2$.

246. Mistrz produkuje x części w ciągu godziny, jego uczeń y części. Ile części oni wyprodukowali razem, jeżeli mistrz pracował 8 h, a uczeń – 4h?

247. (*Ustnie.*) Zakładamy a dm – długość prostokąta, b dm – jego szerokość ($a > b$). Co mogą oznaczać wyrażenia:

1) ab; 2) $2(a + b)$; 3) $2a$; 4) $\frac{a}{b}$?

248. Długopis kosztuje x UAH, ołówek - y UAH ($x > y$). Co mogą oznaczać wyrażenia:

1) $x + y$; 2) $3x + 4y$; 3) $x - y$; 4) $\frac{x}{y}$?

3 **249.** Zapisz w postaci wyrażenia czas, który uczeń spędza w szkole każdego dnia, jeżeli ma w ciągu dnia a lekcji po 45 min, b przerw po 15 min i c przerw po 10 min. Oblicz wartość danego wyrażenia, jeżeli $a = 6$; $b = 2$; $c = 3$.

250. Kiedy Marysia wyciągnęła ze swojej skarbonki wszystkie monety, to okazało się, że było tam x monet o nominale 50 kop., y monet o nominale 1 UAH i z monet o nominale 2 UAH. Oblicz, jaką sumę pieniędzy zebrała Marysia, jeżeli $x = 8$; $y = 5$; $z = 20$.

3 **251.** Uprość wyrażenie $-2\frac{1}{6}x + 3{,}5y - 3\frac{5}{6}x - 2{,}5y$ i znajdź jego wartość, jeżeli $x = -330$, $y = 16$. Przyjmując wartość wyrażenia jako rok, przypomnij sobie, jakie ważne wydarzenie dla Ukrainy miało miejsce w tym roku.

252. Uprość wyrażenie $5\frac{1}{7}a - 2{,}6b + 1\frac{6}{7}a + 1{,}6b$ i znajdź jego wartość, jeżeli $a = 225$, $b = -40$, zatem dowiesz się rok założenia Narodowego Uniwersytetu „Akademia Kijowsko-Mohylańska”.

253. Napisz wzór liczby naturalnej, która:
1) jest wielokrotnością liczby 9;
2) przy dzeleniu przez 5 reszta wynosi 1.

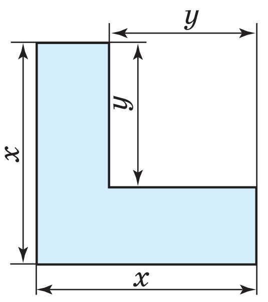
4 **254.** Dla niektórych wartości a i b wartość wyrażenia $a - b$ równa się 2,25. Jaką wartość dla tych samych wartości a i b przybiera wyrażenie:

1) $4(a - b)$; 2) $b - a$; 3) $\frac{1}{b - a}$; 4) $\frac{3(a - b)}{4(b - a)}$?

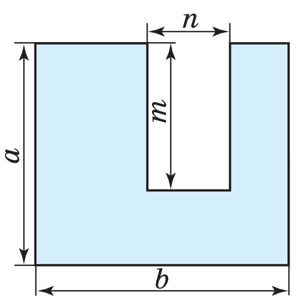
255. Dla niektórych wartości c i d wartość wyrażenia $c - d$ równa się $\frac{4}{7}$. Jaką wartość dla tych samych wartości c i d nabiera wyrażenie:

1) $7(c - d)$; 2) $d - c$; 3) $\frac{1}{d - c}$; 4) $\frac{5(d - c)}{4(c - d)}$?

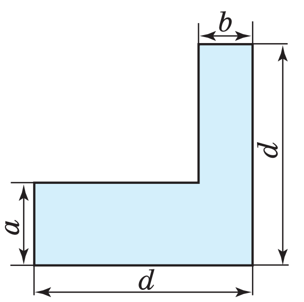
256. Ułóż wyrażenia dla obliczenia pola figur (rys. 4.1–4.3):



Rys. 4.1



Rys. 4.2



Rys. 4.3

Ćwiczenia powtórzeniowe

257. Oblicz:

1) 13^2; 2) 7^3;
3) $(-2,1)^2$; 4) $(-1,1)^3$;
5) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$; 6) $\left(-1\frac{1}{5}\right)^2$;
7) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$; 8) $0,2^3$.

258. Jaka liczba kończy wartość wyrażenia:

1) 132^2; 2) 271^3; 3) 2017^2; 4) $1315^2 - 115^3$?

259. Prędkość własna łodzi wynosi 26 km/h, a prędkość prądu rzeki wynosi 2 km/h. Znajdź odległość między dwoma portami, jeżeli w jednym kierunku łódź pokonuje ją o 30 min szybciej, niż w kierunku odwrotnym.

Matematyka życia

260. Podatek wojskowy w 2023 roku stanowił 1,5 % dochodów obywateli. W ciągu roku pensja dyrektora sklepu z akcesoriami do telefonów wynosiła 14 000 UAH, każdej z dwóch jego ekspedientek – po 8 000 UAH, a sprzedawcy-konsultanta – 10 000 UAH miesięcznie. Co miesiąc, oprócz podatku wojskowego, dyrektor przekazywał 700 UAH, każda z ekspedientek po 300 UAH i konsultant-sprzedawca po 400 UAH na organizację charytatywną na potrzeby armii ukraińskiej. Ile ogólnie pieniędzy pracownicy tego sklepu spłacili na potrzeby armii w 2023 roku?

Przygotuj się do przyswojenia nowego materiału

261. Uprość wyrażenie: 1) $3a \cdot 7$; 2) $2b \cdot (-0{,}1)$; 3) $-6{,}2a \cdot 5b$; 4) $-0{,}2c \cdot (-0{,}5d)$.

262. Otwórz nawiasy:
1) $4(b + 1)$; 2) $3(m - 2)$; 3) $-7(c - 5)$;
4) $-10(7 + a)$; 5) $5(-1{,}4 + k)$; 6) $(t - 2{,}5) \cdot (-8)$.

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

263. *Czy istnieje taka wartość x, dla której*:: 1) $-x \geqslant |x|$; 2) $x > |x|$?

§ 5. Wyrażenia tożsamościowe. Tożsamość. Tożsamościowe przekształcenie wyrażenia. Dowodzenie tożsamości.

Wyrażenia tożsamościowe

Znajdziemy wartości wyrażenia $2(x - 1)$ i $2x - 2$ dla niektórych wartości niewiadomej x i wynik zapiszemy wyniki w tabeli:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$2(x - 1)$	–10	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6
$2x - 2$	–10	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6

Z tabeli można wywnioskować, że wartośi wyrażeń $2(x - 1)$ i $2x - 2$ dla każdej z danych wartości niewiadomej x są między sobą równe. Jak wiadomo, zgodnie z rozdzielnością mnożenia: $2(x - 1) = 2x - 2$. Dlatego dla dowolnej innej wartości niewiadomej x wartości wyrażeń $2(x - 1)$ i $2x - 2$ również będą sobie równe. Takie wyrażenia nazywamy *tożsamościowo równe*.

Dwa wyrażenia, odpowiednie wartości których są równe między sobą dla dowolnych wartości niewiadomych, nazywamy ***tożsamością*** lub ***tożsamościowo równe.***

Na przykład, tożsamością są wyrażenia $2x + 3x$ i $5x$, ponieważ dla każdej wartości niewiadomej x te wyrażenia przyjmują jednakowe wartości (to to zrozumiałe, ponieważ $2x + 3x = 5x$).

Rozpatrzymy teraz wyrażenia $3x + 2y$ i $5xy$. Jeżeli $x = 1$ i $y = 1$, wtedy odpowiednie znaczenia tych wyrażeń są równe między sobą:

$$3x + 2y = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5; \qquad 5xy = 5 \cdot 1 \cdot 1 = 5.$$

Można jednak określić takie wartości x i y, dla których wartości tych wyrażeń nie będą sobie równe. Na przykład, jeżeli $x = 2$; $y = 0$, wtedy

$$3x + 2y = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 6, \qquad 5xy = 5 \cdot 2 \cdot 0 = 0.$$

Istnienią więc takie wartości niewiadomych, dla których odpowiednie wartości wyrażeń $3x + 2y$ i 5xy nie będą sobie równe. Dlatego wyrażenia $3x + 2y$ i 5xy nie są tożsamościowo równe.

Tożsamość

Równość, która jest prawidłową dla dowolnych wartości niewiadomych, nazywamy tożsamością.

Ze względu na wyżej powiedziane, tożsamością, zwłaszcza, są równości: $2(x – 1) = 2x – 2$ i $2x + 3x = 5x$.

Tożsamością jest każda równość, którą zapisano właściwości działań z liczbami. Na przykład,

$a + b = b + a$; $(a + b) + c = a + (b + c)$; $a(b + c) = ab + ac$;
$ab = ba$; $(ab)c = a(bc)$; $a(b – c) = ab – ac$.

Tożsamością są również takie równości

$a + 0 = a$; $a \cdot 0 = 0$; $a \cdot (–b) = –ab$;
$a + (–a) = 0$; $a \cdot 1 = a$; $–a \cdot (–b) = ab$.

Za tożsamość są również uważane prawidłowe równości liczbowe, na przykład:

$1 + 2 + 3 = 6$; $5^2 + 12^2 = 13^2$; $12 \cdot (7 – 6) = 3 \cdot 4$.

Tożsamościowe przekształcenie wyrażenia

Jeżeli w wyrażeniu $5x + 2x – 9$ zredukujemy wyrazy podobne, to otrzymamy $5x + 2x – 9 = 7x – 9$. W danym przypadku mówi się, że wyrażenie $5x + 2x – 9$ zamieniono tożsamościowym do niego wrażeniem $7x – 9$.

Zamianę wyrażenia na tożsamościowo równe jemu wyrażenie nazywamy tożsamościowym przekształceniem wyrażenia.

Tożsamościowe przekształcenia wyrażeń wykonujemy za pomocą cech działań z liczbami. Zwłaszcza, *tożsamościowym przekształceniem jest otwarcie nawiasów, redukcja podobnych składników* itp. A jeszcze przekształcenia tożsamościowe wykonują podczas upraszczania wyrażenia, czyli zamiany jakiegoś wyrażenia na tożsamościowo równe jemu wyrażenie, które ma krótszy zapis.

Przykład 1. Uprościć wyrażenie: 1) $-0{,}3m \cdot 5n$;
2) $2(3x-4)+3(-4x+7)$; 3) $2+5a-(a-2b)+(3b-a)$.

Rozwiązanie. 1) $-0{,}3m \cdot 5n = -0{,}3 \cdot 5mn = -1{,}5mn$;

2) $2(3x-4)+3(-4x+7) = \underline{6x} - 8 - \underline{12x} + 21 = -6x + 13 = 13 - 6x$;

3) $2+5a-(a-2b)+(3b-a) = 2 + \underline{5a} - \underline{a} + \underline{\underline{2b}} + \underline{\underline{3b}} - \underline{a} = 3a + 5b + 2.$

Odpowiedź: 1) $-1{,}5mn$; 2) $13-6x$; 3) $3a+5b+2$.

Udowodnianie tożsamości

Żeby udowodnić, że równość jest tożsamością (innymi słowy, żeby *udowodnić tożsamość*), wykorzystujemy tożsamościowe przekształcenia wyrażeń.

Udowodnić tożsamość można jednym ze sposobów:

- **wykonać przekształcenia tożsamościowe jego lewej strony, upraszczamy go tym samym do postaci prawej strony;**
- **wykonać przekształcenia tożsamościowe jego prawej strony, upraszczamy go tym samym do postaci lewej strony;**
- **wykonać przekształcenia tożsamościowe obu jego stron, upraszczamy tym samym jego obie strony do jednakowych wyrażeń.**

Przykład 2. Udowodnić tożsamość:

1) $2x-(x+5)-11 = x-16$;
2) $20b-4a = 5(2a-3b)-7(2a-5b)$;
3) $2(3x-8)+4(5x-7) = 13(2x-5)+21$.

Rozwiązanie. 1) Przekształcamy lewą stronę danej równości:

$$2x-(x+5)-11 = \underline{2x} - \underline{x} - 5 - 11 = x - 16.$$

Przekształceniem tożsamościowym wyrażenie po lewej stronie równości uprościli do postaci prawej strony i tym samym udowodnili, że dana równość jest tożsamością.

2) Przekształcimy prawą część równości:

$$5(2a-3b)-7(2a-5b) = \underline{10a} - \underline{\underline{15b}} - \underline{14a} + \underline{\underline{35b}} = 20b - 4a.$$

Przekształceniem tożsamościowym prawą stronę uprościliśmy do postaci lewej strony i tym samym udowodniliśmy, że dana równość jest tożsamością

3) W danym przypadku wygodnie uprościć zarówno lewą, jak i prawą stronę równości i porównać wyniki:

$\mathbf{2(3x - 8) + 4(5x - 7) = \underline{6x} - 16 + \underline{20x} - 28 = 26x - 44;}$

$13(2x - 5) + 21 = 26x - 65 + 21 = 26x - 44.$

Przekształceniem tożsamościowym lewą i prawą stronę równości uprościli do tej samej postaci: 26x – 44. Dlatego dana równość jest tożsamością.

Jakie wyrażenia nazywamy tożsamością? Podaj przykład wyrażeń tożsamościowych. Jaką równość nazywamy tożsamością? Podaj przykład tożsamości. Co nazywamy przekształceniem tożsamościowym wyrażenia? Jak udowodnić tożsamość?

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

1

264. (*Ustnie.*) Czy wyrażenia są tożsamościowo równe:

1) $3x + x$ i $4x$; 2) $2a + b$ i $b + 2a$;
3) $a + a + a$ i a^3; 4) $3(a - 2)$ i $3a - 6$;
5) $x - y$ i $y - x$; 6) $7m \cdot p$ i $7p \cdot m$?

265. Czy wyrażenia są tożsamościowo równe (dlaczego?):

1) $5m - 2m$ i $3m$; 2) $3a - 8$ i $8 - 3a$;
3) $5x + y$ i $y + 5x$; 4) $b + b$ i b^2;
5) $2(x - 3)$ i $2x - 6$; 6) $2a \cdot b$ i $2a + b$?

266. (*Ustnie.*) Czy równość jest tożsamością:

1) $2x + 3y = 6xy$; 2) $5a - 1 = -1 + 5a$;
3) $9(a - b) = 9a - 5b$?

267. Otwórz nawiasy:

1) $2(m - 1)$; 2) $9(3x + 2)$;
3) $-(a - 5)$; 4) $-(-7 + 2m)$.

268. Otwórz nawiasy:

1) $-(m - 2)$; 2) $4(a + 1)$;
3) $7(1 - 3p)$; 4) $-(-3a + 5)$.

269. Uprość wyrazy podobne:

1) $2a - a$; 2) $-5p + 7p$;
3) $-3b - 2b$; 4) $c - 8c$.

270. Nazwij kilka wyrażeń, które będą tożsamością wyrażenia $3x + 4x$.

2

271. Uprość wyrażenie za pomocą przemienności i łączenia czynników mnożenia:

1) $-2{,}5x \cdot 4$; 2) $4p \cdot (-1{,}5)$;
3) $0{,}2x \cdot (-0{,}3p)$; 4) $-\frac{1}{7}x \cdot (-7y)$.

272. Uprość wyrażenie:
1) $-2p \cdot 3{,}5$; 2) $7a \cdot (-1{,}2)$;
3) $0{,}2x \cdot (-3y)$; 4) $-1\frac{1}{3}m \cdot (-3n)$.

273. (*Ustnie.*) Uprość wyrażenie:
1) $2x - 9 + 5x$; 2) $7a - 3b + 2a + 3b$;
3) $-2x \cdot 3$; 4) $-4a \cdot (-2b)$.

274. Uprość składniki podobne:
1) $5b - 8a + 4b - a$; 2) $17 - 2p + 3p + 19$;
3) $1{,}8a + 1{,}9b + 2{,}8a - 2{,}9b$; 4) $5 - 7c + 1{,}9p + 6{,}9c - 1{,}7p$.

275. Otwórz nawiasy i uprość składniki podobne:
1) $4(5x - 7) + 3x + 13$; 2) $2(7 - 9a) - (4 - 18a)$;
3) $3(2p - 7) - 2(p - 3)$; 4) $-(3m - 5) + 2(3m - 7)$.

276. Otwórz nawiasy i uprość składniki podobne:
1) $3(8a - 4) + 6a$; 2) $7p - 2(3p - 1)$;
3) $2(3x - 8) - 5(2x + 7)$; 4) $3(5m - 7) - (15m - 2)$.

277. Uprość wyrażenie i znajdź jego wartość:
1) $0{,}6x + 0{,}4(x - 20)$, jeżeli $x = 2{,}4$;
2) $1{,}3(2a - 1) - 16{,}4$, jeżeli $a = 10$;
3) $1{,}2(m - 5) - 1{,}8(10 - m)$, jeżeli $m = -3{,}7$;
4) $2x - 3(x + y) + 4y$, jeżeli $x = -1$, $y = 1$.

278. Uprość wyrażenie i znajdź jego wartość:
1) $0{,}7x + 0{,}3(x - 4)$, jeżeli $x = -0{,}7$;
2) $1{,}7(y - 11) - 16{,}3$, jeżeli $y = 20$;
3) $0{,}6(2a - 14) - 0{,}4(5a - 1)$, jeżeli $a = -1$;
4) $5(m - n) - 4m + 7n$, jeżeli $m = 1{,}8$; $n = -0{,}9$.

279. Udowodnij tożsamość:
1) $-(2x - y) = y - 2x$; 2) $2(x - 1) - 2x = -2$;
3) $2(x - 3) + 3(x + 2) = 5x$; 4) $c - 2 = 5(c + 2) - 4(c + 3)$.

280. Udowodnij tożsamość:
1) $-(m - 3n) = 3n - m$; 2) $7(2 - p) + 7p = 14$;
3) $5a = 3(a - 4) + 2(a + 6)$; 4) $4(m - 3) + 3(m + 3) = 7m - 3$.

281. Długość jednego z boków trójkąta a cm, a długość każdego z dwóch boków jest o 2 cm dłuższa od niego. Zapisz w postaci wyrażenia obwód trójkąta i uprość dane wyrażenie.

282. Szerokość prostokąta równa się x cm, a długość o 3 cm większa niż szerokość. Zapisz w postaci wyrażenia obwód prostokąta i uprość dane wyrażenie.

3 **283.** Otwórz nawiasy i uprość wyrażenie:
1) $x-(x-(2x-3))$;
2) $5m-((n-m)+3n)$;
3) $4p-(3p-(2p-(p+1)))$;
4) $5x-(2x-((y-x)-2y))$;
5) $\frac{2}{3}\left(6a-\frac{3}{8}b\right)-\frac{2}{11}\left(4\frac{1}{8}a-33b\right)$;
6) $-\frac{2}{9}(2{,}7m-1{,}5n)+\frac{5}{6}(2n-0{,}48m)$.

284. Otwórz nawiasy i uprość wyrażenie:
1) $a-(a-(3a-1))$;
2) $12m-((a-m)+12a)$;
3) $5y-(6y-(7y-(8y-1)))$;
4) $\frac{4}{7}(2{,}1a-2{,}8b)-\frac{4}{5}\left(1\frac{1}{2}a-1\frac{1}{4}b\right)$.

285. Udowodnij tożsamość:
1) $10x-(-(5x+20))=5(3x+4)$;
2) $-(-3p)-(-(8-5p))=2(4-p)$;
3) $3(a-b-c)+5(a-b)+3c=8(a-b)$.

286. Udowodnij tożsamość:
1) $12a-(-(8a-16))=-4(4-5a)$;
2) $4(x+y-t)+5(x-t)-4y=9(x-t)$.

287. Udowodnij, że znaczenie wyrażenia

$$1{,}8(m-2)+1{,}4(2-m)+0{,}2(1{,}7-2m)$$

nie zależy od wartości niewiadomej

288. Udowodnij, że dla dowolnej wartości niewiadomej wartość wyrażenia $a-(a-(5a+2))-5(a-8)$ równa się tej samej liczbie.

4 **289.** Udowodnij, że suma trzech kolejnych liczb parzystych dzieli się na 6.

290. Udowodnij, że jeżeli n jest liczbą naturalną, to wartość wyrażenia

$-2(2{,}5n-7)+2\frac{1}{3}(3n-6)$ jest liczbą parzystą.

Ćwiczenia powtórzeniowe

291. Stop o masie 1,6 kg zawiera 15 % miedzi. Ile kilogramów miedzi zawiera dany stop metali?

292. Ile procent wynosi liczba 20 ze swego:
1) kwadratu;
2) sześcianu?

293. Turysta szedł pieszo 2 h i jechał rowerem 3 h. Ogólnie on pokonał 56 km. Znajdź z jaką prędkością turysta jechał rowerem, jeżeli ona jest o 12 km/h większa od prędkości, którą on szedł pieszo.

Matematyka życia

294. Przyjaciele Natalia i Artem pojechali na autobusową wycieczkę do innego miasta. Dotarcie do tego miasta autobusem zajęło 2 h, a powrót z powrotem zajął 1 h 20 min, ponieważ autobus pojechał inną drogą. Śledząc za prędkościomierzem autobusu, przyjaciele zauważyli, że podczas podróży prędkość autobusu była stała, a przejechał 200 km. Oblicz odległość drogi tam i z powrotem.

Przygotuj się do przyswojenia nowego materiału

295. Oblicz wartość kwadratu lub sześcianu:

1) $(3{,}1)^2$; 2) $(-5)^3$; 3) $\left(-\frac{1}{7}\right)^2$; 4) $(0{,}1)^3$;

5) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; 6) $\left(-\frac{5}{6}\right)^2$; 7) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$; 8) $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$.

296. Oblicz: 1) $(-1)^2 + (-2)^3 - 8^2$; 2) $(3^3 - (-4)^2) \cdot 7$.

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

297. W mistrzostwach miasta bierze udział 11 drużyn, Każda drużyna gra z innymi jeden raz. Udowodnij, że w dowolnym momencie mistrzostw znajdzie się drużyna, która do tego momentu rozegrała albo parzystą ilość meczy, albo jeszcze nie rozegrała żadnego meczu.

§ 6. Potęga o wykładniku naturalnym

Potęga

Iloczyn kilku jednakowych czynników można zapisać w postaci wyrażenia, które nazywamy ***potęgą.***

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{\text{6 mnożników}} = 4^6$$

wykładnik potęgi

podstawa potęgi

Ponieważ $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4096$, to mówi się, że liczba 4096 jest 4 do szóstej potęgi.

Potęgą liczby a o wykładniku naturalnym n ($n > 1$) nazywamy iloczyn n czynników, każdy z których równa się a. ***Potęgą liczby a o wykładniku 1*** nazywamy właśnie liczbę a.

Potęga z podstawą a i wykładnik n zapisujemy w takiej postaci: a^n, zytamy: „a w n potędze” lub „n-a potęga liczby a”

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ mnożników}},\ n > 1$$

jeżeli $n = 1$, $a^1 = a$

jeżeli $n = 2$, a^2 – kwadrat liczby

jeżeli $n = 3$, a^3 – sześcian liczby

Przykład 1. Podaj w postaci potęgi:

1) aa; 2) $bbbb$; 3) $17 \cdot 17 \cdot 17$; 4) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$.

Rozwiązanie. 1) $aa = a^2$; 2) $bbbb = b^4$; 3) $17 \cdot 17 \cdot 17 = 17^3$; 4) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$.

Odpowiedź: 1) a^2; 2) b^4; 3) 17^3; 4) 10^5.

Potęgowanie

Obliczenie wartości potęgi jest działaniem arytmetycznym, które nazywamy ***potęgowaniem***.

Przykład 2. Wykonaj potęgowanie:

1) 2^4; 2) 0^3; 3) $(-6)^2$; 4) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$.

Rozwiązanie. 1) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$;
2) $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$;
3) $(-6)^2 = -6 \cdot (-6) = 36$;
4) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{125}$.

Odpowiedź: 1) 16; 2) 0; 3) 36; 4) $-\frac{8}{125}$.

Znak potęgi z wykładnikiem naturalnym n

Dowiedz się, jaki jest znak potęgi z wykładnikiem naturalnym n.
1) Jeżeli $a = 0$, wtedy $0^1 = 0$; $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$; … . Więc, $0^n = 0$.
2) Jeżeli $a > 0$, wtedy $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ mnożników}} > 0$ jako iloczyn liczb dodatnich.
Więc, $a^n > 0$ dla dowolnego $a > 0$.
3) Jeżeli $a < 0$, wtedy dla nieparzystej wartości n wynosi:
$a^n < 0$ (jako iloczyn nieparzystej ilości ujemnych mnożników);
dla parzystej wartości n wynosi:
$a^n > 0$ (jako iloczyn parzystej ilości ujemnych).
Więc,

jeżeli n – liczba naturalna, wtedy
$0^n = 0$ dla dowolnego n;
$a^n > 0$ dla dowolnych $a > 0$ i n;
$a^n < 0$ dla dowolnego $a < 0$ i nieparzystego n;
$a^n > 0$ dla dowolnego $a < 0$ i parzystego n.

Obliczanie wartości wyrażeń w kilka działań

Jeżeli wyrażąnie ma kilka działań, wtedy najpierw wykonujemy potęgowanie, zatem mnożenie i dzielenie, a dopiero potem dodawanie i mnożenie.

Przykład 3. Znajdź wartość wyrażenia:
1) $3 - 7 \cdot 2^3$; 2) $(2 + (-3)^4)^2$; 3) $((-1)^5 + (-1)^6)^8$; 4) $4^3 : 2^7$.

Rozwiązanie: 1) $3 - 7 \cdot 2^3 = 3 - 7 \cdot 8 = 3 - 56 = -53$;
2) $(2 + (-3)^4)^2 = (2 + 81)^2 = 83^2 = 6889$;
3) $((-1)^5 + (-1)^6)^8 = (-1 + 1)^8 = 0^8 = 0$;
4) $4^3 : 2^7 = 64 : 128 = 0{,}5$.

Odpowiedź: 1) –53; 2) 6889; 3) 0; 4) 0,5.

Zwróć uwagę, że podczas obliczania można również zapisywać każde działanie z osobna.

Dawno, dawno temu...

Definicja potęgi z wykładnikiem naturalnym powstała w starożytności. Kwadrat liczby używali do obliczenia pola, sześcian liczby do obliczenia objętości. W starożytnym Egipcie i Babilonie potęgi niektórych liczb używali do rozwiązywania poszczególnych zadań.

Francuski matematyk Francois Viete używał litery N, Q i C nie tylko dla zapisywania odpowiednio x, $x2$ i $x3$, ale również dla zapisywania potęg wyższych niż trzecia. Na przykład, do czwartej potęgi w jego zapisie wyglądało następująco: QQ.

Współczesny zapis potęg zaproponował francuski matematyk, fizyk, filozof Kartezjusz. W swojej pracy „Geometria" z 1634 roku, on zaczął zapisywać potęgi o naturalnym wykładniku w takiej postacie, jak my to robimy obecnie: $c3$, $c4$, $c5$ itp. Ale $c2$ on zapisywał jako iloczyn: cc.

Kartezjusz (*1596–1650*)

Sformułuj określenie potęgi z wykładnikiem naturalnym. ○ Podaj przykłady potęg i nazwij ich podstawę i wykładnik. ○ Jak nazywamy drugą potęgą liczby; trzecią potęgę liczby? ○ Jaką liczbą (dodatnią czy ujemną) jest potęga liczby dodatniej; potęgą liczby ujemnej z parzystym czynnikiem; potęgą liczby ujemnej z nieparzystym czynnikiem? ○ W jakiej kolejności wykonujemy działania arytmetyczne z wyrażeniami liczbowymi, które mają potęgi?

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

1

298. Przeczytaj wyrażenia, nazwij podstawę i wykładnik potęgi:

1) $0{,}7^5$; 2) $(-4)^2$; 3) $(xy)^3$;

4) $(a-b)^5$; 5) $\left(\frac{1}{2}x^2y\right)^9$; 6) $(a^2-b^2)^7$.

299. Napisz iloczyn w postaci potęgi:

1) $0{,}5 \cdot 0{,}5$; 2) $(-7)\cdot(-7)\cdot(-7)$; 3) $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}$;

4) $-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$; 5) $aaaa$; 6) $(xy)\cdot(xy)$;

7) $\underbrace{p\cdot p\cdot\ldots\cdot p}_{18\ \text{mnożników}}$; 8) $(m-p)(m-p)(m-p)$.

300. Podaj iloczyn w postaci potęgi:

1) $0{,}8\cdot 0{,}8\cdot 0{,}8$; 2) $-2\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$; 3) $mmmmm$;

4) $(c+3)(c+3)$; 5) $\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}$; 6) $\underbrace{aaa\ldots a}_{12\ \text{mnożników}}$.

301. Napisz potęgę w postaci iloczynu jednakowych mnożników

1) 7^5; 2) b^3; 3) $(x-y)^2$; 4) $\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^4$.

302. Podaj potęgę w postaci iloczynu jednakowych mnożników:

1) 9^7; 2) c^4; 3) $(a+b)^3$; 4) $\left(\dfrac{x}{x-m}\right)^2$.

303. (*Ustnie.*) Oblicz:

1) 1^3; 2) 0^5; 3) 5^2; 4) $(-7)^2$; 5) $(-2)^3$; 6) $(-1)^8$.

304. Znajdź wartość wyrażenia:

1) 3^2; 2) 2^3; 3) 0^2; 4) 1^7; 5) $(-1)^4$; 6) $(-1)^3$.

2 **305.** Wykonaj potęgowanie:

1) 3^5; 2) $(0{,}7)^2$; 3) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^3$; 4) $\left(1\dfrac{1}{2}\right)^5$;

5) $(-7)^4$; 6) $(-0{,}3)^3$; 7) $\left(-1\dfrac{2}{3}\right)^2$; 8) $(-0{,}1)^4$.

306. Wykonaj potęgowanie:

1) 5^4; 2) $(1{,}5)^2$; 3) $\left(\dfrac{2}{7}\right)^3$; 4) $\left(1\dfrac{1}{3}\right)^4$;

5) $(-3)^3$; 6) $(-1{,}7)^2$; 7) $\left(-1\dfrac{1}{8}\right)^3$; 8) $(-0{,}2)^4$.

307. Wypełnij w zeszycie tablicę:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n										
3^n										

308. Rozłóż liczby naturalne na mnożniki proste, używając w zapisie potęgę:

1) 16; 2) 27; 3) 50; 4) 1000; 5) 99; 6) 656.

309. Znajdź wartość wyrażenia:

1) -5^2; 2) $-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3$; 3) $-(-0{,}2)^4$; 4) $-(-1)^{19}$.

310. Oblicz:

1) -7^3; 2) $-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2$; 3) $-\left(-1\dfrac{1}{3}\right)^3$; 4) $-(-1)^{16}$.

311. Porównaj wartość wyrażenia do zera (odpowiedź zapisz w postaci nierówności):

1) $(-5{,}7)^2$; 2) $(-12{,}49)^9$; 3) -53^7; 4) $-(-2)^5$.

312. Porównaj wartość wyrażenia do zera (odpowiedź zapisz w postaci nierówności):
1) $(-4{,}7)^3$; 2) $(-2{,}31)^4$; 3) $-(-2)^8$; 4) $-(-3)^7$.

313. Znajdź wartość wyrażenia:

1) $0{,}2 \cdot 25^2$; 2) $\dfrac{50}{0{,}1^3}$; 3) $-4 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^4$;

4) $0{,}01 \cdot (-5)^3$; 5) $\left(5 \cdot \dfrac{2}{15}\right)^3$; 6) $\left(6 : \dfrac{2}{3}\right)^2$;

7) $5^2 + (-5)^4$; 8) $(3{,}4 - 3{,}6)^2$; 9) $(-1{,}8 + 4{,}8)^4$.

314. Oblicz:

1) $0{,}5 \cdot 40^2$; 2) $\dfrac{30}{0{,}3^3}$; 3) $-5 \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^3$;

4) $\left(-\dfrac{7}{8}\right)^2 \cdot 16$; 5) $\left(12 : \dfrac{6}{7}\right)^2$; 6) $\left(-3 \cdot \dfrac{2}{9}\right)^4$;

7) $6^2 - (-6)^3$; 8) $(1{,}7 - 1{,}9)^4$; 9) $(-2{,}5 + 8{,}5)^2$.

315. Czy równości są prawidłowe:
1) $3^2 + 4^2 = 5^2$; 2) $4^2 + 5^2 = 6^2$;
3) $2^3 + 3^3 = 5^3$; 4) $2^6 + 6^2 = 10^2$;
5) $1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$; 6) $(-5)^2 + (-12)^2 = (-13)^2$?

316. Podaj liczby:

1) 0; 4; 0,16; $\dfrac{9}{25}$; 169; $1\dfrac{24}{25}$ w postaci kwadratu;

2) 64; –27; 0; 1; $-\dfrac{1}{8}$; $1\dfrac{91}{125}$ w postaci sześcianu.

317. Podaj liczby:
1) 5; 125; 625 w postaci potęgi z podstawą 5;
2) 100; 10 000; 10 w postaci potęgi z podstawą 10.

318. Podaj:
1) 8; 81; –125; –64; 0,16; 0,001; $3\dfrac{3}{8}$; $1\dfrac{11}{25}$ w postaci kwadratu lub sześcianu liczby;
2) 2; 4; 8; 256 w postaci potęgi z podstawą 2;
3) 81; –27; –3 w postaci potęgi z podstawą –3.

319. Oblicz: 1) sumę kwadratów liczb 0,6 i –0,7;
2) kwadrat sumy liczb 5,7 i –6,3;
3) różnicę sześcianów liczb 2,3 i 2,2;
4) sześcian sumy liczb 8,2 i 1,8.

320. Znajdź wartość wyrażenia:

1) $\frac{1}{27}x^3$, jeżeli $x = 0; -1; 1; -3; 3$;
2) $a + a^2 + a^3$, jeżeli $a = 1; -1; -2$;
3) $(15x)^4$, jeżeli $x = \frac{1}{3}; -\frac{1}{5}$;
4) $a^2 - b^2$, jeżeli $a = -6$; $b = -8$.

321. Znajdź wartość wyrażenia:

1) $0{,}01a^4$, jeżeli $a = 2; -5; 10$;
2) $5c^2 - 4$, jeżeli $c = 0{,}2; -0{,}1; 0$;
3) $(m + n)^3$, jeżeli $m = -4$, $n = -1$;
4) $4x^2 - x^3$, jeżeli $x = 1; -2; -3$.

322. Nie wykonując obliczeń porównaj:

1) -2^4 i $(-2)^4$;
2) $(-7)^3$ i $(-6)^2$;
3) $(-12)^8$ i 12^8;
4) -5^3 i $(-5)^3$.

323. Porównaj wartości wyrazów:

1) $-x^2$ i $(-x)^2$, jeżeli $x = 5; -3; 0$;
2) $-x^3$ i $(-x)^3$, jeżeli $x = -2; 0; 3$.

4 **324.** Zamień „gwiazdkę” znakiem $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$ w takim sposób, żeby otrzymana nierówność była prawidłowa dla dowolnej wartości niewiadomych:

1) $a^2 * 0$; 2) $-b^2 * 0$; 3) $m^2 + 3 * 0$;
4) $-p^2 - 1 * 0$; 5) $(a - 3)^2 * 0$; 6) $a^2 + b^2 * 0$;
7) $x^2 + y^2 + 5 * 0$; 8) $(m - n)^2 + 1 * 0$; 9) $-(p + 9)^2 * 0$.

325. Jaką najmniejszą wartość może przybrać wyrażenie:

1) $a^2 + 1$; 2) $3 + (m - 3)^2$; 3) $(a + 8)^4 - 5$?

326. Jaką największą wartość może przybrać wyrażenie:

1) $-x^2 + 2$; 2) $-(m - 2)^4 + 1$; 3) $5 - (a + 9)^2$?

Ćwiczenia powtórzeniowe

327. Zapisz ułamek w postaci procent:

1) 0,8; 2) 1,13; 3) 8,3; 4) 0,007.

328. Oblicz: 1) $\left(9\frac{8}{15} - 7\frac{7}{15}\right) \cdot 4{,}5 - 2\frac{1}{6} : 0{,}52$;

2) $\frac{8}{13} \cdot (-0{,}1625) - \left(\frac{9}{22} + 1\frac{4}{11}\right) \cdot 1{,}32$.

329. Dla niektórych wartości naturalnych x i y wartość wyrażenia $x + 3y$ dzieli się na 5. Czy wartość wyrażenia $7x + 21y$ dzieli się na 5 dla tych samych wartości x i y?

Matematyka życia

330. Żeby być zdrowym, człowiek powinien spożywać dziennie 3 g białka na każde 4 kg swojej wagi.
1) Ile białka powinna zawierać dzienna racja nastolatka o wadze 48 kg?
2) Ile białka powinna zawierać twoja dzienna racja?

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

331. Udowodnij *cechę podzielności na 4*: liczba naturalna dzieli się na 4 wtedy i tylko wtedy, kiedy liczba zapisana jej dwoma ostatnimi cyframi, dzieli się na 4.

§ 7. Cechy potęgi z wykładnikiem naturalnym

Rozpatrzymy cechy potęgi z wykładnikiem naturalnym.

Mnożenie potęgi z jednakowymi podstawami

Wyrażenie a^3a^2 jest iloczynem dwóch potęg z jednakowymi podstawami. Używając oznakowanie potęgi, dany iloczyn można przepisać:

$$a^3a^2 = (aaa) \cdot (aa) = aaaaa = a^5.$$

Więc, $a^3a^2 = a^5$, czyli $a^5 = a^{3+2}$. W identyczny sposób nietrudno sprawdzić, że $x^5x^4x^2 = x^{5+4+2} = x^{11}$. Dlatego *iloczyn potę z jednakowymi podstawami równa się sumie wykładników mnożników*. Dana cecha sprawdza się dla każdego iloczynu potęg z jednakowymi podstawami.

Dla dowolnej liczby a i dowolnych liczb naturalnych m i n sprawdza się równość: $\boldsymbol{a^m a^n = a^{m+n}}$.

Udowodnienie. Dla $m > 1$, $n > 1$ *otrzymujemy*:

$$a^m a^n = \underbrace{aa\ldots a}_{\substack{m \\ \text{mnożników}}} \cdot \underbrace{aa\ldots a}_{\substack{n \\ \text{mnożników}}} = \underbrace{aaa\ldots a}_{\substack{(m+n) \\ \text{mnożników}}} = a^{m+n}.$$

Jeżeli, na przykład, m = 1, n > 1, wtedy

$$a \cdot a^n = a \cdot \underbrace{aa \ldots a}_{\substack{n \\ \text{mnożników}}} = \underbrace{aaa \ldots a}_{\substack{(n+1) \\ \text{mnożników}}} = a^{n+1}.$$

Przypadki, kiedy $m > 1$, $n = 1$ i $m = 1$, $n = 1$ rozpatrujemy analogicznie.

Równość $a^m a^n = a^{m+n}$ nazywamy ***podstawową cechą potęgi***. Ona poszerza się na iloczyn trzech lub większej ilości potęg. Na przykład: $a^m a^n a^k = a^{m+n+k}$.

Z podstawowej cechy potęgi wynika *zasada mnożenia potęg* z jednakowymi podstawami.

Żeby pomnożyć potęgi z jednakowymi podstawami, podstawę zostawiamy tę samą, a wykładniki potęgi dodajemy.

Na przykład, $3^7 \cdot 3^5 = 3^{7+5} = 3^{12}$; $7^3 \cdot 7 = 7^3 \cdot 7^1 = 7^{3+1} = 7^4$; $a^7 a^2 a^3 = a^{7+2+3} = a^{12}$.

Dzielenie potęg z jednakowymi podstawami

Ponieważ $a^3 a^2 = a^5$, to z definicji ilorazu $a^5 : a^3 = a^2$, czyli $a^2 = a^{5-3}$. Nietrudni jest taką samą metodą upewnić się, że $a^{15} : a^4 = a^{11}$. Dlatego *iloraz potęg z jednakowymi podstawami równa się potędze z tą samą podstawą i wykładnikiem, który jest równy różnicy wykładników dzielnej i dzielnika*. Dana cecha sprawdza się dla każdego ilorazu potęg z jednakowymi, niezerowymi podstawami pod warunkiem, że iloraz potęgi dzielnej jest większy od ilorazu potęgi dzielnika.

Dla dowolnej liczby $a \neq 0$ i dowolnych liczb naturalnych m i n, takich, że $m > n$, sprawdza się równość:

$$\boldsymbol{a^m : a^n = a^{m-n}}.$$

Udowodnienie. Ponieważ $a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m$, czyli $a^{m-n}a^n = a^m$, to z definicji ilorazu otrzymamy: $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Z udowodnionej cechy wynika *zasada dzielenia potęg*.

Żeby podzielić potęgę na potęgę, podstawy których są jednakowe, podstawę zostawiamy w takiej samej postaci, a od wykładnika potęgi dzielnej odejmujemy wykładnik potęgi dzielnika.

Na przykład,, $3^{18} : 3^5 = 3^{18-5} = 3^{13}$; $m^9 : m = m^9 : m^1 = m^{9-1} = m^8$.

Podnoszenie potęgi do potęgi

Wyrażenie $(a^7)^3$ – potęga, podstawa której jest potęgą. Dane wyrażenie można przedstawić w postaci potęgi z podstawą a:

$$(a^7)^3 = a^7 \cdot a^7 \cdot a^7 = a^{7+7+7} = a^{7\cdot 3} = a^{21}.$$

Taką samą metodą można upewnić się, że $((x^7)^3)^2 = x^{42}$. Czyli *potęga przy podnoszeniu do potęgi równa się potędze z tą samą podstawą i wykładnikiem, co równa się iloczynowi wykładników danych potęg.*

Dla dowolnej liczby a i *dowolnych liczb naturalnych* m i n *sprawdza się równość:* $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$.

Udowodnienie. $(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ mnożników}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ składników}}} = a^{mn}.$

Z udowodnionej cechy wynika *zasada podnoszenia potęgi do potęgi.*

Żeby podnieść potęgę do potęgi, podstawę zostawiamy w takiej samej postaci, a wykładniki potęg mnożymy.

Na przykład, $(4^5)^4 = 4^{5\cdot 4} = 4^{20}$; $(a^8)^{11} = a^{8\cdot 11} = a^{88}$;
$((p^3)^2)^5 = (p^{3\cdot 2})^5 = (p^6)^5 = p^{6\cdot 5} = p^{30}$.

Podniesienie iloczynu do potęgi

Wyrażenie $(ab)^3$ jest potęgą iloczynu mnożników a i b. jest potęgą iloczynu mnożników a i b. Dany wyraz można przedstawić w postaci iloczynu potęg a i b:

$$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = (aaa) \cdot (bbb) = a^3b^3.$$

Dlatego, $(ab)^3 = a^3b^3$.

Tak samo podnosimy do potęgi dowolny iloczyn.

Dla dowolnych liczb a i b i dowolnej liczby naturalnej n sprawdza się równość: $\boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n}$.

Udowodnienie.

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n \text{ mnożników}} = \underbrace{(aa\cdot\ldots\cdot a)}_{n \text{ mnożników}}\cdot\underbrace{(bb\cdot\ldots\cdot b)}_{n \text{ mnożników}} = a^n b^n.$$

Dana cecha potęgi rozprzestrzenia się na potęgę iloczynu z trzech lub więcej mnożników.

Na przykład,

$$(mpk)^n = m^n p^n k^n; \quad (abcd)^n = a^n b^n c^n d^n \text{ itp.}$$

Otrzymujemy *zasadę podniesienia iloczynu do potęgi*.

Żeby podnieść iloczyn do potęgi, należy podnieść do tej samej potęgi każdy z mnożników i otrzymane wyniki pomnożyć.

Na przykład, $(7ab)^2 = 7^2a^2b^2 = 49a^2b^2$;

$(-2xy)^3 = (-2)^3x^3y^3 = -8x^3y^3$.

Zastosowanie cech potęgi do rozwiązywania ćwiczeń

Mamy:

$\boldsymbol{a^m a^n = a^{m+n}}$		$\boldsymbol{a^{m+n} = a^m a^n}$
$\boldsymbol{a^m : a^n = a^{m-n}}$	i	$\boldsymbol{a^{m-n} = a^m : a^n}$
$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{mn}}$		$\boldsymbol{a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m}$
$\boldsymbol{(ab)^n = a^n b^n}$		$\boldsymbol{a^n b^n = (ab)^n}$

Rozpatrzmy, w jaki sposób można upraszczać i przekształcać wyrażenia, które mają potęgi, obliczać ich wartość i porównywać.

Przykład 1. Uprość wyrażenie $(a^2)^3 \cdot (a^4a)^6$.

Rozwiązanie. $(a^2)^3 \cdot (a^4a)^6 = a^6 \cdot (a^5)^6 = a^6a^{30} = a^{36}$.

Odpowiedź: a^{36}.

Przykład 2. Oblicz: 1) $0{,}7^{13} : 0{,}7^{11}$;

2) $3^5 \cdot 9^2 : 27^2$;

3) $2^7 \cdot 0{,}5^8$.

Rozwiązanie. 1) $0{,}7^{13} : 0{,}7^{11} = 0{,}7^2 = 0{,}49$.

2) Podamy 9^2 i 27^2 w postaci potęgi z podstawą 3, otrzymamy: $9^2 = (3^2)^2$, $27^2 = (3^3)^2$. Dlatego

$3^5 \cdot 9^2 : 27^2 = 3^5 \cdot (3^2)^2 : (3^3)^2 = 3^5 \cdot 3^4 : 3^6 = 3^9 : 3^6 = 3^3 = 27$.

3) Ponieważ $0{,}5^8 = 0{,}5^7 \cdot 0{,}5$, otrzymamy:

$2^7 \cdot 0{,}5^8 = 2^7 \cdot 0{,}5^7 \cdot 0{,}5 = (2 \cdot 0{,}5)^7 \cdot 0{,}5 = 1^7 \cdot 0{,}5 = 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$.

Odpowiedź: 1) 0,49; 2) 27; 3) 0,5.

Przykład 3. Podaj wyrażenie w postaci potęgi:

1) $25a^2b^4$; 2) $-64p^6$.

Rozwiązanie.

1) $25a^2b^4 = 5^2a^2(b^2)^2 = (5ab^2)^2$;

2) $-64p^6 = (-4)^3(p^2)^3 = (-4p^2)^3$.

Odpowiedź. 1) $(5ab^2)^2$; 2) $(-4p^2)^3$.

Przykład 4. Porównaj wartości wyrażeń 7^{40} i 48^{20}.

Rozwiązanie. Ponieważ $7^{40} = (7^2)^{20} = 49^{20}$ i $49^{20} > 48^{20}$, to $7^{40} > 48^{20}$.

Odpowiedź $7^{40} > 48^{20}$.

Sformułuj podstawową cechę potęgi. ○ Sformułuj zasady mnożenia potęg, dzielenia potęg, podnoszenia potęgi do potęgi i podnoszenia iloczynu do potęgi oraz zapamiętaj odpowiednie wzory.

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

1

332. (*Ustnie.*) Które równości są prawidłowe:
1) $a^3 \cdot a^5 = a^{15}$; 2) $a^2a^8 = a^{10}$; 3) $b^{20} : b^4 = b^5$;
4) $b^6 : b^2 = b^4$; 5) $(a^5)^7 = a^{35}$; 6) $(a^3)^4 = a^7$?

333. (*Ustnie.*) Podaj iloczyn w postaci potęgi:
1) a^7a^3; 2) b^5b; 3) $7^8 \cdot 7^{13}$; 4) $5 \cdot 5^{11}$.

334. Zapisz iloczyn w postaci potęgi:
1) x^5x^7; 2) a^2a^8; 3) m^3m; 4) $2^9 \cdot 2^{30}$.

335. Podaj iloczyn w postaci potęgi:
1) p^2p^4; 2) c^9c^3; 3) $4 \cdot 4^{16}$; 4) c^7c^2.

336. (*Ustnie.*) Przedstaw iloraz w postaci potęgi:
1) $a^7 : a^2$; 2) $3^{14} : 3^{11}$; 3) $c^8 : c$; 4) $12^{14} : 12^{13}$.

337. Zapisz iloraz w postaci potęgi:
1) $b^5 : b^3$; 2) $m^{12} : m^5$; 3) $t^6 : t$; 4) $x^{10} : x^9$.

338. Przedstaw iloraz w postaci potęgi:
1) $m^9 : m^5$; 2) $a^{10} : a^5$; 3) $9^7 : 9$; 4) $m^{14} : m^{13}$.

339. (*Ustnie.*) Podaj w postaci potęgi:
1) $(x^3)^7$; 2) $(3^{10})^4$; 3) $(c^2)^5$; 4) $(9^7)^{11}$.

340. Podaj w postaci potęgi:
1) $(m^3)^5$; 2) $(a^5)^7$; 3) $(9^3)^8$; 4) $(10^4)^2$.

341. Podaj w postaci potęgi:
1) $(a^4)^5$; 2) $(c^7)^2$; 3) $(9^2)^{15}$; 4) $(18^{14})^2$.

2 **342.** Zapisz wyrażenie x^{12} w postaci iloczynu dwóch potęg, jedna z których równa się: 1) x^3; 2) x^6; 3) x^9; 4) x^{11}.

343. Zapisz potęgę w postaci postaci iloczynu dwóch potęg z jednakowymi podstawami: 1) m^7; 2) c^{12}; 3) 5^{17}; 4) p^8.

344. Podaj iloczyn w postaci potęgi:
1) $(-7)^3 \cdot (-7)^4 \cdot (-7)$; 2) aa^5a^{11}; 3) $bbbb^9$;
4) $(x-y)^3(x-y)^{12}$; 5) $14^7 \cdot 14^5 \cdot 14^9$; 6) $\left(3\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^4$.

345. Zapisz w postaci potęgi wyrażenie:
1) $12^3 \cdot 12^9 \cdot 12$; 2) ppp^7p;
3) $(a+b)^3(a+b)^5$; 4) $\left(1\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^6$.

346. Oblicz wartość wyrażenia, używając cechy potęgi i tablicę potęg z podstawami 2 i 3 (patrz nr 307 na str. 58):
1) $2^3 \cdot 2^4$; 2) $3^6 : 3$; 3) $3 \cdot 3^3 \cdot 3^4$; 4) $2^9 : 2^3$.

347. Wykonaj podniesienie do potęgi:
1) $(xy)^9$; 2) $(abc)^7$; 3) $(0{,}1a)^3$; 4) $(2xy)^4$;
5) $(-2a)^5$; 6) $(-0{,}3a)^2$; 7) $(-4ab)^3$; 8) $\left(-\frac{2}{3}axz\right)^4$.

348. Zapisz potęgę w postaci iloczynu potęg lub iloczynu liczby i potęg:
1) $(ab)^5$; 2) $(2p)^4$; 3) $(-5ax)^3$;
4) $\left(-\frac{3}{4}ac\right)^4$; 5) $(-0{,}1m)^3$; 6) $(-0{,}07mx)^2$.

349. Znajdź wartość wyrażenia:
1) $6^{18} : 6^{16}$; 2) $0{,}3^8 : 0{,}3^5$; 3) $\frac{4{,}92^{10}}{4{,}92^9}$;
4) $\frac{10^8}{10^5}$; 5) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{10} : \left(-\frac{1}{4}\right)^7$; 6) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{12} : \left(1\frac{1}{2}\right)^8$.

350. Oblicz:
1) $9^{10} : 9^8$; 2) $\frac{0{,}4^{17}}{0{,}4^{14}}$; 3) $\left(-1\frac{1}{9}\right)^{15} : \left(-1\frac{1}{9}\right)^{13}$; 4) $\frac{\left(1\frac{1}{3}\right)^{12}}{\left(1\frac{1}{3}\right)^8}$.

351. Znajdź wartość wyrażenia:

1) $\frac{8^{12}\cdot 8^{3}}{8^{13}}$; 2) $\frac{4^{8}}{4\cdot 4^{6}}$; 3) $\frac{(-3)^{5}\cdot(-3)^{7}}{(-3)^{10}}$; 4) $\frac{(0,2)^{7}\cdot(0,2)^{5}}{(0,2)^{3}\cdot(0,2)^{6}}$.

352. Oblicz:

1) $5^{4}\cdot 5^{12}:5^{13}$; 2) $\frac{37^{12}}{37^{5}\cdot 37^{6}}$;

3) $\frac{6^{17}\cdot 6^{8}}{6^{22}}$; 4) $\frac{(0,7)^{3}\cdot(0,7)^{16}}{(0,7)^{12}\cdot(0,7)^{5}}$.

353. Uprość wyrażenie, używając zasady mnożenia i dzielenia potęg:
1) $a^{7}\cdot a^{9}:a^{3}$; 2) $b^{9}:b^{5}:b^{3}$;
3) $m^{12}:m^{7}\cdot m$; 4) $p^{10}:p^{9}\cdot p^{3}$.

354. Zapisz wyrażenie w postaci potęgi:
1) $(a^{3})^{4}\cdot a^{8}$; 2) $((a^{7})^{2})^{3}$; 3) $(b^{3})^{2}:b^{4}$; 4) $(a^{4})^{5}\cdot(a^{7})^{2}$.

355. Zapisz wyrażenie w postaci potęgi:
1) $(b^{3})^{4}\cdot b^{7}$; 2) $((x^{4})^{5})^{6}$; 3) $(c^{3})^{8}:c^{10}$; 4) $(m^{3})^{5}\cdot(m^{2})^{7}$.

356. Zapisz wyrażenie w postaci potęgi z podstawą mn:
1) $m^{9}n^{9}$; 2) $m^{7}n^{7}$; 3) $m^{2}n^{2}$; 4) $m^{2015}n^{2015}$.

357. Podaj wyrażenie w postaci potęgi z podstawą ab:
1) $a^{5}b^{5}$; 2) $a^{3}b^{3}$; 3) $a^{18}b^{18}$; 4) $a^{2016}b^{2016}$.

3 **358.** Zapisz iloczyn w postaci potęgi:
1) $a^{4}b^{4}$; 2) $49a^{2}x^{2}$; 3) $0{,}001a^{3}b^{3}$; 4) $-8p^{3}$;
5) $-32a^{5}b^{5}$; 6) $-a^{7}b^{7}c^{7}$; 7) $\frac{1}{27}x^{3}y^{3}$; 8) $-\frac{64}{125}p^{3}q^{3}$.

359. Znajdź wartość x, dla której sprawdza się równość:
1) $3^{5}\cdot 3^{2}=3^{5+x}$; 2) $2^{7}\cdot 2^{8}=2^{1+x}$;
3) $4^{x}\cdot 4^{5}=4^{8}$; 4) $9^{8}:9^{x}=9^{5}$.

360. Znajdź wartość x, dla której sprawdza się równość:
1) $1{,}8^{9}:1{,}8=1{,}8^{9-x}$; 2) $19^{x}:19^{7}=19^{9}$; 3) $4^{12}:4^{x}=4^{7}$.

361. Zamień „gwiazdkę" potęgą z podstawą p, gdzie $p\neq 0$, taką, żeby równość była tożsamością:
1) $p^{7}:*=p^{3}$; 2) $*:p^{5}=p^{9}$;
3) $p^{9}:*\cdot p^{3}=p^{7}$; 4) $*:p^{9}\cdot p^{4}=p^{10}$.

362. Zamień „gwiazdkę" potęgą z podstawą a taką, żeby równość była tożsamością:
1) $a^{2}\cdot *=a^{7}$; 2) $a^{8}\cdot *=a^{9}$; 3) $a^{4}\cdot *\cdot a^{7}=a^{19}$.

363. Podaj wyrażenie:
1) 8^7; $(16^3)^5$ w postaci potęgi z podstawą 2;
2) 25^3; 625^7 w postaci potęgi z podstawą 5.

364. Podaj wyrażenie:
1) 9^7; $(81^3)^5$ w postaci potęgi z podstawą 3;
2) 100^4; 1000^9 w postaci potęgi z podstawą 10.

365. Oblicz, używając cechy potęg:

1) $256 : 2^5$; 2) $243 : 3^4 \cdot 9$; 3) $\dfrac{125^3 \cdot 5^2}{5^3 \cdot 25}$; 4) $\dfrac{100 \cdot 10^7}{10^5 \cdot 1000}$.

366. Podaj w postaci potęgi (n – liczbę naturalną):
1) x^5x^n; 2) $x^8 : x^n$, $n < 8$;
3) $x^n : (x^8 \cdot x^9)$, $n > 17$; 4) $x^{2n} : x^n \cdot x^{3n+1}$;
5) $((x^n)^3)^5$; 6) $(-x^4)^{2n}$.

367. Znajdź wartość wyrażenia:

1) $5^3 \cdot 2^3$; 2) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 \cdot 20^2$; 3) $0{,}2^{13} \cdot 5^{13}$;

4) $(1{,}5)^7 \cdot \left(1\dfrac{1}{3}\right)^7$; 5) $0{,}5^7 \cdot 2^8$; 6) $\left(1\dfrac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^8$.

368. Oblicz:

1) $0{,}25^7 \cdot 4^7$; 2) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^5 \cdot 14^5$; 3) $\left(1\dfrac{1}{8}\right)^9 \cdot \left(\dfrac{8}{9}\right)^{10}$; 4) $1{,}5^7 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^9$.

369. Znajdź wartość wyrażenia, używając cechy potęg:

1) $\dfrac{9^5}{3^7}$; 2) $\dfrac{8^7}{4^8}$; 3) $\dfrac{27^3 \cdot 9^4}{81^3}$; 4) $\dfrac{25^4 \cdot 125^{10}}{5^{36}}$.

4 **370.** Znajdź wartość wyrażenia:

1) $\dfrac{5^7 \cdot 7^8}{35^7}$; 2) $\dfrac{2^{17} \cdot 3^6}{24^5}$; 3) $\dfrac{36^7}{2^{12} \cdot 3^{10}}$; 4) $\dfrac{27^3}{18^4}$.

371. Oblicz:

1) $\dfrac{7^9 \cdot 49^8}{343^8}$; 2) $\dfrac{6^{12}}{2^{10} \cdot 3^{11}}$; 3) $\dfrac{2^8 \cdot 5^7}{100^3}$; 4) $\dfrac{36^5}{24^6}$.

372. Porównaj wartości wyrażeń:
1) 6^{10} i 36^5; 2) 10^{20} i 20^{10};
3) 5^{14} i 26^7; 4) 2^{3000} i 3^{2000}.

Ćwiczenia powtórzeniowe

373. Uprość wyrażenie:
1) $5{,}2 \cdot 6a$; 2) $-4{,}5b \cdot 8$; 3) $-5x \cdot (-12)$;
4) $\frac{2}{3}m \cdot \frac{3}{4}k$; 5) $1\frac{1}{3}x \cdot \left(-1\frac{2}{7}y\right)$; 6) $-1{,}8a \cdot (-b) \cdot 5c$.

374. Cena określonego towaru wynosiła 80 UAH. Najpierw obniżono ją o 15 %, a następnie zwiększono o 10 %. Znajdź:
1) Cenę towaru po obniżce;
2) Cenę towaru po podwyżce;
3) jak i o ile UAH zmieniła się cena towaru;
4) jak i o ile procent zmieniła się cena towaru.

375. Zakładamy, że $a + b = 5$ i $c = -2$. Znajdź wartość wyrażenia:
1) $a + b - c$; 2) $a - 2c + b$; 3) $\frac{a+b+c}{c}$; 4) $c(a + b - 4c)$.

376. Uprość wyraz $1{,}7\left(1\frac{1}{5}a - 4b\right) - 1{,}5(1{,}2b - a)$ i znajdź jego wartość, jeżeli $a = 5$; $b = -10$.

Matematyka życia

377. Student artysta Maks otrzymał swoje pierwsze honorarium za namalowanie obrazu w wysokości 4000 UAH. Z tej okazji on postanowił przywitać swoją wykładowczynię od rysunku, Panią Łarysę, bukietem róż. Jaką największą ilość róż będzie mógł kupić Maks, jeżeli wyda na bukiet połowę tej sumy, którą otrzyma po wyliczenia z honorarium podatku dochodowego w wysokości 18 % i podatku wojskowego w wysokości 1,5 %, pod warunkiem, że jedna różna kosztuje 100 UAH i bukiet musi mieć nieparzystą ilość kwiatów?

Przygotuj się przystwojenia nowego materiału

378. Zapisz współczynnik wyrażenia literowego:
1) $5c$; 2) $-2a$; 3) $0{,}17kb$;
4) $-\frac{1}{3}m$; 5) acx; 6) $-ad$.

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

379. Jest pięć różnych dodatnich liczb, które można podzielić na dwie grupy w taki sposób, żeby suma liczb w każdej z grup była sobie równa. Na ile sposobów można to zrobić?

§ 8. Jednomian. Jednomian uporządkowany

Jednomian

Rozpatrzmy wyrażenia: $7;\ -\dfrac{8}{11};\ a^9;\ -b;\ 7b^2m;\ 4a^2\cdot(-5)ac.$

To – liczby, niewiadome, ich potęgi i iloczyny. Takie wyrażenia nazywamy ***jednomianami.***

Całkowite wyrażenia, czyli liczby, niewiadome, ich potęgi i iloczyny, nazywamy ***jednomianami.***

Wyrażenia $a+b^2$; c^3-5m; $0{,}9a^2:m$ nie są jednomianami, ponieważ mają działania z dodawaniem, odejmowaniem, dzieleniem.

Jednomian uporządkowany

Uprościmy jednomian $4a^2\cdot(-5)ac$, używając cechę przemienną i łączną w mnożeniu:

$$4a^2\cdot(-5)ac=4\cdot(-5)a^2ac=-20a^3c.$$

Upraszczając jednomian $4a^2\cdot(-5)ac$ do postaci $-20a^3c$, mówi się, że go uprościli do *jednomianu uporządkowanego*.

Jeżeli jednomian jest iloczynem, który ma jeden mnożnik liczbowy, zapisany na początku, a inne mnożniki są potęgami różnych niewiadomych, to taki jednomian nazywamy ***jednomianem uporządkowanym***.

Jednomiany 5; -9; b; $-p^3$ – również są jednomianami uporządkowanymi.

Współczynnik i potęgowanie jednomianu

Oczywistym jest fakt, że do jednomianu uporządkowanego można uprościć dowolny jednomian. Mnożnik liczbowy jednomianu uporządkowanego nazywamy ***współczynnikiem*** tego jednomianu.

Na przykład, współczynnikiem jednomianu $-20a^3c$ jest liczba -20, a współczynnikiem jednomianu $\dfrac{7}{11}b^9$ – jest liczba $\dfrac{7}{11}$.

Jeżeli jednomian ma współczynnik 1, to jego nie piszemy → $1 \cdot c^2d = c^2d$

Jeżeli jednomian ma współczynnik –1, to piszemy jedynie znak „minus” → $-1 \cdot p^7 = -p^7$

Dla każdego *jednomianu* można określić *jego potęgę*.

Potęgą jednomianu nazywamy sumę wykładników potęgi wszystkich niewiadomych, które on ma. Jeżeli jednomian nie ma niewiadomych (czyli jest liczbą), to uważa się, że jego potęgę jest równa zero.

Na przykład, jednomian $4a^2b^7c^3$ – jest jednomianem do potęgi 12, przecież $2 + 7 + 3 = 12$; m^7n – jest jednomianem stopnia 8, ponieważ $7 + 1 = 8$; $-5a^4$ – jest jednomianem stopnia 4; $5m$ – jest jednomianem stopnia 1.

Jeśli jednomian nie zawiera zmiennych, jest jednomianem stopnia 0. Na przykład jednomian –7 jest jednomianem stopnia 0.

Jakie wyrażenie jest jednomianem? ○ Jednomian w jakiej postaci nazywamy uporządkowanym? ○ Podaj przykład jednomianu uporządkowanego i nazwij jego współczynnik. ○ Co nazywamy potęgą jednomianu?

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

1 **380.** (*Ustnie.*) Które z wyrażeń są jednomianami:

1) $4{,}5a^2b$; 2) $-0{,}45mpc$; 3) $a^2 - 9$;

4) $p \cdot (-0{,}2)$; 5) a^2am; 6) $\left(-\frac{2}{3}p + 7\right)m$;

7) $x - y$; 8) $c^{12} : c^3$; 9) $5(m + p)^7$;

10) $-m$; 11) $-4{,}9$; 12) 0?

381. (*Ustnie.*) Nazwij jednomiany uporządkowane i ich współczynniki:

1) $5xy$; 2) $-4ama$; 3) $9a^2ba^3b$;

4) $-a^7b^3$; 5) $0{,}2a \cdot 3b$; 6) $-2xyt$;

7) x^9c^7; 8) 17; 9) $4 \cdot 7b$.

382. Które z wyrażeń są jednomianami? Wskaż wśród nich jednomiany uporządkowane:

1) $5a \cdot 3b$; 2) $-7x^2y$; 3) $a^2 - a + 1$; 4) $x \cdot xy \cdot 7$;

5) $\left(\frac{1}{3}a - 1\right) \cdot 5$; 6) $-m^2$; 7) $12 + m$; 8) -145;

9) $4(x - y)^2$; 10) p^{18}; 11) $1 : x$; 12) $-xytm$.

2

383. Uprość jednomian do jednomianu uporządkowanego, podaj jego współczynnik i potęgę:

1) $7a^2a^3a$; 2) $8 \cdot a \cdot 0{,}1m \cdot 2p$;

3) $5t \cdot (-4at)$; 4) $-1\frac{2}{3}m^4 \cdot 12m^2p$;

5) $-5a^2 \cdot 0{,}2am^7 \cdot (-10m)$; 6) $t^3 \cdot (-p)^7 \cdot t$.

384. Uprość jednomian do jednomianu uporządkowanego, podaj jego współczynnik i potęgę:

1) $-7m^2b \cdot 8mb^2$; 2) $5m \cdot 2a \cdot (-3b)$;

3) $-7a \cdot (-5a^2)$; 4) $-2{,}2a^2 \cdot \frac{25}{44}a^3p$;

5) $-a \cdot (-0{,}2a^2p) \cdot (-0{,}3p^4)$; 6) $c^5 \cdot (-a) \cdot (-c^4a) \cdot a^7$.

385. Znajdź wartość jednomianu:

1) $3{,}5a^2$, jeżeli $a = 4; 0{,}1$; 2) $-4m^3$, jeżeli $m = 0; -1$;

3) $10xy$, jeżeli $x = 1{,}4$, $y = -5$;

4) $-0{,}01a^2c$, jeżeli $a = 5$, $c = -2$.

386. Oblicz wartość jednomianu:

1) $1{,}6a^2$, jeżeli $a = -5; 0; -1$;

2) $5b^2c$, jeżeli $b = 0{,}2$ i $c = 0{,}1$; $b = -0{,}4$ i $c = 2$.

387. Wypełnij tablicę w zeszycie:

a	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$
$4a^2$											
$-2a^2$											

3

388. Znajdź:

1) wartość x, dla której wartość jednomianu $-0{,}8x$ jest równa $0; 1; -1; 12$;

2) wartość a i b, dla których wartość jednomianu $15ab$ jest równa $10; -60; 0$.

389. Znajdź:

1) wartość a, dla której wartość jednomianu $-0{,}6a$ jest równa $0; -3; 12; -300$;

2) parę wartości x i y, dla których wartość jednomianu $12xy$ jest równa 15; –120; 0.

390. (*Ustnie.*) Czy stwierdzenie jest prawdziwe? Jeżeli odpowiedź jest tak, uzasadnij ją; jeżeli odpowiedź jest nie – podaj przykład prostujący stwierdzenie.

1) Jednomian $7m^2$ dla dowolnych wartości m przybiera wartości dodatnie;
2) jednomian $\frac{1}{16}p^4$ dla dowolnych wartości p przybiera wartości ujemne;
3) jednomian $-12a^2$ dla dowolnych wartości a przybiera wartości ujemne;
4) jednomian $8b^3$ dla dowolnych wartości b przybiera wartości dodatnie.

391. Znajdź objętość prostokątnego równoległościanu, wysokość którego równa się x cm, szerokość jest 3 razy większa niż wysokość, a długość 2 razy większa niż szerokość.

392. Szerokość prostokąta równa się b dm, a długość jest trzy razy większa niż długość. Znajdź pole prostokąta.

Ćwiczenia powtórzeniowe

393. Otwórz nawiasy i uprość wyrażenie:

1) $3(12x - 5) + 4x$;
2) $7(a - 1) - 7a + 13$;
3) $4{,}2(x - y) + 3{,}5(x + y)$;
4) $12 - 5(1 - x) - 5x$.

394. Wśród wyrażeń $3(y - x)$, $-3(x - y)$, $-3x - 3y$, $-3x + 3y$ znajdź tożsamościowo równe wyrażeniu $3y - 3x$.

Matematyka życia

395. Małżonkowie, Leonid i Oksana, otworzyli lokaty po 100 000 UAH każdy i umówili się za rok porównać zyski otrzymane z tych **lokat.** Leonid otworzył lokatę w banku, który daje 4 % co kwartał, a Oksana w banku, który przyjmuje środki na oprocentowanie **17 % rocznie.** Czyj zysk za rok będzie większy i o ile?

Przygotuj się na przystwojenie nowego materiału

396. Uprość wyrażenie:

1) $-4a \cdot (-0{,}5b)$;
2) $10c \cdot 0{,}1d$;
3) $0{,}25y \cdot (-40x)$;
4) $4c \cdot (-2a) \cdot (-3b)$.

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

397. *Zadanie Uniwersytetu Stanford.*
Żeby ponumerować wszystkie strony książki, drukarz użył 1890 cyfr. Ile stron jest w tej książce?

§ 9. Mnożenie jednomianów. Podnoszenie jednomianu do potęgi

Mnożenie jednomianów

Przy *mnożeniu jednomianów* stosujemy cechy mnożenia i zasadę mnożenia potęg z jednakowymi podstawami.

Przykład 1. Pomnóż jednomiany $-3x^3y^7$ i $5x^2y$.

Rozwiązanie. $-3x^3y^7 \cdot 5x^2y = (-3 \cdot 5)(x^3x^2)(y^7y) = -15x^5y^8$.

Odpowiedź: $-15x^5y^8$.

Iloczynem dowolnych jednomianów jest jednomian, który zwykle jest uporządkowany. Identycznie do przykładu 1 można mnożyć trzy lub więcej jednomianów.

Przykład 2. *Znajdź iloczyn jednomianów* $-\frac{1}{2}a^2b \cdot \frac{2}{3}ab^7 \cdot (-6a^7b^{13})$.

Rozwiązanie. $-\frac{1}{2}a^2b \cdot \frac{2}{3}ab^7 \cdot (-6a^7b^{13}) = \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-6)\right) \cdot (a^2aa^7) \times$

$\times (bb^7b^{13}) = 2a^{10}b^{21}$.

Odpowiedź: $2a^{10}b^{21}$.

Podnoszenie jednomianu do potęgi

Przy *podnoszeniu jednomianu* do potęgi stosuje się cechy potęg.

Przykład 3. Podnieś jednomiany:

1) $-2x^2y$ do sześcianu;
2) $-p^7m^2$ do potęgi 4.

Rozwiązanie.

1) $(-2x^2y)^3 = (-2)^3(x^2)^3y^3 = -8x^6y^3$;
2) $(-p^7m^2)^4 = (-1)^4(p^7)^4(m^2)^4 = p^{28}m^8$.

Odpowiedź: 1) $-8x^6y^3$; 2) $p^{28}m^8$.

Wynikiem podnoszenia jednomianu do potęgi jest jednomian, który zwykle jest jednomianem uporządkowanym.

Rozpatrzmy jeszcze kilka przykładów.

Przykład 4. Uprość wyrażenie $\left(-\frac{2}{3}xy^5\right)^3 \cdot 18x^5y$.

Rozwiązanie. $\left(-\frac{2}{3}xy^5\right)^3 \cdot 18x^5y = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot x^3(y^5)^3 \cdot 18x^5y = \left(-\frac{8}{27} \cdot 18\right) \times$

$\times (x^3x^5) \cdot (y^{15}y) = -5\frac{1}{3}x^8y^{16}$.

Odpowiedź. $-5\frac{1}{3}x^8y^{16}$.

Przykład 5. Podaj jednomian $16m^8p^{10}$ w postaci kwadratu jednomianu uporządkowanego.

Rozwiązanie. Ponieważ $16 = 4^2$, $m^8 = (m^4)^2$, $p^{10} = (p^5)^2$, to

$16m^8p^{10} = 4^2 \cdot (m^4)^2 \cdot (p^5)^2 = (4m^4p^5)^2$.

Odpowiedź: $(4m^4p^5)^2$.

? Jakie zasady i cechy stosujemy przy mnożeniu jednomianów; podnoszeniu jednomianu do potęgi?

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

1 **398.** (*Ustnie.*) Pomnóż jednomiany:

1) $3x$ i $5y$; 2) $-a$ i $2b$; 3) $4x^2$ i $-2y$; 4) $-3m^2$ i $-n^2$.

2 **399.** Wykonaj mnożenie jednomianów:

1) $1{,}5x \cdot 12y$; 2) $-p^2 \cdot 9p^7$;

3) $8a \cdot \left(-\frac{3}{4}a^7\right)$; 4) $-\frac{2}{3}a \cdot (-12ab^3)$;

5) $0{,}7mn^2 \cdot (-m^7n^3)$; 6) $-0{,}2m^7p^9 \cdot (-4m^4p)$;

7) $-0{,}6ab^2c^3 \cdot 0{,}5a^3bc^7$; 8) $\frac{3}{4}mn^2 \cdot \left(-\frac{4}{5}m\right) \cdot \frac{5}{3}n^7$.

400. Znajdź iloczyn jednomianów:

1) $20a \cdot (-0{,}5b)$; 2) $-a^2 \cdot (-3a^7b)$;

3) $5b \cdot \left(-\frac{1}{5}b^3\right) \cdot 2c$; 4) $\frac{3}{5}xy^3 \cdot \frac{10}{21}x^2y^5$;

5) $\frac{3}{5}ab^2 \cdot \left(-\frac{5}{6}a^3\right) \cdot 2b^7$; 6) $-\frac{1}{2}m^2p \cdot \frac{2}{3}m^3p \cdot \frac{1}{5}mp^3$.

401. Pomnóż jednomiany:
1) $-13x^2y$ i $12xy^3$;
2) $0{,}8mn^8$ i $50m^2n$;
3) $-\frac{1}{5}ab^2$, $15a^2p$ i $-\frac{1}{3}pb^4$;
4) $20xy^2$; $-0{,}1x^2y$ i $0{,}2x^2y^2$.

402. Znajdź dwa różne zapisy jednomianu $-12\mathrm{m}^2\mathrm{n}^5$ w postaci ilorazu dwóch uporządkowanych jednomianów.

403. Znajdź dwa różne zapisy jednomianu $18\mathrm{m}^2\mathrm{n}^7$ w postaci iloczynu:
1) dwóch uporządkowanych jednomianów;
2) trzech uporządkowanych jednomianów.

404. (*Ustnie.*) Podnieś jednomian do potęgi:
1) $(-mn^2)^2$;
2) $(2a^2b)^3$;
3) $(-m^3b^2)^4$;
4) $(-a^3b^5)^7$.

405. Podnieś jednomian do kwadratu:
1) $3a$;
2) $2b^2$;
3) $-4a^3b^7$;
4) $-0{,}1p^9a^4$;
5) $-\frac{1}{5}m^5$;
6) $\frac{6}{7}p^6m^8$.

406. Podnieś jednomian do sześcianu:
1) $2p$;
2) $7m^5$;
3) $-3a^3b^2$;
4) $-0{,}1a^7b^2$;
5) $\frac{1}{4}p^6$;
6) $-\frac{2}{5}mn^4$.

407. Wykonaj podnoszenie do potęgi:
1) $(-xy^3)^3$;
2) $(-7a^2bc^3)^2$;
3) $(p^3m^4q^5)^4$;
4) $(-2a^2b)^4$;
5) $\left(\frac{1}{6}p^2c^5\right)^3$;
6) $(-c^5m^{10}a^3)^5$.

408. Podaj w postaci jednomianu uporządkowanego:
1) $(-5x)^2$;
2) $\left(\frac{1}{2}p^4\right)^3$;
3) $(-0{,}2a^2b^3)^4$;
4) $(-ab^7c^5)^6$;
5) $(-10a^{11}b)^5$;
6) $(a^8c^{10})^7$.

3 **409.** Podaj wyrażenie:
1) $\frac{1}{9}x^6$; $0{,}25m^6p^{10}$; $121a^{18}b^2c^4$ w postaci kwadratu jednomianu;
2) $0{,}001a^9$; $-125p^3b^{12}$; $\frac{8}{27}c^6m^{15}a^{21}$ w postaci sześcianu jednomianu.

410. Jaki jednomian uporządkowany musi być w nawiasach zamiast luk, żeby równość była prawdziwa:
1) $(\ \dots\ )^2 = 4m^6$;
2) $(\ \dots\ )^2 = 0{,}36p^8q^{10}$;
3) $(\ \dots\ )^3 = -8c^9$;
4) $(\ \dots\ )^3 = 1000c^6m^{12}$;
5) $(\ \dots\ )^4 = 16a^4b^8$;
6) $(\ \dots\ )^5 = c^{15}p^{45}$?

411. Jaki jednomian uporządkowany trzeba napisać zamiast „gwiazdki”, żeby otrzymać równość prawdziwą:

1) $* \cdot 4m^2n = 12m^7n^{12}$; 2) $5a^2b \cdot * = a^3b^7$;

3) $* \cdot (-2m^2p) = 24m^3p^2$; 4) $* \cdot (-9a^2b) = a^3b$;

5) $5m^2a^3 \cdot * = -5m^2a^3$; 6) $4m^2n \cdot * = -\frac{1}{16}m^2n^8$?

412. Jaki jednomian uporządkowany trzeba napisać zamiast „gwiazdki”, żeby otrzymać równość prawdziwą:

1) $* \cdot 3m^2n^3 = 15m^3n^8$; 2) $-7p^2x^3 \cdot * = 21p^2x^9$;

3) $* \cdot (-3a^3b^9) = a^6b^{10}$; 4) $12p^3m \cdot * = -\frac{1}{2}p^3m$?

413. Uprość wyrażenie:

1) $15m^2 \cdot (4m^3)^2$; 2) $-0{,}5m^5 \cdot (2m^3)^4$;

3) $(-3a^3b^4)^4 \cdot \left(-\frac{1}{81}ab^3\right)$; 4) $\left(-\frac{2}{3}ac^4\right)^3 \cdot 18a^5c$.

414. Podaj w postaci jednomianu uporządkowanego:

1) $6a^3 \cdot (2a^5)^2$; 2) $-0{,}8a^4 \cdot (5a^7)^3$;

3) $(-2b^2a^7)^4 \cdot \left(-\frac{1}{8}a^3b\right)$; 4) $\left(-\frac{4}{5}mn^4\right)^3 \cdot 25m^4n$.

415. Podaj wyrażenie w postaci ilorazu liczby 5 i kwadratu pewnego wyrażenia:

1) $5a^4b^2$; 2) $20c^4d^2m^8$; 3) $\frac{5}{16}p^{12}$.

416. Zapisz wyrażenie w postaci jednomianu uporządkowanego:

1) $(8ab^3)^2 \cdot (0{,}5a^3b)^3$; 2) $\left(\frac{3}{4}m^2n^8\right)^3 \cdot (-4m^7)^2$;

3) $-(-m^2n^3)^4 \cdot (7m^3n)^2$; 4) $(-0{,}2x^3c^7)^5 \cdot (10xc^3)^5$.

417. Uprość wyrażenie:

1) $(10m^2n)^2 \cdot (3mn^2)^3$; 2) $\left(-\frac{1}{2}ab^3\right)^3 \cdot (4a^5)^2$;

3) $-(3a^6m^2)^3 \cdot (-a^2m)^4$; 4) $(-5xy^6)^4 \cdot (0{,}2x^6y)^4$.

418. Podaj jednomian w postaci iloczynu dwóch jednomianów, jeden z których równa się $-4ab^2$:

1) $8a^2b^2$; 2) $-\frac{1}{5}ab^4$; 3) $-7{,}8a^3b^5$; 4) $1\frac{1}{8}a^3b^2$.

419. Podaj jednomian w postaci iloczynu dwóch jednomianów, jeden z których równa się $3mn^2$:

1) $12m^2n^2$; 2) $-\frac{1}{4}mn^5$; 3) $-6{,}9m^7n^8$; 4) $1\frac{1}{5}m^8n^2$.

4 **420.** Zapisz w postaci jednomianu uporządkowanego (n – liczbę naturalną):

1) $(-0{,}2a^{n+5}b^{n+2}) \cdot (0{,}5a^{n-2}b^{n+3})$, $n > 2$;
2) $(2a^{2n}b^5)^3 \cdot (-3a^3b^{3n})^2$;
3) $(a^2b^3)^n \cdot (a^{2n}b)^3 \cdot (a^2b^{3n})^5$;
4) $(x^{2n-1}y^{3n+1})^2 \cdot (x^{3n-1}y^{2n+1})^3$.

421. Wiadomo, że $3ab^2 = 7$. Znajdź wartość wyrażenia:

1) ab^2; 2) $5ab^2$; 3) $-9a^2b^4$; 4) $27a^3b^6$.

422. Wiadomo, że $5xy^2 = 9$. Znajdź wartość wyrażenia:

1) xy^2; 2) $7xy^2$; 3) $-25x^2y^4$; 4) $125x^3y^6$.

Ćwiczenia powtórzeniowe

423. Do dowiezienia uczniów do letniego obozu sportowego zadziałano 3 minibusy marki „Hazel” i 2 mikrobusy marki „Bohdan”. W każdej „Hazeli” umieszczono x uczniów/uczennic, a w każdym „Bohdani” y uczniów/uczennic. Ile ogółem uczniów/uczennic przyjechało do obozu na odpoczynek wyżej wskazanym transportem? Zapisz odpowiedź w postaci wyrażenia i znajdź jego wartość, jeżeli $x = 20$, $y = 22$.

424. Zamień „gwiazdkę” takim wyrażeniem, żeby równość była tożsamością:

1) $(b^3)^2 \cdot * = b^{10}$; 2) $(m^2)^3 \cdot * = -m^{14}$;
3) $(a \cdot a^4)^2 : * = a^3$; 4) $n^6 \cdot (n \cdot n^2)^2 = * \cdot (-n^4)$.

425. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{2^{n+1} \cdot 7^{n+2}}{14^n}$, gdzie n jest liczbą naturalną.

Matematyka życia

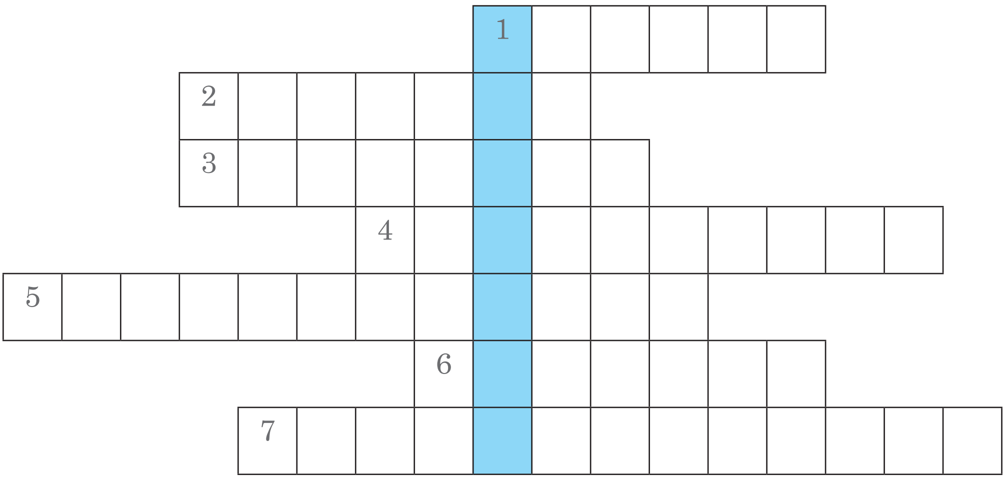
426. Z powodu zużycia opon gumowych każdy samochód co roku rozpyla w powietrzu 10 kg pyłu gumowego. Niech w niedużym mieście na 1000 rodzin każda czwarta rodzina posiada samochód, a 5 % wszystkich rodzin posiada po dwa samochody. Ile gumowego pyłu rozpylają samochody mieszkańców miasteczka co roku?

Przygotuj się do przyswojenia nowego materiału

427. Uprość składniki podobne:
1) $7a - 6b - 2a + b$; 2) $-11x + 10y - 3x - 2y$;
3) $10{,}3m - 12{,}9t + 6{,}7m$; 4) $3c + d + 3c - d$.

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

428. *Wybitny Ukraińcy i Ukrainki.* Zapisz poziomo nazwiska wybitnych Ukraińców (w razie potrzeby wykorzystaj dodatkową literaturę lub internet) i przeczytaj w wydzielonej kolumnie jedną z podstawowych definicji w matematyce, z która zapoznasz się w następnym rozdziale.



1. Wybitny poeta, naukowiec, publicysta.

2. Ukraiński matematyk, współautor pierwszego trzytomowego słownika ukraińskiej terminologii matematycznej, pomysłodawca pierwszej olimpiady Kijowskiej, imiennik pierwszego prezydenta Ukrainy.

3. Wybitny poeta i malarz, którego dziedzictwo literackie uważane jest za podstawę ukraińskiej literatury i współczesnego języka ukraińskiego.

4. Jeden z najsłynniejszych na świecie konstruktor samolotów ukraińsko-polskiego pochodzenia.

5. Wybitny aktorka, która jako pierwsza otrzymała miano Narodowej Artystki Ukraińskiej SSR.

6. Ukraińska malarka, przedstawicielka sztuki naiwnej, ludowego malarstwa dekoracyjnego. Należy do najbardziej znanych kobiet Ukrainy.

7. Autor „Eneidy” – pierwszej utworu nowej literatury ukraińskiej, napisanego w języku narodowym, jeden z założycieli nowej ukraińskiej dramaturgii.

SAMODZIELNA PRACA DOMOWA NR 2

Zadania 1–12 mają po cztery warianty odpowiedzi (A–D), spośród których tylko jeden jest prawidłowy. Wybierz prawidłowy wariant odpowiedzi.

1 **1.** Które z wyrażeń jest tożsamościowo równe wyrażeniu $b + b + b + b$?

A. b^4 **B.** $4 + b$ **C.** $4b$ **D.** $\frac{b}{4}$

2. Które z wyrażeń jest jednomianem?

A. $7x - y$ **B.** $7x + y$ **C.** $\frac{7x}{y}$ **D.** $7xy$

3. $a^6 : a^3 = \ldots$

A. a^3 **B.** a^2 **C.** a **D.** 1

2 **4.** Określ wartość wyrażenia $(-2)^3$.

A. 8 **B.** –8 **C.** –6 **D.** 6

5. Zapisz w postaci wyrażenia kwadrat sumy liczb m i $3a$.

A. $(m - 3a)^2$ **B.** $m^2 + (3a)^2$ **C.** $(m + 3a)^2$ **D.** $(m \cdot 3a)^2$

6. Oblicz wartość wyrażenia $2{,}5a^2$, jeżeli $a = -4$.

A. –40 **B.** 40 **C.** 100 **D.** –100

3 **7.** Znajdź wartość wyrażenia $-14\frac{1}{2}a + 8{,}3b + 4\frac{1}{2}a - 7{,}3b$, jeżeli a = **1,9;** b = **–3,5.**

A. 22,5 **B.** –15,5 **C.** –22,5 **D.** 15,5

8. Oblicz $\frac{9^{18}}{27^{12}}$.

A. 3 **B.** 9 **C.** 27 **D.** 1

9. $(4mp^3)^2 \cdot (0{,}5m^7p)^3 = \ldots$

A. $\frac{1}{2}m^{23}p^9$ **B.** $2m^8p^4$ **C.** $2m^{23}p^9$ **D.** $2m^{12}p$

4 **10.** Jaką największą wartość może przybrać wyrażenie $1 - (a - 3)^2$?

A. 1 **B.** –1 **C.** –3 **D.** –8

11. Wskaż największą z liczb 2^{300}, 3^{200}, 7^{100}, 25^{50}.

A. 2^{300} **B.** 3^{200} **C.** 7^{100} **D.** 25^{50}

12. Znajdź wartość wyrażenia $8x^2y^4$, jeżeli $2xy^2 = -5$.

A. 25 **B.** –50 **C.** 50 **D.** 100

Zadania 1–12 można wykonać również online pod linkiem *https://cutt.ly/HwKdnLcu* lub za pomocą kodu QR.

W zadaniu 13 trzeba dopasować informacje oznaczone cyframi i literami. Jedna odpowiedź jest zbędna.

13. Dopasuj wyrażenia (1–3) do ich wartości (A–D).

Wyrażenie	Wartość wyrażenia
1. $2^9 : 64$	A. 2
2. $1{,}5^4 \cdot \left(1\frac{1}{3}\right)^4$	B. 4
3. $\frac{8^4 \cdot 2^5}{4^8}$	C. 8
	D. 16

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE WIEDZĘ DO §§ 4–9

1

1. Czy są tożsamościowo równe wyrażenia:

1) $3b + 4b$ i $7b$; 2) $a + a + a$ i a^3;

3) $m + 2a$ i $2a + m$; 4) $3(x - 2)$ i $3x - 2$?

2. Podaj w postaci potęgi iloczyn:

1) $4 \cdot 4 \cdot 4$; 2) $-3 \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$.

3. Wykonaj działania:

1) x^5x^4; 2) $x^7 : x^2$.

2

4. Znajdź wartość wyrażenia:

1) $0{,}4 \cdot (-5)^4$; 2) $2^5 - 4^3 + (-1)^5$.

5. Podaj w postaci potęgi iloczyn:

1) $(m^3)^4 \cdot m^7$; 2) $(a^2)^7 : (a^3)^2$.

6. Zapisz wyrażenie w postaci jednomianu uporządkowanego:

1) $-0{,}3m^2np^3 \cdot 4mn^2p^7$; 2) $\left(-\frac{1}{2}p^7a\right)^3$.

3

7. Uprość wyrażenie:

1) $0{,}2a^2b \cdot (-10ab^3)^2$; 2) $\left(-\frac{1}{4}m^2n^3\right)^4 \cdot (4m^5n)^3$.

8. Udowodnij tożsamość: $2(a + b - c) + 3(a - c) - 2b = 5(a - c)$.

4

9. Porównaj wyrażenia:

1) 5^{12} i 25^6; 2) 2^{30} i 3^{20}.

Dodatkowe ćwiczenia

4 **10.** Udowodnij, że suma trzeb kolejnych nieparzystych liczb naturalnych dzieli się na 3.

11. Jaką najmniejszą wartość może przybierać wyrażenie:
1) $m^4 - 12$; 2) $(a + 2)^8 + 7$?

12. Wiadomo, że $4m^2n = 9$. Znajdź wartość wyrażenia:
1) $12m^2n$; 2) $4m^4n^2$.

Z historii matematycznego ruchu olimpijskiego Ukrainy

Konkurs matematyczny cieszy się dużą popularnością wśród ukraińskich uczniów. Są to zarówno konkursy indywidualne – olimpiada z matematyki, jak i drużynowe – turniej młodych matematyków lub potyczki matematyczne. Udział w tym konkursach daje uczniom możliwość dołączyć się do wspaniałego świata ciekawych i niestandardowych zadań, sprawdzić swoją wiedzę z matematyki, uwierzyć we własne siły lub znaleźć swój talent matematyczny.

Ogólnoukraińska olimpiada z matematyki wśród uczniów odbywa się co roku w czterech etapach. Pierwszy – to szkolne olimpiady, drugi – rejonowe i miejskie (dla miast w podporządkowaniu wojewódzkim), trzeci – olimpiady wojewódzkie, olimpiady miasta Kijowa i Sewastopola oraz Autonomicznej Republiki Krymskiej. Czwarty etap jest końcowym i wyłania zwycięzców trzeciego etapu Ogólnoukraińskiej olimpiady. Właśnie na podstawie wyników czwartego etapu sporządzana jest lista kandydatów do drużyny zespołu ukraińskiego do uczestnictwa w Międzynarodowej olimpiadzie z matematyki. Aby trafić do zespołu, zwycięzcy czwartego etapu uczestniczą w selekcyjnych i szkoleniowych spotkaniach, na podstawie wyników których i sporządza się ostateczny zestaw drużyny. Co roku ilość przedstawicieli od Ukrainy na Międzynarodowej olimpiadzie jest ustalana na podstawie ich miejsca w rankingu spośród krajów uczestniczących. Im wyższy ranking, tym więcej uczestników trafi do zespołu. Ranking drużyny zależy od wyników jej występu na Międzynarodowej olimpiadzie, zwłaszcza na ranking wpływa ta ilość

punktów, którą zdobyli uczestnicy za wszystkie zadania konkursowe na olimpiadzie. Historia matematycznego ruchu olimpijskiego Ukrainy zaczęła się od Kijowskich olimpiad matematycznych. Pierwsza na Ukrainie olimpiada odbyła się w stolicy w budynku Kijowskiego państwowego uniwersytetu (obecnie Kijowski Narodowy Uniwersytet im. T. Szewczenki) w 1935 roku z inicjatywy wybitnego ukraińskiego matematyka Michała Krawczuka (1892–1942). W następnym roku w Kijowskiej olimpiadzie wzięli udział również uczniowie z innych ukraińskich miast. Zwłaszcza w 1936 roku wśród zwycięzców olimpiady był dziesięcioklasista z Charkowa Ołeksij Pogoriełow, który z biegiem czasu związał swoją działalność naukową z geometrią i został wybitnym geometrą, akademikiem Narodowej Akademii Nauk Ukrainy, autorem szkolnego podręcznika z geometrii, według którego kilkadziesiąt lat sukcesywnie uczyli się uczniowie na Ukrainie. W tym samym 1936 roku rozpoczęto również rejonowe olimpiady i przeprowadzono pierwszą Ogólnoukraińską olimpiadę.

W 1938 roku M. Krawczuka dotknęły represje, ale nieobojętni do matematyki młodzi naukowcy zachowali tradycję przeprowadzania co roku Kijowskiej olimpiady matematycznej. W latach 1942-1945 w okresie II wojny światowej olimpiady nie były przeprowadzane, ale potem je wznowiono. Ważną rolę we wznowieniu Kijowskiej olimpiady z matematyki odegrał Mikołaj Boholubow, który na tamte czasy był młodym profesorem fizycznego i matematycznego (obecnie mechaniko-matematycznego) wydziału Kijowskiego Narodowego Uniwersytetu. W latach powojennych do organizacji Kijowskich olimpiad z matematyki według propozycji M. Boholubowa dołączyła się sławna badaczka pedagogiki i historii matematyki Liubow Graciańska. W tym czasie uczniowie klas 7-10, którzy interesowali się matematyką, mieli możliwość co tygodnia odwiedzać kluby matematyczne przy Kijowskim Państwowym Uniwersytecie, organizacją których zarządzała Pani Liubow. Zajęcia w klubach prowadzili studenci mechaniko-matematycznego wydziału, którzy później stali na czele matematycznego ruchu olimpijskiego Ukrainy. Wśród nich A. Skorohod, M. Jadrenko, W. Wyszenski, W. Michajłowski i inni. Członkowie klubów tradycyjnie uczestniczyli w Kijowskich olimpiadach z matematyki. Wtedy uczestnikiem Kijowskiej olimpiady mogli być zarówno uczniowie z Kijowa, jak i uczniowie z innych miast Ukrainy, ponieważ do 1961 roku olimpiada odbywała się tylko w Kijowie. A teraz zgodnie z tradycją w Kijowskiej olimpiadzie z matematyki mogą brać udział wszyscy chętni uczniowie.

Właśnie rok 1961 uważa się za rok założenia Ogólnopaństwowej olimpiady – końcowego etapu olimpiady z matematyki na Ukrainie, który stał się analogiem czwartego etapu obecnej Ogólnoukraińskiej olimpiady z matematyki wśród uczniów. Aby co roku rywalizować, trzeba było wybrać silną drużynę wśród uczestników, zbierając szkolne talenty w różnych zakątkach Ukrainy, Temu zadaniu miała sprostać Ogólnopaństwowa olimpiada z matematyki, w której mieli rywalizować między sobą zwycięzcy ukraińskich olimpiad wojewódzkich, miast Kijowa i Sewastopola oraz Autonomicznej Republiki Krymskiej, czyli uczniowie ze wszystkich regionów Ukrainy. Tak więc w 1961 roku Ogólnopaństwowa olimpiada z matematyki stała się wydarzeniem edukacyjnym na miarę znaczenia ogólnokrajowego. Właśnie z jej zwycięzców w późniejszym etapie kształtował się zespół młodych matematyków dla udziału w Ogólnoradzieckich olimpiadach.

Istotną rolę w odnalezieniu matematycznie uzdolnionej młodzieży i angażowaniu ich w zawodach matematycznych odegrała Państwowa Zaoczna Szkoła Fizyki i Matematyki. Jej zajęcia pokazywano w każdy czwartek o 16 godzinie w ukraińskiej telewizji. Uczniowie słuchali ciekawe lekcje czołowych matematyków, zapoznawali się z zadaniami prac kontrolnych, które mieli wykonać i wysłać organizatorom wyżej wymienione szkoły na sprawdzian, jak również uczestniczyli w olimpiadzie zaocznej, której zadania ogłaszano w tym programie. Na podstawie wyników zaocznej olimpiady i prac kontrolnych wyłaniali matematycznie uzdolnionych uczniów Ukrainy, angażowali ich do udziału w ocznym etapie olimpiady wyżej wspomnianej szkoły, a absolwentów szkół do nauki w czołowych wyższych uczelniach oświatowych Ukrainy, zwłaszcza na wydziale mechaniczno-matematycznym Kijowskiego Państwowego Uniwersytetu. Obecnie wiele naukowców starszego pokolenia mile wspominają Państwową Zaoczną Szkołę Fizyki i Matematyki, podkreślając, że właśnie dzięki niej zainteresowali się matematyką i stali się naukowcami.

Istotną rolę w zwiększeniu zainteresowania uczniów matematyką, zaangażowaniu ich w świat różnorodnych zadań odegrał również coroczny zbiór artykułów popularnonaukowych dla dzieci „Świat matematyki", który zaczęto publikować w 1968 roku. Wśród autorów materiałów zbioru byli znani i sławni profesorzy wydziału mechaniczno-matematycznego Kijowskiego Państwowego Uniwersytetu, jego studenci i doktoranci. W skład redakcji zbioru weszli znani ukraińscy matematycy A. Konforowicz, M. Liaszczenko, M. Jadrenko, A.Dorohowcew i inni. Profesor Kijowskiego Państwowego Uniwersytetu Mikołaj Jadrenko do ostatnich dni swego życia był redaktorem odpowiedzialnym danego wydania. Zbiór „Świat matematyki" jest publikowany nawet obecnie, trochę zmieniając swój format, ale nie zmieniając swojej treści i celu: popularyzacja matematyki wśród uczniów.

Logo MOM

M. Jadrenko ponad 30 lat (do 2004 roku) stał na czele jury Ogólnoukraińskiej olimpiady z matematyki wśród uczniów, w tym w 1991 roku, kiedy Ogólnoukraińskie olimpiady z matematyki wśród uczniów zajęły zaszczytne miejsce w światowej sieci zawodów z matematyki wśród uczniów.

W 1992 roku niezwykłym wydarzeniem dla ukraińskiego olimpijskiego ruchu matematycznego był udział reprezentacji Ukrainy w Międzynarodowej Olimpiadzie Z Matematyki (MOM), chociaż w ówczesnym roku zgodnie z regulaminem drużyna miała jedynie status obserwatora. Od 1993 roku Ukraina jest oficjalnym uczestnikiem Międzynarodowej Olimpiady z Matematyki. Uczniowie ukraińskich szkół godnie reprezentują swój kraj, co roku zdobywając złote, srebrne i brązowe medale. Ogólnie w latach 1993-2023 Ukraina zdobyła 171 medali (43 złote, 75 srebrnych, 53 brązowe) na Międzynarodowej Olimpiadzie z Matematyki i posiada wysoki poziom spośród 125 uczestniczących drużyn z innych krajów świata.

§ 10. Wielomian. Podobne wyrazy wielomianu i ich upraszczanie. Potęga wielomianu

Wielomian

Wyrażenie $7x^2y^3 - 5xy^7 + 9x^5 - 8$ jest sumą jednomianów $7x^2y^3$, $-5xy^7$, $9x^5$ i -8. Dane wyrażenie nazywamy ***wielomianem***.

Sumę jednomianów nazywamy ***wielomianem***.

Jednomiany tworzące wielomian nazywamy ***wyrazami wielomianu***. Na przykład, wielomian $7x^2y^3 - 5xy^7 + 9x^5 - 8$ składa się z czterech wyrazów: $7x^2y^3$, $-5xy^7$, $9x^5$ i -8.

Wielomian zawierający dwa wyrazy nazywamy ***dwumianem***, wielomian zawierający trzy wyrazy nazywamy ***trójmianem***. Na przykład, $a + b^7$, $2xy - 3y^7$ – dwumiany; $x + xy + y^3$, $mn + m - n$ to trójmiany. Jednomian można uważać odrębnym rodzajem wielomianu.

Dowolny wielomian jest wyrażeniem całkowitym. Ale nie każde wyrażenie jest wielomianem. Na przykład, wyrażenia całkowite $3(x-1)$; $(a+b)^2$; $(m-n)^3$ nie są wielomianami, ponieważ one nie są sumą jednomianów.

Wyrazy podobne wielomianu

W wielomianie $7x^2y + 8 + 9xy - 5x^2y - 9$ wyrazy $7x^2y$ i $-5x^2y$ są wyrazami podobnymi, ponieważ one mają taką samą część literową x^2y. Również wyrazami podobnymi są wyrazy 8 i –9, które nie mają części literowej.

Ilorazy podobne wielomianu nazywamy ***wyrazami podobnymi wielomianu***, a zredukowanie wyrazów podobnych w wielomianie – ***zredukowaniem wyrazów podobnych wielomianu***.

Przykład1. Zredukować wyrazy podobne w wielomianie

$$7x^2y + 8 + 9xy - 5x^2y - 9.$$

Rozwiązanie. $7x^2y + 8 + 9xy - 5x^2y - 9 = (7x^2y - 5x^2y) + (8 - 9) + 9xy = 2x^2y - 1 + 9xy$.

Odpowiedź: $2x^2y - 1 + 9xy$.

Wielomian w kanonicznej postaci

Każdy wyraz wielomianu $2x^2y - 1 + 9xy$ jest jednomianem uporządkowanym, przy tym dany wielomian już nie posiada wyrazów podobnych. Takie wielomiany nazywamy ***wielomianami w kanonicznej postaci.***

Wielomian będący sumą jednomianów postaci standardowej bez wyrazów podobnych nazywany jest ***wielomianem postaci standardowej***.

Przykład 2. Czy wielomian zapisano w kanonicznej postaci:

1) $xy^2 - x^2y^3x + 7$; 2) $m^2 + 3mn - 3n^2$; 3) $9ab + 7 - 5ab$?

Rozwiązanie. 1) Ponieważ x^2y^3x nie jest jednomianem uporządkowanym, to wielomian $x^2y - x^2y^3x + 7$ nie jest wielomianem w kanonicznej postaci.

2) $m^2 + 3mn - 3n^2$ – wielomian w kanonicznej postaci.

3) Wielomian $9ab + 7 - 5ab$ zawiera podobne wyrazy, dlatego nie jest wielomianem w kanonicznej postaci.

Odpowiedź. 1), 3) *nie*; 2) *tak*.

Przykład 3. Zapisać wielomian w postaci kanonicznej

$$3x^2yx + 5 - 4xy^2y - 5x^3y + 7xy^3 - 8.$$

Rozwiązanie. Najpierw zredukujemy wyrazy wielomianu do kanonicznej postaci, zatem zredukujemy wyrazy podobne:

$3x^2yx + 5 - 4xy^2y - 5x^3y + 7xy^3 - 8 = \underline{3x^3y} + 5 - \underline{\underline{4xy^3}} - \underline{5x^3y} + \underline{\underline{7xy^3}} - 8 = -2x^3y + 3xy^3 - 3.$

Odpowiedź. $-2x^3y + 3xy^3 - 3$.

Potęga wielomianu w postaci kanonicznej

Wyrazy wielomianu $7m^4p - 9m^2p^4 + 3$, który jest w postaci kanonicznej – to jednomiany do potęgi 5, 6 i 0 odpowiednio. Największą z tych potęg nazywamy potęgą wielomianu. Dlatego $7m^4p - 9m^2p^4 + 3$ jest wielomianem do potęgi 6.

Potęgą wielomianu w postaci kanonicznej nazywamy największą z potęg jednomianów, które zawiera dany wielomian.

Na przykład, $5x - 7$ i $2a - 3b + 7$ – jest wielomianem do potęgi 1; $2mn + n$ do potęgi 2; $2x^4 + x^5 - x^2$ do potęgi 5.

Potęgą dowolnego wielomianu nazywamy potęgę tożsamościowo równą wielomianowi w postaci kanonicznej.

Przykład 4. Określić potęgę wielomianu

$$2x^2y + 3xy - 6x^2y + 4x^2y - 7.$$

Rozwiązanie. Najpierw zapiszemy wielomian w postaci kanonicznej: $\underline{2x^2y} + 3xy - \underline{6x^2y} + \underline{4x^2y} - 7 = 3xy - 7$. Wielomian $3xy - 7$ jest wielomianem do potęgi 2, a więc dlatego wielomian $2x^2y + 3xy - 6x^2y + 4x^2y - 7$ jest wielomianem do potęgi 2.

Odpowiedź: do potęgi 2.

Wyrazy wielomianu można zapisywać w różnej kolejności.

Dla wielomianów w postaci kanonicznej, które zawierają jedną niewiadomą, wyrazy w większości przypadków uporządkowują według rosnących lub malejących wykładników potęg danej niewiadomej.

Na przykład, $7a^4 + 5a^3 - 8a^2 - 5$ lub $-5 - 8a^2 + 5a^3 + 7a^4$.

Co nazywamy wielomianem? ○ Jaki wielomian nazywamy dwumianem, a jaki trójmianem? ○ Jakie wyrazy wielomianu nazywamy wyrazami podobnymi? ○ Jaki wielomian nazywamy wielomianem w postaci kanonicznej? ○ Co nazywamy potęgą wielomianu?

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

1

429. (*Ustnie.*) Które z danych wyrazów są wielomianami:

1) $a(a^2 - 3)$; 2) $4c^2 - c^2 + x^6$; 3) $\frac{9}{a-2}$; 4) y;

5) $(c - 3)(c + 2)$; 6) $t^2 - \frac{1}{2}t$; 7) 4,9; 8) $(m - 2c)^2$?

430. Wybierz wielomiany wśród podanych wyrazów:

1) $c^3 - c^2 + c$; 2) $\frac{m}{m-p}$; 3) d^2; 4) $x(x - y)$;

5) $-4\frac{1}{7}$; 6) $(x + 5)(x - 5)$; 7) $c^7 - 1$; 8) $(a + b)^2$.

431. Nazwij wyrazy wielomianu:
1) $4x^2y - 7xy^2 + 5 + 3xy$; 2) $-a^3 + 4a^2 - 9a + 3$.

432. Utwórz wielomian z jednomianów:
1) $5m^2$, $-2m$ i 3; 2) $7ab$, $-2a^2$ i b^2;
3) $4p$ i $2q^3$; 4) $-c^2$, $-3mc$, m^3 i 7.

433. Utwórz wielomian z jednomianów:
1) $5m$ i $-5n$; 2) m^3, $-2m^2$ i mn; 3) $-x^3$, $-2y^2$, xy i 4.

434. (*Ustnie.*) Czy wielomian jest zapisany w postaci kanonicznej? Określ potęgę dla wielomianów w postaci kanonicznej.
1) $5m^2 + m^3 + 1$; 2) $7x^2 + 2x + 3x^2$;
3) $2 + a + a^2b + 3$; 4) $c^2c + c^5 - 8$;
5) $3x^2x + 2xx^2 + x$; 6) $p^2 - 19$.

2

435. Zredukuj podobne wyrazu wielomianu:
1) $7x - 15xy - 8xy$; 2) $8ab - 5ab + 4b^2$;
3) $9a^4 - 5a + 7a^2 - 5a^4 + 5a$;
4) $18a^4b - 9a^4b - 7ba^4$;
5) $4b^3 + b^2 - 15 - 7b^2 + b^3 - b + 18$;
6) $9xy^2 - x^3 - 5xy^2 + 3x^2y - 4xy^2 + 2x^3$.

436. Zredukuj podobne wyrazu wielomianu:
1) $a^3 - 2a^3 + 3a^3$;
2) $-x^4 + 2x^3 - 3x^4 + 5x^2 - 3x^2$;
3) $7 + 3m^6 - 2m^3 - 5m^6 + 2m^6 - m^5 - 7$;
4) $9xy^3 + 6x^2y^2 - x^3y + x^2y^2 - 9xy^3$.

437. (*Ustnie.*) Które z wielomianów są wielomianami do potęgi 4:
1) $a^3 + 3a^2 + 1$; 2) $a^2a^2 - 8$;
3) $a^4 - 4a^3 - a^4$; 4) $aa^3 + 2$?

438. Które z wielomianów są wielomianami do potęgi 5:

1) $m^3 + m^4 - m^2$; 2) $12 + mm^4$;

3) $mm + mm^2 + m^2m^2$; 4) $m^5 - 3 - m^5$?

439. Zredukuj wielomian do postaci kanonicznej i określ jego potęgę:

1) $x^2y + xyy$; 2) $2a \cdot a^2 \cdot 3b + a \cdot 5c$;

3) $7x \cdot 5y^2 - 4y \cdot 7x^2$; 4) $3a \cdot 4a \cdot (-5a) - a^3 \cdot (-8b)$.

440. Podaj wielomian w postaci kanonicznej i określ jego potęgę:

1) $3x \cdot x^2 + 2x \cdot 5y^2$; 2) $5a \cdot b^2a + 3b \cdot 2ab^2$;

3) $-5mn^3m + 4mmm$; 4) $5p \cdot 3p \cdot (-p) - p^4qp$.

441. Przepisz wielomian według malejących potęg niewiadomej:

1) $7x - 5x^3 + x^4 - 9x^2 + 1$; 2) $8y^3 - 5 + 7y^6 - 9y^4 + y^2$.

442. Przepisz wielomian według rosnących potęg niewiadomej:

1) $3m^2 - 3m + m^3 - 8$; 2) $7a^2 - 9a^5 + 4a^3 + 5 - a^4$.

443. Znajdź wartość: 1) dwumianu $3x^2 - 1$, jeżeli $x = -1$; 2;

2) trójmianu $5m + 9n^2 - 1$, jeżeli $m = -2$, $n = \frac{1}{3}$.

444. Oblicz wartość wielomianu:

1) $64x^3 - x^2 + 1$, jeżeli $x = \frac{1}{4}$;

2) $4mn - 3m + 2n - 4mn$, jeżeli $m = 4$, $n = -3$.

445. Oblicz wartość wielomianu:

1) $9p^2 - p^3$, jeżeli $p = \frac{1}{3}$;

2) $2xy - 4x + 3y + 4x$, jeżeli $x = -1$, $y = 2$.

3 **446.** Czy istnieje taka wartość x, dla której wartość wielomianu $x^2 + 5$ jest równa zero; jest ujemną?

447. Zredukuj wielomian do postaci kanonicznej i podaj jego potęgę:

1) $3a^2ab - 5a^2b^2b^2 - 6ab \cdot 2a + 5ab \cdot 0{,}4ab - 1{,}5a \cdot 2b \cdot a^2$;

2) $3xy^2 \cdot 4x^3y + 5x^3y \cdot 2y \cdot (-x) - 10x^3y^3 \cdot \frac{1}{2}x - 7xy \cdot (-3xy^3)$.

448. Zredukuj wielomian do postaci kanonicznej i podaj jego potęgę:

1) $3a^2b^3 - ab^3 - a^3a - a^2b^2 \cdot b + 0{,}5ab \cdot 2b^2 + 4ab \cdot 0{,}5ab^2$;

2) $7x \cdot 2y^3 - 5x \cdot 3xy \cdot (-x) + \frac{1}{2}y \cdot (-14xy) - 3yx \cdot 4y^2$.

449. Zredukuj wielomian

$$5xy^3 + x^2y^2 + 748{,}75 - 2x^3y - 3xy^3 - x^2y^2$$

do postaci kanonicznej i znajdź jego wartość, jeżeli $x = \frac{1}{2}$; $y = -1$. Zatem dowiesz się w kilometrach odległość od Kijowa do stolicy Litwy – miasta Wilno.

450. Udowodnij, że wielomian $a^2 + b^2 + 1$ dla dowolnych wartości niewiadomych a i b przybiera tylko wartości dodatnie.

451. Zamiast „gwiazdki" napisz taki jednomian, żeby utworzyć wielomian do potęgi 4:

1) $x^3 + 3x^2 + * - 2$; 2) $m^6 - 4m^4 + mn + *$;
3) $a^3b - 3a^4b^3 + 3a^2 + *$; 4) $pq^3 - p^2q^2 + p^2q^3 + * - p^3q$.

452. Zamiast „gwiazdki" napisz taki jednomian, żeby po zredukowaniu wielomianu do postaci kanonicznej otrzymać wielomian, który nie zawiera niewiadomej x:

1) $3x - 12 + 5x + 15 - 9x + *$;
2) $5xy^2 - y^3 + 7y^2 + 7y^2x - 5 + *$.

4 **453.** Podano wielomian $5x^3 + 2x^2 - x + 7$. Utwórz z niego nowy wielomian, zamieniając niewiadomą x na jednomian:

1) m; 2) $-x$;
3) $2a$; 4) $3b^2$.

Otrzymane wielomiany zredukuj do postaci kanonicznej.

454. Podano wielomian $3a^3 - 5a^2 + a - 8$. Utwórz z niego nowy wielomian, zamieniając niewiadomą x na dany wielomian i zredukuj go do postaci kanonicznej:

1) x; 2) $-a$;
3) $2b$; 4) $3c^2$.

455. Wybierz te wielomiany, wartości których są dodatnie dla dowolnej wartości niewiadomych; są ujemne dla dowolnych wartości niewiadomych:

1) $a^4 + 3a^2 + 5$; 2) $c^5 + c^3 + c$;
3) $-p^2 - 7$; 4) $-m^2 - m^2n^2 - n^2 - 9$;
5) $-a - b - 7$; 6) $x^8 + y^6 + c^4 + 1$.

Ćwiczenia powtórzeniowe

456. Otwórz nawiasy i uprość wyrażenie:

1) $x + 5 + (2x - 7)$;
2) $2y - 7 - (3y - 8)$;
3) $7 - (2x + 9) + (3x - 11)$.

457. Ułóż wyrażenie liczbowe i znajdź jego wartość:
1) suma kwadratów liczb 3,1 i –2,7;
2) kwadrat różnicy liczb –3,8 i –3,7;
3) sześcian sumy liczb 1,52 i –1,5.

458. Zamień luki na potęgą z podstawą x, aby otrzymać tożsamość:
1) $x^3 \cdot (\ \ldots\ )^2 = x^{13}$;   2) $(\ \ldots\ )^3 \cdot x^7 = x^{19}$.

Matematyka życia

459. 1) W związku ze zwiększeniem ilości zamówień linia produkcyjna małego przedsiębiorstwa pakującego produkty w listopadzie zużyła o 20 % więcej prądu niż w październiku. Ile kWh zużyła linia produkcyjna w listopadzie, jeżeli zużycie prądu w październiku wyniosło 1250 kWh?
2) *Działania praktyczne.* Dowiedz się, ile kosztuje 1 kWh energii elektrycznej dla przedsiębiorstw i określ kwotę, którą zapłaciło przedsiębiorstwo za zużyty dla pakowania produkcji prąd w październiku, a ile w listopadzie.

Przygotuj się do opanowania nowego materiału

460. Otwórz nawiasy i uprość wyrażenie:
1) $d - (d - 1)$;   2) $-(a + 10) + a$;
3) $p + (-p + a)$;   4) $(t + 4) - (t - 5)$;
5) $-(10 - x) + (-x + 7)$;   6) $-(b - 5 + a) - (2 - b)$.

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

461. Znajdź wszystkie naturalne wartości n, dla których sprawdza się nierówność $\frac{7}{12} < \frac{n}{63} < \frac{11}{18}$.

§ 11. Dodawanie i odejmowanie wielomianów

Dodawanie wielomianów

Dodamy wielomian $7x^2 - 4x + 9$ i $-3x^2 + 5x - 7$. W tym celu zapiszemy ich sumę, zatem otworzymy nawiasy i zredukujemy wyrazy podobne:

$$(7x^2 - 4x + 9) + (-3x^2 + 5x - 7) =$$
$$= 7x^2 - 4x + 9 - 3x^2 + 5x - 7 = 4x^2 + x + 2.$$

Zapisaliśmy sumę wielomianów $7x^2 - 4x + 9$ i $-3x^2 + 5x - 7$ w postaci wielomianu $4x^2 + x + 2$. Tak samo można dodawać trzy i więcej wielomianów. *Sumą dowolnych wielomianów jest wielomian lub jednomian*, który zwykle zapisujemy w postaci kanonicznej.

Odejmowanie wielomianów

Teraz od jednomianu $5x^2 - 8x + 7$ odejmiemy wielomian $2x^2 - 6x - 5$. W tym celu zapiszemy różnicę tych wielomianów, zatem otworzymy nawiasy i zredukujemy wyrazy podobne:

$$(5x^2 - 8x + 7) - (2x^2 - 6x - 5) =$$
$$= 5x^2 - 8x + 7 - 2x^2 + 6x + 5 = 3x^2 - 2x + 12.$$

Różnicę wielomianów $5x^2 - 8x + 7$ i $2x^2 - 6x - 5$ my przedstawiliśmy w postaci wielomianu $3x^2 - 2x + 12$. *Różnicą dowolnych wielomianów jest wielomian lub jednomian*, który zwykle zapisujemy w postaci kanonicznej.

Zastosowanie dodawania i odejmowania wielomianów przy rozwiązywaniu ćwiczeń

Rozpatrzmy przykłady zastosowania dodawania i odejmowania wielomianów przy rozwiązywaniu ćwiczeń.

Przykład 1. Rozwiąż równanie:

$$(7x - 5) - (2x^2 + 3x - 7) + (9 - 2x) = 4 - 2x^2.$$

Rozwiązanie. Otwieramy nawiasy po lewej stronie równania:

$$7x - 5 - 2x^2 - 3x + 7 + 9 - 2x = 4 - 2x^2.$$

Przeniesiemy wyrazy zawierające niewiadomą na lewą stronę równania, a te, które nie zawierają niewiadomej na prawą. Otrzymamy:

$\underline{7x} - \underline{\underline{2x^2}} - \underline{3x} - \underline{2x} + \underline{\underline{2x^2}} = 4 + 5 - 7 - 9;$

$2x = -7;$

$x = -3,5.$

Odpowiedź: $-3,5$.

Przykład 2. Udowodnij, że wartość wyrażenia

$$(7x^2 - 4x + 5) - (x^2 - 3) + (4 - 2x^2 + 4x)$$

jest liczbą dodatnią dla dowolnej wartości niewiadomej.

Udowodnienie. Mamy: $(7x^2 - 4x + 5) - (x^2 - 3) + (4 - 2x^2 + 4x) = 7x^2 - 4x + 5 - x^2 + 3 + 4 - 2x^2 + 4x = 4x^2 + 12$.

Wartość wyrażenia x^2 jest liczbą nieujemną dla dowolnej wartości x. Dlatego wartość wyrażenia $4x^2$ również jest liczbą nieujemną dla dowolnej wartości x. Toteż wartość wyrażenia $4x^2 + 12$ jest dodatnią dla dowolnej wartości niewiadomej x. Twierdzenie w zadaniu udowodniono.

Zapisanie wielomianu w postaci sumy lub różnicy wielomianów

Czasem istnieje potrzeba rozwiązania zadania odwrotnego – zapisania wielomianu w postaci sumy lub różnicy wielomianów. W takim przypadku warto zastosować zasadę umieszczenia wyrazu w awiasie, przed którym stoi znak „plus” lub „minus”, które uczyliście w poprzednich klasach.

Przykład 3. Zapisać wielomian $a^2 - b^3 - a + b^7 + 5$ w postaci:
1) sumy dwóch wielomianów, jeden z których zawiera niewiadomą a, a inny jej nie zawiera;
2) różnicy dwóch wielomianów, pierwszy z których zawiera niewiadomą b, a drugi jej nie zawiera.

Rozwiązanie.
1) $a^2 - b^3 - a + b^7 + 5 = (a^2 - a) + (-b^3 + b^7 + 5)$;
2) $a^2 - b^3 - a + b^7 + 5 = (-b^3 + b^7) - (-a^2 + a - 5)$.

Odpowiedź: 1) $(a^2 - a) + (-b^3 + b^7 + 5)$;
2) $(-b^3 + b^7) - (-a^2 + a - 5)$.

? Jak znaleźć sumę wielomianów? ○ Jak znaleźć różnicę wielomianów? ○ Jakie zasady pomogą zapisać wielomian w postaci sumy lub różnicy wielomianów?

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

1 **462.** (*Ustnie.*) Przeczytaj wielomian, który otrzymamy po otwarciu nawiasów:
1) $a + (b - 5)$; 2) $y + (3 - m + t)$;
3) $x - (p - 1)$; 4) $c - (-b^2 + 1)$.

2 **463.** Znajdź sumę wielomianów:
1) $2x^2 + 3x^3 - 1$ i $5x^3 + 3x^2 + 7$;
2) $a^3 + 3a^2 + 1$, $2a^2 - 5$ i $6 - 5a^2$.

464. Znajdź sumę wielomianów:
1) $3m^3 + 5m^2 - 7$ i $2m^3 + 6$;
2) $b^2 + 3b - 1$, $2b - 3b^2$ i $2b^2 + 7$.

465. Znajdź różnicę wielomianów:
1) $4p^3 + 7p^2 - p$ i $2p^2 + p$;
2) $m^2 + 2m - 1$ i $m^3 + 2m - 1$.

466. Znajdź różnicę wielomianów:
1) $2a^3 - 3a^2 + 7$ i $a^3 - 5a^2 - 8$;
2) $c^4 + c^3 - 2$ i $c^3 + 2c^2 - 2$.

467. Znajdź sumę i różnicę wyrazów:
1) $x + y$ i $x - y$; 2) $x - y$ i $-x + y$;
3) $-x - y$ i $y - x$; 4) $x - y$ i $y - x$.

468. Znajdź sumę i różnicę wyrazów:
1) $2a - b$ i $2a + b$; 2) $2a - b$ i $-2a + b$;
3) $-2a - b$ i $2a + b$; 4) $2a - b$ i $b - 2a$.

469. Znajdź sumę i różnicę wielomianów i zredukuj je do wielomianów w postaci kanonicznej:
1) $3x^2 - 2x + 1$ i $3x^2 - 4$; 2) $2x + 1$ i $-3x^2 - 2x - 1$;
3) $a + 5b$ i $3a - 5b$; 4) $m^2 - 2mn - n^2$ i $m^2 + n^2$.

470. Zapisz sumę i różnicę pierwszego i drugiego wielomianów i zredukuj je do wielomianów w postaci kanonicznej:
1) $5y^2 + 2y - 10$ i $3y^2 - y + 7$;
2) $5m^3 - m + 3$ i $4m^2 + m - 4$;
3) $5p^2 - 2pq - 7q^2$ i $3p^2 + 2pq + 5q^2$.

471. Uprość wyrażenia:
1) $(1 + 2p) + (p^2 - p)$; 2) $(5a^2 + a^3) - (-a + 5a^2)$;
3) $(x^2 - 5x) + (5x - 13)$; 4) $(3b^3 - 5b^2) - (5 + 3b^3 - 2b^2)$.

472. Przekształć na wielomian w postaci kanonicznej:
1) $(5ab^2 - 12ab - 7a^2b) - (15ab + 8a^2b)$;
2) $\left(\frac{3}{5}a^3b^2 - \frac{3}{4}ab^2\right) - \left(-\frac{5}{8}b^2a - \frac{7}{10}b^2a^3\right)$;
3) $(x + y - z) - (-2x + 3y - z) - (-5y + 4z + x)$;
4) $(2m - 3n) - (4m - 3mn + 3n^2) - (5mn - 5n^2 - 3n)$.

473. Uprość wyrażenia:
1) $(15x^2 - 3xy) - (12x^2 - 5xy + y^2)$;
2) $(5a^2b - 12ab + 14ab^2) - (-5ab + 14ab^2 - 7a^2b)$;
3) $(m + n - 2p) - (-2m + p - 3n) - (4n + 3m - 4p)$.

474. Rozwiąż równanie:
1) $5x + 2x^2 - (2x^2 - 10) = 25$; 2) $5 - x^3 - (2x + 7 - x^3) = -8$.

475. Rozwiąż równanie:
1) $5x^2 + 7x - (2x + 5x^2 - 8) = 8$;
2) $2 - 3x^3 - (5x - 3x^3) = -13$.

476. Podaj wielomian w postaci sumy dwóch wielomianów, jeden z których zawiera niewiadomą x, a inny jej nie zawiera:
1) $xa + b - m - xb$; 2) $xa^2 - 17a + 5x + 10b$.

477. Zapisz wielomian $5x^2 - 9x^3 + 7x - x^4 - 1$ w postaci dwumianu i trójmianu. Znajdź dwa rozwiązania w zadaniu.

3 **478.** Dla jakiej wartości x:
1) wartość różnicy jednomianu $5x$ wielomianu $3x - 5x^2 + 12$ równa się wartości wielomianu $7x + 5x^2 - 18$;
2) wartość różnicy wielomianów $5x^3 + 3x^2 - x$ i $2x^3 - 2x^2 + x$ równa się wartości wielomianu $5x^2 + 3x^3 + 14$?

479. Dla jakiej wartości niewiadomej y:
1) suma wielomianów $2y^3 - 3y + y^2$ i $5y - 2y^3 - y^2 + 7$ równa się 19
2) różnica dwumianu $5y^2 - 7y$ i trójmianu $2y^2 - 8y + 9$ równa się dwumianu $3y^2 - 3y$?

480. Podaj wielomian w postaci różnicy dwóch wielomianów, pierwszy z których zawiera niewiadomą y, a drugi jej nie zawiera:
1) $-ya + yx + x - y - a + 1$;
2) $-p^2 + y^2 + 2p - 7y - 1$.

481. Jaki wielomian w postaci kanonicznej należy napisać zamiast luk, żeby otrzymać tożsamość:
1) $-(\dots) = 4p - q$;
2) $-(\dots) = 4m^2 - p^2 + 5$;
3) $(\dots) + 2m^2n - 5mn^2 = 7m^2 - 3mn^2$;
4) $7a^2b + 9a^3 + (\dots) = 8a^2b$;
5) $3 + 2a^2 - 5a + (\dots) = 9a^2 - 12$;
6) $(\dots) - (4x^2 - 2xy) = 5 + 5x^2 - 2xy$?

482. Znajdź wielomian w postaci kanonicznej, zastępując którym zamiast M otrzymamy tożsamość:
1) $-M = 5a - b^2 + 7$;
2) $M + (3a^2 - 2ab) = 5a^2 + 3ab - b^2$;
3) $M - (3mn - 4n^2) = m^2 - 4mn + n^2$;
4) $(7a^2 - b^2 - 9ba) - M = 0$.

483. Rowerzystka była w drodze 4 h. W ciągu pierwszej godziny ona pokonała x km, a w każdej następnej o 3 km więcej niż w poprzedniej. Jaką odległość pokonała rowerzystka?
1) w drugiej godzinie;
2) na trzecią godzinę;
3) w ciągu pierwszych trzech godzin;
4) przez cały czas ruchu?

484. Ekipa robotników wykopała studnię w 5 dni. W ciągu pierwszego dnia oni wykopali a metrów, a w każdym następnym o 2 metry mniej niż w poprzednim. Ile metrów studni wykopała ekipa?
1) w drugim dniu;
2) w trzecim dniu;
3) w ciągu pierwszych dwóch dni;
4) w ciągu ostatnich trzech dni?

485. Udowodnij tożsamość:

1) $(x - y) + (y - p) - (x - p) = 0$;

2) $(a^2 + b^2 - c^2) - (b^2 - a^2 - c^2) - (a^2 - b^2) = a^2 + b^2$.

486. Udowodnij tożsamość:

$$(a^3 + a^2 - a) + (2a^2 - 5a + 3a^3) - (4a^3 - 6a + 2a^2) = a^2.$$

487. Udowodnij, że dla dowolnych wartości naturalnych n wartość wyrażenia $(15 - 7n) - (7 - 11n)$ jest wielokrotnością liczby 4.

488. Udowodnij, że dla dowolnych wartości naturalnych m wartość wyrażenia $(m^2 - 4m + 1) - (m^2 - 9m - 14)$ jest podzielna przez 5.

489. Udowodnij, że wartość wyrażenia:

$$\left(\frac{1}{8}a^2b + \frac{3}{5}ab\right) - \left(\frac{7}{10}ab - \frac{3}{4}ba^2\right) - \left(\frac{7}{8}a^2b - \frac{1}{10}ab - 2\right)$$

nie zależy od wartości niewiadomych.

490. Udowodnij, że wartość wyrażenia

$$(7x^5 - 4x^4 + x^3 - 8) - (3x^5 - 4x^4 + 4x^3) - (4x^5 - 3x^3 + 7)$$

nie zależy od wartości niewiadomej.

491. Znajdź wartość wyrażenia:

1) $(b^2 + 3b - 8) - (7b^2 - 5b + 7) + (5b^2 - 8b + 10)$, jeżeli $b = -2$;

2) $17x^2 - (3x^2 - 2xy + 3y^2) - (14x^2 + 3xy - 4y^2)$,
jeżeli $x = -0{,}1$, $y = 10$.

492. Znajdź wartość wyrażenia:

1) $(m^2 - 2m - 8) - (0{,}1m^2 - 5m + 9) + (4m - 0{,}9m^2 + 5)$,
jeżeli $m = \frac{1}{7}$;

2) $7a^2 - (3ab - 2a^2) + (4ab - 9a^2)$, jeżeli $a = -\frac{1}{8}$, $b = -32$.

493. Podaj wielomian $3m^2n - 5mn + 4n^2 - 9n - 7$ jako różnicę dwóch wielomianów tak, aby wszystkie wyrazy obu wielomianów mają współczynniki dodatnie.

4 **494.** Niech $a = 7m^2 + 5mn - n^2$, $b = -6m^2 + 2mn + 3n^2$, $c = m^2 - 2n^2$. Zastąp te wielomiany zamiast a, b, c w wyrażeniu i uprość je:

1) $a + b + c$; 2) $a - b - c$.

495. Udowodnij, że dla dowolnej wartości x różnica wielomianów $0{,}5x^4 + x^3 - 0{,}2x^2 - 5$ i $0{,}3x^4 + x^3 - 0{,}7x^2 - 9$ przybiera dodatniej wartości. Jakiej najmniejszej wartości przybiera ta różnica i dla jakiej wartości x?

496. Udowodnij, że suma:
1) trzej kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3;
2) czterech kolejnych liczb naturalnych przy dzieleniu na 4 daje resztę 2

497. Zapis xy oznacza liczbę naturalną, w której x jest dziesiątkami i y jednostkami. Udowodnij, że:
1) suma liczb $\overline{xy}$ i $\overline{yx}$ jest wielokrotnością liczby 11;
2) różnica liczb $\overline{xy}$ i $\overline{yx}$, gdzie $x > y$, jest wielokrotnością liczby 9.

498. Zapis xyz oznacza liczbę naturalną, w której x jest setkami, y dziesiątkami i z jednostkami. Podaj w postaci wielomianu:
1) $\overline{xyz}$; 2) $\overline{zyx}$; 3) $\overline{xyz} + \overline{zy}$; 4) $\overline{yxz} - \overline{yx}$.

Ćwiczenia powtórzeniowe

499. Oblicz wartość wyrażenia $(0{,}018 + 0{,}982) : (4 \cdot 0{,}5 - 0{,}2)$.

500. Uprość wyrażenie i znajdź jego wartość:

1) $-8x \cdot 1{,}5y$, jeżeli $x = \frac{4}{7}$, $y = -1\frac{3}{4}$;

2) $-2a \cdot (-3{,}5b) \cdot 5c$, jeżeli $a = -1$, $b = -\frac{2}{5}$, $c = \frac{3}{7}$.

501. Podaj wyrażenie 2^{60} w postaci potęgi z podstawą
1) 4; 2) 8; 3) 16; 4) 32.

Matematyka życia

502. 1) Dla 13-letniego nastolatka zapotrzebowanie na produkty mleczne (mleko, kefir, zsiadłe mleko (rjażanka)) wynosi 15 % od normy płynów dziennie. Ile płynnych produktów mlecznych powinien spożywać codziennie nastolatek w wyżej wspomnianym wieku, jeżeli zapotrzebowanie jego organizmu w płynach stanowi 2 litry dziennie?
2) *Działania praktyczne. Przeanalizuj swoje odżywianie się. Czy stosujesz się wskazanych zaleceń?*

Przygotuj się do opanowania nowego materiału

503. Otwórz nawiasy:

1) $-0{,}6d(-5b + 4p - 0{,}3x)$; 2) $10(0{,}9x - 2{,}3y + 0{,}1z)$;

3) $(-0{,}3a + 5b - 2c) \cdot (-20)$; 4) $\left(-\frac{1}{6}n + \frac{1}{2}m - 1\frac{1}{3}x\right) \cdot 12$.

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

504. Znajdź cyfry a i b, jeżeli liczba $9a6b2$ jest wielokrotnością liczby 36.
Wskaż wszystkie możliwe rozwiązania.

§ 12. Mnożenie jednomianu przez wielomian

Zasada mnożenia jednomianu przez wielomian

Pomnożymy jednomian 5x przez wielomian $3x - 7$, wykorzystując prawo rozdzielności mnożenia

$$5x(3x - 7) = 5x \cdot 3x - 5x \cdot 7 = 15x^2 - 35x.$$

Zatem iloczyn jednomianu $5x$ i wielomianu $3x - 7$ jest wielomian $15x^2 - 35x$, który otrzymano mnożąc jednomian przez każdy składnik wielomianu i dodanie znalezionych wyników. Mamy *zasadę mnożenia jednomianu przez wielomian*:

żeby pomnożyć jednomian przez wielomian, należy pomnożyć dany jednomian przez każdy składnik wielomianu i dodać otrzymane iloczyny.

Iloczyn dowolnego jednomianu przez dowolny wielomian zawsze można przedstawić w postaci wielomianu.

Zastosowanie zasady mnożenia jednomianu przez wielomian dla rozwiązywania ćwiczeń

Rozpatrzymy zastosowanie zasady mnożenia jednomianu przez wielomian przy rozwiązywaniu ćwiczeń.

Przykład 1. Wykonać mnożenie $-3ab(5a^2 - 2ab + b^2)$.

Rozwiązanie. $-3ab(5a^2 - 2ab + b^2) = -3ab \cdot 5a^2 - 3ab \cdot (-2ab) - 3ab \cdot b^2 = -15a^3b + 6a^2b^2 - 3ab^3$.

To mnożenie można zapisać krócej, pomijając wyniki pośrednie: $-3ab(5a^2 - 2ab + b^2) = -15a^3b + 6a^2b^2 - 3ab^3$.

Odpowiedź: $-15a^3b + 6a^2b^2 - 3ab^3$.

Przykład 2. Uprość wyrażenie $5m(m^2 - 2) - 2(m^3 - 5m)$.

Rozwiązanie.

$5m(m^2 - 2) - 2(m^3 - 5m) = \underline{5m^3} - \underline{\underline{10m}} - \underline{2m^3} + \underline{\underline{10m}} = 3m^3$.

Odpowiedź: $3m^3$.

Przykład 3. Uprość wyrażenie $4ab(2a^2b - a) - 8a(a^2b^2 - ab)$ i znajdź jego wartość, jeżeli $a = -\frac{1}{8}$; $b = -4$.

Rozwiązanie. Najpierw uprościmy podane wyrażenie.

$4ab(2a^2b - a) - 8a(a^2b^2 - ab) = \underline{8a^3b^2} - \underline{\underline{4a^2b}} - \underline{8a^3b^2} + \underline{\underline{8a^2b}} = 4a^2b.$

Jeżeli $a = -\frac{1}{8}$; $b = -4$, wtedy

$$4a^2b = 4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)^2 \cdot (-4) = -16 \cdot \frac{1}{64} = -\frac{1}{4} = -0{,}25.$$

Odpowiedź: $4a^2b$; $-0{,}25$.

Przykład 4. Rozwiązać równanie $\frac{2x-1}{3} - \frac{3x+2}{4} = \frac{x-14}{12}$.

Rozwiązanie. Pomnożymy obie strony równania na przez najmniejszy wspólny mianownik ułamków, czyli przez 12:

$$12\left(\frac{2x-1}{3} - \frac{3x+2}{4}\right) = 12 \cdot \frac{x-14}{12}.$$

Otrzymujemy: $\frac{12 \cdot (2x-1)}{3} - \frac{12 \cdot (3x+2)}{4} = \frac{12 \cdot (x-14)}{12}$;

$$4(2x - 1) - 3(3x + 2) = x - 14;$$
$$8x - 4 - 9x - 6 = x - 14;$$
$$8x - 9x - x = -14 + 4 + 6;$$
$$-2x = -4;$$
$$x = 2.$$

Odpowiedź: 2.

Sformułuj zasadę mnożenia jednomianu przez wielomian.

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

1

505. (*Ustnie.*) Wykonaj mnożenie:

1) $x(a - 3)$;
2) $-p(x + y)$;
3) $m(a - b + 2)$;
4) $-y(x - 3 + p)$.

506. Wykonaj mnożenie:

1) $a(b - 2)$;
2) $m(a + c)$;
3) $p(a - b - 3)$;
4) $-b(a - c + 3)$.

2

507. Wykonaj mnożenie jednomianu przez wielomian:

1) $7a^2(3 - a)$;
2) $-5x^2(x^3 + 4x)$;
3) $-3c^3(c - 2c^2)$;
4) $2a^4(a^5 - a^3 - 1)$;
5) $(3x^2 - 5x - 3) \cdot 2x$;
6) $(c^3 + c - 4) \cdot (-3c)$.

508. Przekształć iloczyn na wielomian:
1) $4xy(x^2 - 2xy - y^2)$; 2) $-a^2b(ab^2 - b^2 + a^2)$;
3) $(2mn - 3m^2 - 5n^2) \cdot (-4m^2)$; 4) $(-2x^2y + 3xy - x^2) \cdot xy^2$;
5) $(2{,}8a^2b - 3{,}7a^3b - 0{,}8b) \cdot 10ab^2$;
6) $-1{,}8a^2b^6(5a^2b - 1{,}5a - 2b^3)$.

509. Podaj iloczyn w postaci wielomianu:
1) $4a(a^2 - 2a + 3)$; 2) $-3b^2(4b^3 - 2b^2 + 3b - 8)$;
3) $(3x^2 - 4x + 12) \cdot (-0{,}1x^3)$; 4) $(p^2 - 9p^3 + 7p - 1) \cdot 3p^4$;
5) $7ab(2a^2b - 3ab^2 - 3a^3)$; 6) $-6m^2n(m^2n - 3mn^2 - 4n^3)$;
7) $(9a^2b - 8ab^3 - a^2b^2) \cdot (-3a^2b^3)$;
8) $(p^2q^3 - 2pq^4 + 3p^3) \cdot 5p^3q^2$.

510. Wykonaj mnożenie:
1) $\frac{1}{7}a^2b(1{,}4a^2 - 2{,}1b^3)$; 2) $-\frac{2}{3}x^2y^3\left(1{,}2y^5 - \frac{9}{10}xy\right)$;
3) $\left(1\frac{1}{5}mn^2 - 1\frac{1}{15}m^2\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}m^2n\right)$; 4) $\left(1\frac{1}{4}m - \frac{5}{6}n\right) \cdot 2\frac{2}{5}m^2n^7$.

511. Wykonaj mnożenie:
1) $\frac{1}{4}m^2n(2{,}4mn - 2{,}8m^2)$; 2) $-\frac{2}{5}ab^3\left(1{,}5ab - \frac{5}{6}b^2\right)$;
3) $\left(1\frac{1}{2}x^2y - \frac{9}{10}xy^4\right) \cdot \frac{2}{3}xy^3$; 4) $\left(1{,}5a - \frac{4}{7}b\right) \cdot \left(-\frac{1}{14}a^2b^5\right)$.

512. Podaj w postaci wielomianu:
1) $5(x - 3) - 2(x - 3)$; 2) $5(7a - 1) - 7(5a + 3)$;
3) $2b(b - 3) - 5b(b + 7)$; 4) $7y^2(3y - 2) + 4y^2(y + 5)$.

513. Uprość wyrażenie:
1) $5(3 - 2a) + 7(3a - 1)$; 2) $3(2x - 8) - 3(2x - 5)$;
3) $3m(m - 2) - 5m(7 - m)$; 4) $2a^2(3a - 5) + 4a^2(a + 3)$.

514. Przekształć wyrażenie na wielomian:
1) $5m(m - n) + 3n(n - m)$; 2) $2a(2b - 3a) - 3a(5b - 7a)$;
3) $a(3a^2 - 2b) - b(5a^2 - 2a)$;
4) $0{,}2mn(m^2 - n^2 + 3) - 0{,}5m(nm^2 - n^3)$.

515. Wykonaj działania:
1) $3a(a - b) + 5b(a + b)$; 2) $3y(x - y) + y(2y - 3x)$;
3) $p(p^2 - 2a) - a(a^2 - 2p)$; 4) $3xy(x^2 - y^2 + 7) - 5xy(y^2 + x^2)$.

516. Rozwiąż równania:
1) $6 + 2(5x + 4) = 24$; 2) $3(5x - 1) = 4(4x - 8)$;
3) $7 - 4(y - 1) = (3y - 2) \cdot (-2)$;

4) $3(y-2)-5(y+7)=-7(y-1)$.

517. Rozwiąż równania:

1) $5(2x-1)=3(4x+5)$; 2) $9-5(y+2)=(7y-5)\cdot(-3)$.

518. Znajdź pierwiastek równania:

1) $x(x-3)-9=12+x^2$; 2) $3x-2x^2=2x(5-x)+14$.

519. Znajdź pierwiastek równania:

1) $7-x(x-2)=5-x^2$;

2) $3x(x-5)=3x^2-5x+20$.

520. Zapisz zamiast „gwiazdki" taki jednomian, żeby spełniała się równość:

1) $(a+b)\cdot * = am+bm$;

2) $* \cdot (x-y)=-nx+ny$;

3) $* \cdot (a-b+c)=ax^2-bx^2+cx^2$;

4) $* \cdot (c-n+p)=-abc+abn-abp$;

5) $* \cdot (x^2-xy)=x^2y^2-xy^3$;

6) $(p-1)\cdot * = p^2q^2-pq^2$.

3 **521.** Udowodnij, że dla dowolnej wartości a wyrażenie

$$a(3a+1)-a^2(a+2)+(a^3-a^2)-(a+1)$$

przybiera taką samą wartość.

522. Udowodnij, że wartość wyrażenia

$$x(5x^2-x+2)-(5x-2+4x^3)-x(x^2-x-3)$$

nie zależy od wartości niewiadomej

523. Udowodnij, że wyrażenie jest tożsamością zera:

1) $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)$;

2) $a(b+c-bc)-b(c+a-ac)+c(b-a)$.

524. Przekształć na wielomian w postaci kanonicznej:

1) $-7a^5b(2b^4+ab^5-3a^2b^6+a^3b^7)$;

2) $(3x^3+5x^2-2a-3a^2)xay$;

3) $-4pm^3(m^4-2p^3m+7p^6m^7+11p^7m^3)$;

4) $\left(-\frac{1}{2}a^2b^9+\frac{1}{6}ab^7-\frac{1}{3}a^3b^6\right)(-12a^3b^7)$.

525. Udowodnić, że dla dowolnej wartości zmiennej a wyrażenie $2a^2(a-5)-a(-6a+2a^2+3a^3)-4$ przyjmuje wartości ujemne.

526. Udowodnić, że dla dowolnej wartości zmiennej m wyrażenie $5(m^2-3m+1)-3m(m-5)$ przyjmuje tylko wartości dodatnie.

527. Przekształcić wielomian do postaci standardowej:

1) $3a(5a^2-3ab+ab^3-b^2)\cdot b$;

2) $-xy\cdot(x^2y-2x^2y^2+3xy^3+x^3)\cdot x^2$.

528. Uprość wyrażenie i znajdź jego wartość. Znajdź sumę wszystkich otrzymanych wartości i dowiedz się, ile razy przedstawiciele Ukrainy zwyciężyli w Konkursie Piosenki Eurowizji.

1) $4a - 2(5a - 1) + (8a - 2)$, jeżeli $a = -3{,}5$;

2) $10(2 - 3x) + 12x - 9(x + 1)$, jeżeli $x = -\dfrac{1}{27}$;

3) $a(3a - 4b) - b(3b - 4a)$, jeżeli $a = -5$, $b = 5$;

4) $3xy(5x^2 - y^2) - 5xy(3x^2 - y^2)$, jeżeli $x = \dfrac{1}{8}$, $y = -2$.

529. Uprość wyrażenie i znajdź jego wartość:

1) $7a(2a - 0{,}1) - 0{,}1a(10a - 7)$, jeżeli $a = \dfrac{1}{13}$;

2) $4x(2x - 5y) - 2y(4y - 10x)$, jeżeli $x = -15$, $y = 15$.

530. Rozwiąż równania::

1) $\dfrac{5x-9}{4} + \dfrac{5x-7}{4} = 1$;
2) $\dfrac{3x-1}{14} - \dfrac{x}{7} = -2$;

3) $\dfrac{x-6}{3} + \dfrac{2x+3}{3} = 2x$;
4) $\dfrac{2-x}{5} - \dfrac{x}{15} = \dfrac{1}{3}$;

5) $2x(1 - 3x) + 5x(3 - x) = 17x - 11x^2$;

6) $(7x^3 + 2x^2 - 4x - 5) - (6x^3 - x^2 + 2x) = 3x^2 - (6x - x^3)$.

531. Rozwiąż równania:

1) $\dfrac{7x-3}{6} - \dfrac{5x+1}{2} = 0$;
2) $\dfrac{x-3}{5} - \dfrac{x}{4} = 1$;

3) $\dfrac{4x+1}{6} + \dfrac{10x+1}{6} = x$;
4) $\dfrac{x+2}{15} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{x}{5}$;

5) $3x(2 + x) - 4(1 - x^2) = 7x^2 + 6x$;

6) $(x^2 + 4x - 8) - (7x - 2x^2 - 5) = 3x^2 - (3x + 3)$.

532. Dla jakiej wartości niewiadomej:

1) wartość wyrażenia $2(3y + 1)$ jest 4 razy większa niż wartość wyrażenia $3y - 2$;

2) iloraz wyrażeń $3x$ i $2x + 1$ równa się sumie wyrażeń $x(4x - 1)$ i $2(x^2 - 3)$?

533. Do zrobienia jednego ciasteczka trzeba 4 g cukru więcej niż do zrobienia jednego pierożka, lub jednego pączka. W ciągu dnia w cukierni zrobiono 80 ciasteczek, 50 pączków i 50 pierożków. Jednocześnie na wszystkie ciastka wykorzystano 80 g cukru więcej niż na wszystkie pączki

534. Za 8 ołówków, 4 długopisy i notes zapłacili 265 UAH. Ołówek o 17 UAH 50 kop. tańszy niż długopis i o 32 UAH 50 kop. tańszy niż notes. Ile kosztuje oddzielnie ołówek, długopis i notes?

535. Jedna szpula nici bawełnianych kosztuje 5 UAH 40 kop., a lnianych 6 UAH 50 kop. Do tkania serwetek babcia kupiła o 6 szpuli nici bawełnianych więcej niż lnianych, wydając na swój zakup 175 UAH 20 kop. Ile kosztuje szpula nici bawełnianych i ile szpuli nici lnianych kupiła babcia?

536. Łódź płynęła 3,5 h z prądem rzeki i 2,5 h pod prąd. Odległość, którą przepłynęła łódź z prądem rzeki jest o 30 km większa niż odległość, którą pokonała pod prąd. Znajdź własną prędkość łodzi, jeżeli prędkość nurtu wynosi 2 km/h.

537. Jakimi wielomianami należy zamienić „gwiazdki”, żeby otrzymać tożsamość:

1) $5ax^2 \cdot (* + *) = 5ax^3 + 35ax^2$;
2) $(9a^2 + *) \cdot 3a = * + 18a^5$;
3) $(* - 4mc^2) \cdot * = 3m^3c^2 - 12m^2c^4$;
4) $(* - *) \cdot x^2y^3 = 5x^2y^3 - 7x^2y^4$?

538. Jakie wielomiany należy wpisać w komórki, żeby otrzymać tożsamość:

1) $3a^2(\square - \square) = 9a^5 - 12a^2$;
2) $(\square + \square) \cdot 5ab^2 = 5ab^2 + 10a^2b^3$;
3) $(\square - 2m^2a) \cdot 7m = 14m^2 - \square$;
4) $(7x^2a - 9xa^2) \cdot \square = 14x^3a^5 - \square$?

4 **539.** Uprość wyrażenie (n – liczba naturalna):

1) $x^{n+3}(x^{n+4} - x) - x^{2n+7}$;
2) $y^n(y^{n+2} - y^n - y^2) - y^2(y^{2n} - y^n)$;
3) $z^n(z^2 - 1) - z^2(z^n + 2) - 2(z^n - z^2)$.

Ćwiczenia powtórzeniowe

540. W jakich ćwiartkach współrzędnych znajdują się punkty

A(4; –8), B(–5; –7), C(1; 17), D(–9; 8)?

541. Uprość:

1) $(-3a^2b^3)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}ab^2\right)^3$;

2) $(0{,}1mn^7)^2 \cdot (-10m^2n^3)^3$.

542. Stosując cechy potęg, znajdź wartość wyrażenia:

1) $\frac{24^{17} \cdot 6^{16}}{48^{16} \cdot 3^{17}}$; 2) $\frac{35^9 \cdot 2^7}{5^7 \cdot 14^8}$.

Matematyka życia

543. W wielu krajach świata, zwłaszcza w Ukrainie, temperaturę mierzy się według skali Celsjusza. A w niektórych krajach, na przykład w USA, główną skalą pomiaru temperatury jest skala Farenheita. Żeby wskaźnik temperatury według Farenheita t_F przeliczyć w stopnie według Celsjusza t_C, wykorzystuje się wzór $t_C = 1{,}8t_F + 32$.

1) Zapisz wzór, za pomocą którego wskaźnik temperatury według Celsjusza t_C przeliczyć na wskaźnik temperatury w skali Farenheita t_F.

2) Wyobraź sobie, że twój termometr mierzy temperaturę ciała w skali Farenheita. Wypełnij tablicę, przeliczając wskaźnik temperatury w skali Farenheita na wskaźnik tempereatury według Celsjusza.

t_F	95	95,9	96,8	97,7	98,6	99,5	100,4	101,3	102,2
t_C									

Przygotuj się do przyswojenia nowego materiału

544. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias:

1) $7a - 7b$; 2) $-2y - 2x$; 3) $9n + 9m$; 4) $bx + by$;
5) $3m - mx$; 6) $7t + 7$; 7) $5ap + 5pb$; 8) $4ax - 4bx$.

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

545. Wiemy, że dla niektórych wartości a i b wartość wyrażenia $6a + b$ jest wielokrotnością liczby 7. Udowodnij, że dla tych samych wartości a i b wartość wyrażeni $6b + a$ a również jest wielokrotnością liczby 7.

§ 13. Rozkładanie wielomianu na czynniki poprzez wyłączenie wspólnego czynnika przed nawias

Rozkładanie wielomianu na czynniki

W 5 klasie rozkładaliśmy liczby złożone na czynniki proste, czyli przedstawialiśmy liczby naturalne w postaci iloczynu.
Na przykład, $12 = 2^2 \cdot 3$; $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ itp.

Podać w postaci iloczynu można również niektóre wielomiany. To znaczy, że te wielomiany można rozłożyć na czynniki.

Na przykład $5x - 5y = 5(x - y)$; $a^3 + 3a^2 = a^2(a + 3)$ itp.

Rozłożyć wielomian na czynniki znaczy zapisać jego w postaci iloczynu jednomianu przez wielomian lub iloczynu kilku wielomianów w taki sposób, żeby dany iloczyn był tożsamością z danym wielomianem.

Wyłączenie wspólnego czynnika przed nawias

Rozpatrzmy jeden ze sposobów wyłączenia wielomianu na czynniki jest – ***wyłączenie wspólnego czynnika przed nawias.*** Jednnym ze znanych nam przykładów takiego wyłączenia jest prawo rozdzielności mnożenia $a(b + c) = ab + ac$, jeśli jest napisane w odwrotnej kolejności: $ab + ac = a(b + c)$. Dany zapis oznacza, że wielomian $ab + ac$ rozłożyliśmy na dwa czynniki a i $b + c$.

Podczas rozkładania wielomianu z całkowitymi współczynnikami na czynniki wielomianu, które wyłączają przed nawias, wybierają w taki sposób, żeby wyrazy wielomianu, które zostają w nawiasach, nie miały wspólnego czynnika literowego, a moduły ich współczynników nie miały wspólnych dzielników.

Rozpatrzmy kilka przykładów.

Przykład 1. Rozłożyć wyrażenie na czynniki:
1) $8m + 4$; 2) $at + 7ap$; 3) $15a^3b - 10a^2b^2$.

Rozwiązanie. 1) Wspólnym czynnikiem jest liczba 4, dlateg

$$8m + 4 = \underline{4} \cdot 2m + \underline{4} \cdot 1 = 4(2m + 1).$$

2) Wspólnym czynnikiem jest niewiadoma a, dlatego $at + 7ap = a(t + 7p)$.

3) W danym przypadku wspólnym czynnikiem liczbowym jest największy wspólny dzielnik liczb 10 i 15 – liczba 5, a wspólnym czynnikiem literowym jest jednomian a^2b. Dlatego,

$$15a^3b - 10a^2b^2 = \underline{5a^2b} \cdot 3a - \underline{5a^2b} \cdot 2b = 5a^2b(3a - 2b).$$

Odpowiedź: 1) $4(2m + 1)$; 2) $a(t + 7p)$; 3) $5a^2b(3a - 2b)$.

Przykład 2. Rozłożyć na czynniki:

1) $2m(b-c)+3p(b-c)$; 2) $x(y-t)+c(t-y)$.

Rozwiązanie.

1) W danym przypadku wspólnym czynnikiem jest dwumia $b-c$. Dlatego, $2m\underline{(b-c)}+3p\underline{(b-c)}=(b-c)(2m+3p)$.

2) Składniki mają czynniki $y-t$ i $t-y$, które są wyrazami przeciwstawnymi. Dlatego w drugim składniku wyłączymy czynnik -1 przed nawias, otrzymamy: $c(t-y)=-c(y-t)$.

Dlatego, $x(y-t)+c(t-y)=x(y-t)-c(y-t)=(y-t)(x-c)$.

Odpowiedź: 1) $(b-c)(2m+3p)$; 2) $(y-t)(x-c)$.

Dla sprawdzenia prawidłowości rozkładania na czynniki należy pomnożyć otrzymane czynniki. Wynik musi być równy danemu wielomianowi.

Rozwiązywanie równań za pomocą rozkładania wielomianu na czynniki

Rozkładanie wielomianów na czynniki często upraszcza proces rozwiązywania równania.

Przykład 3. Znaleźć pierwiastki równania $5x^2-7x=0$.

Rozwiązanie. Rozłożymy lewą stronę równania na czynniki za pomocą wyłączenia wspólnego czynnika przed nawiasy: $x(5x-7)=0$. Biorąc pod uwagę to, że iloczyn wynosi zero, wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej jeden z czynników wynosi zero, otrzymamy: $x=0$ lub $5x-7=0$, dlatego, $x=0$ lub $x=1{,}4$.

Odpowiedź: 0; 1,4.

Należy pamiętać, że taki sposób rozwiązywania równania można stosować tylko wtedy, gdy prawa strona równania wynosi 0. Równanie $5x^2-7x=12$, $5x^2-7x=40$ itp. nie można rozwiązywać w taki sposób.

? Jakie przekształcenie nazywamy rozłożeniem wielomianu na czynniki? ○ Na przykładzie wielomianu $ab+ac$ wytłumacz, jak rozłożyć na czynniki za pomocą wyłączenia wspólnego czynnika przed nawiasy.

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

1

546. (*Ustnie.*) Znajdź wspólny czynnik w wyrażeniu:

1) $5x+5y$; 2) $7a-7$; 3) $ab+at$; 4) $ma-pm$.

547. (*Ustnie.*) Rozłóż na czynniki:

1) $am+an$; 2) $12x-12y$; 3) $tm-tc$; 4) $2c+2m$.

548. Wyłącz wspólny czynnik przed nawiasy:
1) $5a + 5c$; 2) $7x - 7u$; 3) $ap - ab$; 4) $mx + yx$.

549. Wyłącz wspólny czynnik przed nawiasy:
1) $2u - 2p$; 2) $7x + 7y$; 3) $at + bt$; 4) $ma - mc$.

2 **550.** (*Ustnie.*) Czy poprawnie wykonano rozłożenie na czynniki
1) $7a + 7 = 7a$; 2) $5m - 5 = 5(m - 5)$;
3) $2a - 2 = 2(a - 1)$; 4) $7xy - 14x = 7x(y - 2)$;
5) $5mn + 5n = 5m(n + 3)$; 6) $7ab + 8cb = 15b(a + c)$?

551. Zapisz sumę w postaci iloczynu:
1) $3a + 12b$; 2) $-6a - 9x$; 3) $17a + 17$;
4) $-ab - a$; 5) $14a - 21x$; 6) $8b - 8$.

552. Rozłóż na czynniki:
1) $4m - 16a$; 2) $-12m + 18a$; 3) $14m - 14$;
4) $-xb - b$; 5) $8p + 8$; 6) $20b - 30c$.

553. Rozłóż na czynniki:
1) $5ab + 5xb$; 2) $2xy - 8y$; 3) $-5ab + 5a$;
4) $7a + 21ay$; 5) $9x^2 - 27x$; 6) $3a - 9a^2$;
7) $m^2 - ma$; 8) $12ax - 4a^2$; 9) $-18xy + 24y^2$;
10) $a^2b - ab^2$; 11) $pm - p^2m$; 12) $-x^2y^2 - xy$.

554. Wyłącz wspólny czynnik przed nawiasy:
1) $7ax - 7bx$; 2) $3ab + 9a$; 3) $6xm - 8xn$;
4) $15xy + 5x$; 5) $9m^2 - 18m$; 6) $15m - 30m^2$;
7) $9xy + 6x^2$; 8) $a^2b - ab$; 9) $-p^2q - pq^2$.

555. Rozłóż na czynniki:
1) $x^3 - x^2$; 2) $a^4 + a^2$; 3) $m^3 - m^5$;
4) $a^3 + a^7$; 5) $3b^2 - 9b^3$; 6) $7a^3 + 6a$;
7) $4y^2 + 12y^4$; 8) $5m^5 + 15m^2$; 9) $-16a^4 - 20a$.

556. Rozłóż na czynniki:
1) $m^4 - m^2$; 2) $a^4 + a^5$; 3) $6a - 12a^3$;
4) $18p^3 - 12p^2$; 5) $14b^3 + 7b^4$; 6) $-25m^3 - 20m$.

557. Napisz sumę $6x^2y + 15x$ w postaci iloczynu i znajdź jego wartość, jeżeli $x = -0{,}5$, $y = 5$.

558. Napisz wyrażenie $12a^2b - 8a$ w postaci iloczynu i znajdź jego wartość, jeżeli $a = 2$, $b = \frac{1}{3}$.

559. Wyłącz wspólny czynnik przed nawiasy:
1) $a^4 + a^3 - a^2$; 2) $m^9 - m^2 + m^7$;
3) $b^6 + b^5 - b^9$; 4) $-y^7 - y^{12} - y^3$.

560. Podaj w postaci iloczynu:
1) $p^7 + p^3 - p^4$; 2) $a^{10} - a^5 + a^8$;
3) $b^7 - b^5 - b^2$; 4) $-m^8 - m^2 - m^4$.

561. Oblicz w dogodny sposób:
1) $132 \cdot 27 + 132 \cdot 73$; 2) $119 \cdot 37 - 19 \cdot 37$.

562. Rozwiąż równanie:
1) $x^2 - 2x = 0$; 2) $x^2 + 4x = 0$.

563. Znajdź pierwiastki równania:
1) $x^2 + 3x = 0$; 2) $x^2 - 7x = 0$.

564. Rozłóż wielomian na czynniki:
1) $4a^3 + 2a^2 - 8a$; 2) $9b^3 - 3b^2 - 27b^5$;
3) $16m^2 - 24m^6 - 32m^3$; 4) $-5b^3 - 20b^2 - 25b^5$.

565. Umieść wspólny czynnik poza nawiasami:
1) $5c^8 - 5c^7 + 10c^4$; 2) $9m^4 + 27m^3 - 81m$;
3) $8p^7 - 4p^5 + 10p^3$; 4) $21b - 28b^4 - 14b^3$.

566. Umieść wspólny czynnik poza nawiasami:
1) $7m^4 - 21m^2n^2 + 14m^3$; 2) $12a^2b - 18ab^2 + 30ab^3$;
3) $8x^2y^2 - 4x^3y^5 + 12x^4y^3$; 4) $-5p^4q^2 - 10p^2q^4 + 15p^3q^3$.

567. Rozłóż wielomian na czynniki:
1) $12a - 6a^2x^2 - 9a^3$; 2) $12b^2y - 18b^3 - 30b^4y$;
3) $16bx^2 - 8b^2x^3 + 24b^3x$; 4) $60m^4n^3 - 45m^2n^4 + 30m^3n^5$.

568. Oblicz w dogodny sposób:
1) $843 \cdot 743 - 743^2$; 2) $1103^2 - 1103 \cdot 100 - 1103 \cdot 3$.

569. Znajdź wartość wyrażenia:
1) $4{,}23a - a^2$, jeżeli $a = 5{,}23$;
2) $x^2y + x^3$, jeżeli $x = 2{,}51$, $y = -2{,}51$;
3) $am^5 - m^6$, jeżeli $m = -1$, $a = -5$;
4) $-xy - x^2$, jeżeli $x = 2{,}7$, $y = 7{,}3$.

570. Znajdź wartość wyrażenia:
1) $9{,}11a + a^2$, jeżeli $a = -10{,}11$;
2) $5ax^2 + 5a^2x$, jeżeli $a = \frac{2}{5}$; $x = \frac{3}{5}$.

571. Rozłóż wyrażenie na czynniki:
1) $2p(x - y) + q(x - y)$; 2) $a(x + y) - (x + y)$;
3) $(a - 7) - b(a - 7)$; 4) $5(a + 1) + (a + 1)^2$;
5) $(x + 2)^2 - x(x + 2)$; 6) $-5m(m - 2) + 4(m - 2)^2$.

572. Podaj wyrażenie w postaci iloczynu:
1) $a(x - y) + b(y - x)$; 2) $p(b - 5) - n(5 - b)$;
3) $7x(2b - 3) + 5y(3 - 2b)$; 4) $(x - y)^2 - a(y - x)$;
5) $5(x - 3)^2 - (3 - x)$; 6) $(a + 1)(2b - 3) - (a + 3)(3 - 2b)$.

573. Rozłóż na czynniki:
1) $3x(b-2)+y(b-2)$;
2) $(m^2-3)-x(m^2-3)$;
3) $a(b-9)+c(9-b)$;
4) $7(a+2)+(a+2)^2$;
5) $(c-m)^2-5(m-c)$;
6) $-(x+2y)-5(x+2y)^2$.

574. Znajdź pierwiastki równania:
1) $4x^2-x=0$;
2) $7x^2+28x=0$;
3) $\frac{1}{9}x^2+x=0$;
4) $\frac{2}{11}x^2-\frac{3}{11}x=0$.

575. Rozwiąż równania:
1) $12x^2+x=0$;
2) $0{,}2x^2-2x=0$;
3) $\frac{1}{14}x^2-x=0$;
4) $1\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x=0$.

576. Rozwiąż równania:
1) $x(3x+2)-5(3x+2)=0$;
2) $2x(x-2)-5(2-x)=0$.

577. Rozwiąż równania:
1) $x(4x+5)-7(4x+5)=0$;
2) $7(x-3)-2x(3-x)=0$.

578. Udowodnij, że wartość wyrażenia:
1) 17^3+17^2 jest wielokrotnością liczby 18;
2) $9^{14}-81^6$ jest wielokrotnością liczby 80.

579. Udowodnij, że wartość wyrażenia:
1) 39^9-39^8 jest podzielne przez 38;
2) 49^5-7^8 jest podzielne przez 48.

4 **580.** Wyłącz wspólny czynnik przed nawiasy:
1) $(5m-10)^2$;
2) $(18a+27b)^2$.

581. Znajdź pierwiastki równania:
1) $x(x-3)=7x-21$;
2) $2x(x-5)=20-4x$.

582. Rozwiąż równania:
1) $x(x-2)=4x-8$;
2) $3x(x-4)=28-7x$.

583. Udowodnij, że liczba:
1) 10^4+5^3 jest podzielna przez 9;
2) $4^{15}-4^{14}+4^{13}$ jest podzielna przez 13;
3) $27^3-3^7+9^3$ jest podzielna przez 25;
4) $21^3+14^3-7^3$ jest podzielna przez 34.

Ćwiczenia powtórzeniowe

584. Uprość wyrażenie i znajdź jego wartość:
1) $-3x^2+7x^2-4x^2+3x^2$, jeżeli $x=0{,}1$;
2) $8m+5n-7m+15n$, jeżeli $m=7$, $n=-1$.

585. Napisz zamiast „gwiazdek” takie współczynniki jednomianów, żeby równość stała się tożsamością:
1) $2m^2 - 4mn + n^2 + (*m^2 - *mn - *n^2) = 3m^2 - 9mn - 5n^2$;
2) $7x^2 - 10y^2 - xy - (*x^2 - *xy + *y^2) = -x^2 + 3y^2 + xy$.

586. Długość prostokąta jest trzy razy większa niż jego szerokość. Jeżeli długość prostokąta zmniejszyć o 5 cm, to jego pole zmniejszy się o 40 cm^2. Znajdź długość i szerokość prostokąta.

Matematyka życia

587. Szerokość jezdni wynosi 16 m. Prędkość ruchu Marysi 1,5 m/s. Czy zdąży Marysia przejść przez pasy na zielonym świetle, którego sygnał trwa 25 sekund? Czy zdąży Marysia przeprowadzić przez jezdnię babcię, prędkość poruszania się której 0,8 m/s?

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

588. Wiemy, że $a < b < c$. Czy nierówności być prawdziwe jednocześnie $|a| > |c|$ i $|b| < |c|$?

§ 14. Mnożenie wielomianu na wielomian

Zasada mnożenia wielomianu na wielomian

Pomnożymy wielomian $a + b$ przez wielomian $x + y$. Oznaczymy wielomian $x + y$ literą m. Otrzymamy:

$$(a + b)(x + y) = (a + b)m = am + bm.$$

W wyrażeniu $am + bm$ podstawimy zamiast m wielomian $x + y$ i ponownie skorzystamy z zasady mnożenia jednomianu przez wielomian:

$$am + bm = a(x + y) + b(x + y) = ax + ay + bx + by.$$

Dlatego,

$$(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by.$$

Wielomian $ax + ay + bx + by$ jest sumą wszystkich jednomianów, które otrzymano dzięki mnożeniu każdego czynnika wielomianu $a + b$ przez każdy czynnik wielomianu $x + y$.

Przechodzimy do *zasady mnożenia wielomianu przez wielomian.*

Żeby pomnożyć wielomian przez wielomian, należy każdy wyraz jednego wielomianu pomnożyć przez każdy wyraz innego wielomianu i otrzymane iloczyny dodać.

Proces mnożenia wielomianu przez wielomian można przedstawić za pomocą poniższego schematu:

$$(a + b)(x + y) = \underset{1}{ax} + \underset{2}{ay} + \underset{3}{bx} + \underset{4}{by}.$$

Zastosowanie zasady mnożenia wielomianu przez wielomian do rozwiązywania ćwiczeń

Wynikiem mnożenia wielomianu przez wielomian jest wielomian. Jeżeli pierwszy ze współczynników iloczynu zawiera m wyrazów, a drugi n wyrazów, wtedy mnożąc je otrzymamy wielomian, zawierający mn wyrazów, zatem po redukcji wyrazów podobnych dana ilość może się zmniejszyć.

Przykład 1. Wykonać mnożenie $(2x - y)(4x - 3xy + 2y)$.

Rozwiązanie. $(2x - y)(4x - 3xy + 2y) = 2x \cdot 4x - 2x \cdot 3xy + 2x \cdot 2y - - y \cdot 4x + y \cdot 3xy - y \cdot 2y = 8x^2 - 6x^2y + \underline{4xy} - \underline{4xy} + 3xy^2 - 2y^2 = = 8x^2 - 6x^2y + 3xy^2 - 2y^2$.

Odpowiedź: $8x^2 - 6x^2y + 3xy^2 - 2y^2$.

Przykład 2. Uprościć wyrażenie $(2x - 7)(x - 3) - 2x(x + 4)$.

Rozwiązanie. $(2x - 7)(x - 3) - 2x(x + 4) = 2x^2 - \underline{\underline{6x}} - \underline{\underline{7x}} + 21 - - 2x^2 - \underline{\underline{8x}} = -21x + 21$.

Odpowiedź: $-21x + 21$.

Przykład 3. Udowodnić, że wartość wyrażenia

$$n(n - 3) - (n - 2)(n - 3) + 8$$

jest liczbą parzystą dla wszystkich wartości naturalnych n.

Udowodnienie. Najpierw wykonamy mnożenie wielomianów $(n - 2)(n - 3)$ i zapiszemy go w nawiasach. Otrzymamy:

$$n^2 - 3n - (n^2 - 2n - 3n + 6) + 8.$$

Otworzymy nawiasy, przed którymi stoi znak „minus". Otrzymamy

$$n^2 - 3n - n^2 + 2n + 3n - 6 + 8 = 2n + 2 = 2(n + 1).$$

Jeżeli n jest liczbą naturalną, wtedy $n + 1$ – również jest liczbą naturalną. Dlatego wartość wyrażenia $2(n + 1)$ jest liczbą parzystą dla dowolnej wartości n. Dlatego i wartość wyrażenia $n(n - 3) - - (n - 2)(n - 3) + 8$ jest liczbą parzystą dla wszystkich wartości n.

Twierdzenie zadania udowodniono.

Jeżeli jest potrzeba pomnożenia więcej niż dwóch wielomianów, wtedy najpierw mnożymy pewne dwa z nich, zatem otrzymany wynik mnożymy na trzeci wielomian i kolejno tak samo.

Przykład 4. Wykonać mnożenie $(x-2)(x+3)(x+1)$.

Rozwiązanie, Najpierw mnożymy pierwszy wielomian przez drugi i otrzymany wynik mnożymy przez trzeci wielomian.

$(x-2)(x+3)(x+1) = (x^2+\underline{3x}-\underline{2x}-6)(x+1) = (x^2+x-6) \times$
$\times (x+1) = x^3+x^2+x^2+\underline{\underline{x}}-\underline{\underline{6x}}-6 = x^3+2x^2-5x-6.$

Odpowiedź: x^3+2x^2-5x-6.

Sformułuj zasadę mnożenia wielomianu przez wielomian. ○ Jak pomnożyć więcej niż dwa wielomiany?

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

589. (*Ustnie.*) Znajdź ilcozyn:
1) $(x+y)(a+t)$; 2) $(a-2)(b+1)$;
3) $(7-p)(b-c)$; 4) $(1-m)(2-d)$.

590. Wykonaj mnożenie:
1) $(a-b)(x+m)$; 2) $(c+n)(a+y)$;
3) $(p-t)(c-y)$; 4) $(a+3)(b-2)$.

591. Pomnoż dwumiany:
1) $(c-7)(x+1)$; 2) $(a+b)(p+y)$;
3) $(b+2)(y-4)$; 4) $(c-b)(a-x)$.

592. Uprość wyrażenie:
1) $(a+3)(a+2)$; 2) $(y-2)(y+4)$; 3) $(2-p)(p+1)$;
4) $(b-5)(2b+1)$; 5) $(3a-4)(2a+1)$; 6) $(5y-3)(1-2y)$.

593. Uprość wyrażenie:
1) $(y+2)(y-3)$; 2) $(a-3)(a-2)$; 3) $(4-p)(p+3)$;
4) $(5a-2)(a+3)$; 5) $(4b-3)(2b-1)$; 6) $(7m-2)(1+2m)$.

594. Podaj wyrażenie w postaci wielomianu w postaci kanonicznej
1) $(2+4x)(2y-1)$; 2) $(x^2+a)(x-a^2)$;
3) $(4p-2m)(3p+5m)$; 4) $(2x^2-1)(3x+1)$;
5) $(7x^2-4x)(3x-2)$; 6) $(b-2)(3b^3-4b^2)$;
7) $(m^2-2m)(3m-7m^2)$; 8) $(n^3-2n^2)(n+7)$.

595. Uprość wyrażenie:
1) $(3m^2-p)(m^2+p)$; 2) $(5a^2+b)(b^2-4a^2)$;
3) $(12a^2-3)(5a-7a^2)$; 4) $(2a^3-3a^2)(a+5)$.

596. Wykonaj mnożenie:
1) $(m - n)(a + b - 1)$; 2) $(3 - a)(p + 5 - m)$;
3) $(a + x - 3)(n + 2)$; 4) $(c - d - 7)(x + y)$.

597. Przekształć wyrażenie na wielomian:
1) $(a + b)(m - 2 + p)$; 2) $(5 - x)(m - n - p)$;
3) $(x + y - 2)(a - m)$; 4) $(p + q + 3)(-a - x)$.

598. Wykonaj działania:
1) $(2x + 7)(2x - 4) + 28$; 2) $5m^2 + (3 - 5m)(m + 2)$;
3) $(a + 7)(a - 2) - a(a + 5)$; 4) $(2b + 1)(3b - 1) - (6b^2 - 1)$.

599. Uprość wyrażenie:
1) $(2p - 1)(3p + 5) - 6p^2$;
2) $12 + (3m - 2)(5m + 6)$;
3) $(m + 3)(m - 5) - m(m - 2)$;
4) $(3a - 2)(4a + 1) - (12a^2 - 2)$.

600. Przekształć wyrażenie na wielomian w postaci kanonicznej i znajdź jego wartość:
1) $(2a - 3)(3a + 5) - 6a^2$, jeżeli $a = 13{,}5$;
2) $(5x - 1)(1 - 2x) - 7x$, jeżeli $x = -2$.

601. Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość:
1) $(7x + 3)(2x - 1) - 14x^2$, jeżeli $x = -8$;
2) $(2a + 4)(1 - 3a) + 10a$, jeżeli $a = -1$.

602. Wykonaj działania:
1) $x(x - 5) + (x + 4)(x + 2)$;
2) $(m + 3)(m - 4) - m(m - 1) + 5$;
3) $(a + 3)a - (a + 1) + (4 - a)(4 + a)$;
4) $(y + 2)(y - 3) - 2y(1 - y)$.

603. Uprość wyrażenie:
1) $(5x - 1)(4x + 7) - 4x(5x - 8)$;
2) $(a + 3)(a - 2) - a(a + 9) + 6$;
3) $2x(3x - 1) + (x - 9)(5x - 6)$;
4) $(2x + 3)(5x - 4) - 2x(x - 3) - 13(x - 1)$.

604. Rozwiąż równanie:
1) $(x - 1)(x + 2) - x^2 = -8$; 2) $(3x + 1)(5 - 2x) + 6x^2 = 5$.

605. Rozwiąż równanie:
1) $(x + 3)(2x - 1) - 2x^2 = 7$; 2) $10x^2 + (5x - 1)(4 - 2x) = -4$.

3 **606.** Przekształć wyrażenie na wielomian w postaci kanonicznej:
1) $(a^2 + ab - b^2)(a - b)$; 2) $(x^2 - xy - y^2)(x + y)$;
3) $(m - n)(-m^2 - 3mn + n^2)$; 4) $(p - 2)(p^2 + 3p - 4)$;
5) $(9 - 4m - m^2)(m - 2)$; 6) $(y^2 - 3y - 7)(4y - 2)$.

607. Wykonaj mnożenie i uprość otrzymane wyrażenie:
1) $(a + b)(-a^2 + ab - b^2)$; 2) $(x - y)(-x^2 - xy + y^2)$;
3) $(7a^2 + a - 1)(a + 1)$; 4) $(2m^2 - 3m - 2)(m + 5)$.

608. Przekształć na wielomian w postaci kanonicznej:
1) $(3m + 2n)(9m^2 - 6mn + 4n^2)$;
2) $(4x^2 + 10xy + 25y^2)(2x - 5y)$;
3) $(-x^2 + 3xa - a^2)(x + 2a)$;
4) $(3m - x)(5mx - m^2 + x^2)$.

609. Podaj iloczyn w postaci wielomianu:
1) $(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$; 2) $(9a^2 - 2ab - b^2)(3a + 2b)$.

610. Wykonaj działania:
1) $9m^2 - (3m - 2)(3m + 7)$; 2) $18y - (3y + 1)(6y + 4)$;
3) $(a + 4)a - (a + 2)(a - 2)$; 4) $(b + 7)(b + 1) - (b + 8)(b - 1)$.

611. Uprość wyrażenie:
1) $8x - (x + 5)(x + 3)$; 2) $a(a + 8) - (a + 2)(a - 5)$;
3) $12x^2 + 5 - (4x + 7)(3x - 1)$;
4) $(x + 1)(x - 5) - (x + 3)(x - 7)$.

612. Przekształć na wielomian w postaci kanonicznej:
1) $a^2(a - 2)(a + 5)$; 2) $-5m^2(m - 1)(2 - m)$;
3) $-4x^3(2x - 3)(x - x^2)$; 4) $0{,}2b^2(5b + 10)(b^2 - 2)$.

613. Otwórz nawiasy i uprość otrzymane wyrażenie:
1) $m^2(m - 4)(m + 2)$; 2) $-a^2(2a - 3)(3a + 7)$;
3) $-5b^3(2b + b^2)(b - 1)$; 4) $0{,}5x^2(2x - 6)(x^2 + x)$.

614. Udowodnij tożsamość:
1) $(m - 3)(m + 7) - 10 = (m + 8)(m - 4) + 1$;
2) $(2x - 1)(3x + 5) + 9x = (3x - 1)(2x + 5) + 3x$.

615. Udowodnij, że dla każdej wartości niewiadomej a:
1) wartość wyrażenia $(a - 8)(a + 3) - (a - 7)(a + 2)$ równa się -10;
2) wartość wyrażenia $(a^2 - 2)(a^2 + 5) - (a^2 - 4)(a^2 + 4) - 3a^2$ równa się 6.

616. Udowodnij, że wartość wyrażenia nie zależy od wartości niewiadomej:
1) $(m - 7)(m + 1) - (m + 2)(m - 8)$;
2) $a^2(a^2 - 1) - (a^2 - 2)(a^2 + 3) + 2a^2$.

617. Udowodnij, że dla dowolnej wartości niewiadomej a wartość wyrażenia $(a + 7)(a - 3) - 4(a - 8)$ jest liczbą dodatnią.

618. Napisz wyrażenie w postaci wielomianu:
1) $(x - y)^2$; 2) $(p + 2a)^2$; 3) $(4x - 3y)^2$; 4) $(7a + 2b)^2$.

619. Przekształć wyrażenie na wielomian:
1) $(2a - 3b)^2$; 2) $(4x + 5y)^2$.

620. Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość:
1) $(2x^2 - x)(3x^2 + x) - (x^2 + x)(6x^2 - 2x)$, jeżeli $x = -2$;
2) $(a + 2b)(a^2 - 2ab + 4b^2) - 8b^3$, jeżeli $a = 3$, $b = -2015$.

621. Uprość wyrażenie i znajdź jego wartość:
1) $(x - 9)(x + 9) - (x - 3)(x + 27)$, jeżeli $x = 1\frac{1}{8}$;
2) $8a^3 - (2a - 3b)(4a^2 + 6ab + 9b^2)$, jeżeli $a = -\frac{7}{8}, b = \frac{1}{3}$.

622. Znajdź pierwiastki równań:
1) $4x - (x + 2)(x - 3) = (5 - x)(x + 3)$;
2) $2x(x + 1) - (x + 2)(x - 3) = x^2 + 7$.

623. Rozwiąż równania:
1) $x(2x - 5) - x^2 = 2 - (x - 1)(2 - x)$;
2) $2x^2 - (x + 1)(x + 19) = (x + 3)(x - 2) + 8$.

624. Zamiast „gwiazdki" napisz takie jednomiany, żeby równość była tożsamością:
1) $(x - 1)(* + 3) = x^2 + * - *$; 2) $(y + 2)(y - *) = * + y - *$.

625. Udowodnij, że dla dowolnej naturalnej wartości n wartość wyrażenia:
1) $(n + 2)(n + 3) - n(n - 1)$ jest wielokrotnością liczby 6;
2) $(n - 5)(n + 8) + (n + 1)(2n - 5) + 46$ rzy dzieleniu przez 3 reszta wynosi 1.

626. Znajdź trzy kolejne liczby naturalne, jeżeli kwadrat najmniejszej z nich jest o 44 mniejszy od iloczynu dwóch innych.

627. Podano dwa iloczyny $27 \cdot 18$ i $12 \cdot 42$. O jaką jednakową liczbę trzeba zmniejszyć każdy z czterech mnożników, żeby wartość nowych iloczynów była sobie równa?

628. Podano dwa iloczyny $22 \cdot 15$ i $27 \cdot 12$. O jaką jednakową liczbę trzeba zwiększyć każdy z czterech mnożników, żeby wartość nowych iloczynów była sobie równa?

4 **629.** Wykonaj mnożenie:
1) $(a^2 - 2a + 1)(a^2 + 3a - 7)$; 2) $(7 - 2b + 3b^2)(2b^2 - 2b - 1)$.

630. Wykonaj mnożenie:
1) $(x^2 - x - 1)(x^2 + 3x + 5)$; 2) $(7 - a - 2a^2)(a^2 + 3a - 1)$.

631. Znajdź cztery kolejne liczby całkowite, jeżeli iloczyn dwóch większych z nich o 78 większy niż iloczyn dwóch mniejszych.

632. Znajdź cztery kolejne liczby naturalne, jeżeli iloczyn dwóch mniejszych z nich jest o 102 mniejszy od iloczynu dwóch większych.

633. Przekształć wyrażenie na wielomian w postaci kanonicznej:
1) $(a + 2)(a - 1)(a + 3)$; 2) $(a - 4)(a - 7)(a + 1)$.

634. Wykonaj mnożenie:
1) $(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$;
2) $(b - 1)(b^4 + b^3 + b^2 + b + 1)$.

635. Obwód prostokąta wynosi 60 cm. Jeżeli jego długość zwiększyć o 1 cm, a szerokość zmniejszyć o 3 cm, to jego pole zmniejszy się o 45 cm2. Znajdź długość i szerokość danego prostokąta.

Ćwiczenia powtórzeniowe

636. Prędkość samochodu wynosi 70 km/h, a motocykla 50 km/h. Droga z wioski do miasta motocykl pokonuje na 2 godziny dłużej niż samochód. Znajdź odległość z wioski do miasta.

637. Znajdź liczbę dodatnią, która po podniesieniu do kwadratu:
1) zwiększy się 4 razy; 2) zmniejszy się 5 razy.

638. W pierwszej kanistrze było trzy razy więcej benzyny niż w drugie. Kiedy z pierwszej kanistry przelano 2 litry do drugiej, to objętość benzyny w drugiej kanistrze wyniosła $\frac{5}{7}$ od objętości pierwszej. Ile benzyny było początkowo w każdej kanistrze?

639. Podaj wyrażenie w postaci dwóch wielomianów, jeden z których zawiera niewiadomą x, a drugi jej nie zawiera:
1) $(5x^2 - 8b + a) - (b^2 - 5x + 1) - (2b - x^2 + 7x)$;
2) $(8mx^2 + 7mn^2 - p) - (x^2 + mx^2 + 2p) - 17x$.

Matematyka życia

640. Wypłata Tetiany jest proporcjonalna do liczby odpracowanych godzin. W ciągu miesiąca ona odpracowała 170 h i otrzymała 8500 UAH. Ile godzin powinna odpracować Tetiana w następnym miesiącu, żeby otrzymać 9250 UAH?

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

641. Oblicz $2\frac{124}{125} \cdot 4\frac{2}{129} + 3\frac{1}{125} \cdot 5\frac{2}{129} - \frac{12}{129}$.

§ 15. Rozkładanie wielomianu na czynniki metodą grupowania

Metoda grupowania

W § 13 zapoznaliśmy się z rozkładaniem wielomianu na czynniki metodą wyłączenia wspólnego czynnika przed nawiasy. Istnieje jeszcze inne sposoby rozkładania wielomianów na czynniki, na przykład, *metoda grupowania.*

Przykład 1. Rozłożyć na czynniki wielomian

$$ab - 5a + 2b - 10.$$

Rozwiązanie. We wszystkich wyrazach wielomianu nie ma wspólnego czynnika. Dlatego tutaj odpowiednia będzie właśnie metoda grupowania. Rozłożymy składniki na dwie grupy tak, *żeby składniki w każdej grupie miały wspólny czynnik:*

$$ab - 5a + 2b - 10 = (ab - 5a) + (2b - 10).$$

Z każdej grupy wyłączymy wspólny czynnik przed nawiasy:

$$(ab - 5a) + (2b - 10) = a(b - 5) + 2(b - 5).$$

Teraz otrzymany dla obu grup wspólny czynnik $b - 5$ wyłączymy przed nawiasy:

$$a\underline{(b - 5)} + 2\underline{(b - 5)} = (b - 5)(a + 2).$$

Więc, $ab - 5a + 2b - 10 = (b - 5)(a + 2)$.

Można byłoby pogrupować składniki tego wielomianu również inną metodą.

Mianowicie: $ab - 5a + 2b - 10 = (ab + 2b) + (-5a - 10) = b\underline{(a + 2)} - 5\underline{(a + 2)} = (a + 2)(b - 5)$.

Odpowiedź: $(b - 5)(a + 2)$.

Dochodzimy do wniosku, że dla rozkładania wielomianu na czynniki metodą grupowania, warto wykonywać działania w następującej kolejności:

1) rozłożyć wielomian na grupy składników, każda z których zawiera wspólny czynnik;
2) z każdej grupy wyłączyć wspólny czynnik przed nawiasy
3) wspólny da wszystkich czynnik, który utworzono, wyłączyć przed nawiasy,

Aby sprawdzić prawidłowość rozkładania należy pomnożyć otrzymane czynniki. Iloczyn tych czynników musi równać się danemu wielomianowi.

Zastosowanie metody grupowania dla rozkładania na czynniki wielomianów, które zawierają szczęść lub trzy składniki

Niektóre wielomiany, które zawierają sześć lub trzy składniki (wyrazy wielomianu) można rozłożyć na czynniki metodą grupowania

Przykład 2. Rozłożyć na czynniki wielomian

$$2a + 2b - m + am + bm - 2.$$

Rozwiązanie. Pierwszy sposób. Pogrupujemy wyrazy wielomianu w 3 grupy po 2 składniki tak, żeby składniki w każdej grupie miały wspólny czynnik. Otrzymamy:

$2a + 2b - m + am + bm - 2 = (2a + am) + (2b + bm) + (-m - 2) =$
$= a\underline{(2 + m)} + b\underline{(2 + m)} - 1\underline{(2 + m)} = (2 + m)(a + b - 1).$

Drugi sposób. Grupujemy teraz wyrazy wielomianu na 2 grupy po 3 czynniki tak, żeby czynniki w każdej grupie miały wspólny czynnik. Otrzymamy:

$2a + 2b - m + am + bm - 2 = (2a + 2b - 2) + (am + bm - m) =$
$= 2\underline{(a + b - 1)} + m\underline{(a + b - 1)} = (a + b - 1)(2 + m).$

Odpowiedź: $(2 + m)(a + b - 1)$.

Przykład 3. Rozłożyć na czynniki trójmian $x^2 - 6x + 8$.

Rozwiązanie. Biorąc pod uwagę, że $-6x = -2x + (-4x)$, możemy przepisać wielomian jako sumę czterech składników, pogrupować je, a zatem rozłożyć na czynniki:

$x^2 - 6x + 8 = x^2 - 2x - 4x + 8 = (x^2 - 2x) + (-4x + 8) =$
$= x\underline{(x - 2)} - 4\underline{(x - 2)} = (x - 2)(x - 4).$

Odpowiedź: $(x - 2)(x - 4)$.

Gdybyśmy podali składnik –6x w postaci sumy jakichś innych składników, wtedy nie moglibyśmy zastosować grupowanie i rozkładanie na czynniki. Proponujemy przekonać się samodzielnie. „Tajemnica” polega na tym, że same składniki $-2x$ i $-4x$ sprzyjały pojawieniu się wspólnego czynnika po rozłożeniu wielomianu na grupy.

? Jaką kolejność działań stosują do rozkładania wielomianu na czynniki metodą grupowania?

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

1 **642.** W wielomianie $ca - 2c + 5a - 10$ nazwij grupę ze wspólnym czynnikiem a i grupę ze wspólnym czynnikiem 2.

643. Zakończ rozkładanie wielomianu na czynniki:
$xy + yt - 2x - 2t = (xy - 2x) + (yt - 2t) = x(y - 2) + t(y - 2) = \dots$

644. Zakończ rozkładanie wielomianu na czynniki:
$ab - cd - ad + cb = (ab - ad) + (cb - cd) = a(b - d) + c(b - d) = \dots$

2

645. Podaj wyraz w postaci iloczynu wielomianów:
1) $a(b + c) + 3b + 3c$; 2) $p(x - y) + 7x - 7y$;
3) $m(t - 5) + t - 5$; 4) $b(m - c) + c - m$.

646. Rozłóż na czynniki:
1) $c(x - y) + 3x - 3y$; 2) $a(c + m) + 9c + 9m$;
3) $x(c + 5) + c + 5$; 4) $y(p - 3) + 3 - p$.

647. Rozłóż wielomian na czynniki:
1) $ax + ay + 6x + 6y$; 2) $5m - 5n + pm - pn$;
3) $9p + mn + 9n + mp$; 4) $ab + ac - b - c$;
5) $1 - by - y + b$; 6) $ma + 2a - 2m - 4$.

648. Podaj w postaci iloczynu wielomianów:
1) $ab + 5a + bm + 5m$; 2) $mp - b + bp - m$;
3) $am - b + m - ab$; 4) $cm - 3dm + cp - 3dp$.

649. Napisz wyrażenie $ab - ac + 2b - 2c$ w postaci iloczynu i znajdź jego wartość, jeżeli a = –1; b = 5,7; c = 6,7.

650. Napisz wyrażenie $5x - 5y + xt - yt$ w postaci iloczynu i znajdź jego wartość, jeżeli $x = 7{,}2$; $y = 6{,}2$; $t = -4{,}5$.

3

651. Podaj wyrażenie w postaci iloczynu wielomianów:
1) $a^3 + a^2 + a + 1$; 2) $b^5 - b^3 - b^2 + 1$;
3) $c^4 + 3c^3 - c - 3$; 4) $a^6 - 5a^4 - 3a^2 + 15$;
5) $m^2 - mn - 8m + 8n$; 6) $ab - 9b + b^2 - 9a$;
7) $7t - ta + 7a - t^2$; 8) $xy - ty - y^2 + xt$.

652. Rozłóż wielomian na czynniki:
1) $x^2 + bx - b^2y - bxy$;
2) $a^2b + c^2 - abc - ac$;
3) $7a^3m + 14a^2 - 6bm - 3am^2b$;
4) $21x + 8tm^3 - 24m^2 - 7xtm$.

653. Podaj wielomian w postaci iloczynu:
1) $b^2 + xb - x^2y - xby$; 2) $m^2 + 7m - bm - 7b$;
3) $4a - ax + 4x - x^2$; 4) $ma - mb - m^2 + ab$.

654. Oblicz wartość wyrażenia w najłatwiejszy dla Ciebie sposób:
1) $157 \cdot 37 + 29 \cdot 157 + 143 \cdot 42 + 24 \cdot 143$;
2) $9\frac{2}{3} \cdot 5\frac{1}{2} - 16 \cdot 4{,}5 + 10\frac{1}{3} \cdot 5\frac{1}{2} - 16$.

655. Znajdź wartość wyrażenia, najpierw rozkładając wyrażenie na czynniki:
1) $5m^2 - 5mn - 7m + 7n$, jeżeli $m = 1{,}4$; $n = -5{,}17$;
2) $3a^3 - 2b^3 - 6a^2b^2 + ab$, jeżeli $a = \frac{1}{3}$; $b = \frac{2}{3}$.

656. Znajdź wartość wyrażenia, najpierw rozkładając wyrażenie na czynniki:
1) $27x^3 + x^2 + 27x + 1$, jeżeli $x = -\frac{1}{27}$;
2) $5p + px^2 - p^2x - 5x$, jeżeli $p = 2{,}5$; $x = 2{,}4$.

657. Zapisz wyrażenie w postaci iloczynu:
1) $45x^3y^4 - 9x^5y^3 - 15x^2y^2 + 3x^4y$;
2) $2{,}1mn^2 - 2{,}8mp^2 - 2{,}7n^3 + 3{,}6np^2$.

658. Rozłóż na czynniki:
1) $8m^2c - 6m^2x - 16cx^3 + 12x^4$;
2) $1{,}2xy^3 + 1{,}6x^3y^2 - 2x^7y - 1{,}5x^5y^2$.

4 **659.** Rozwiąż równanie:
1) $x^2 - 5x + 40 = 8x$;
2) $5y^3 + 2y^2 + 5y + 2 = 0$.

660. Rozwiąż równanie:
1) $x^2 + 7x - 7 = x$;
2) $7y^3 + y^2 + 7y + 1 = 0$.

661. Rozłóż na czynniki:
1) $at^2 - ap + t^3 - tp - bt^2 + bp$;
2) $ax^2 + ay^2 - mx^2 - my^2 + m - a$;
3) $mb - m + 7 - 7b - 7m^2 + m^3$;
4) $6ax + 3ay - az - 6bx - 3by + bz$.

662. Rozłóż na czynniki:
1) $a^2b + a + ab^2 + b + 9ab + 9$;
2) $8ax + 4bx - 4x + 10am + 5bm - 5m$.

663. Rozłóż na czynniki trójmian:
1) $x^2 + 5x + 4$;
2) $x^2 - 5x + 4$;
3) $x^2 + x - 6$;
4) $a^2 + 4ab + 3b^2$.

664. Rozłóż na czynniki:
1) $x^2 - 6x + 5$;
2) $x^2 - x - 6$;
3) $x^2 + 2x - 15$;
4) $a^2 + 5ab + 6b^2$.

Ćwiczenia powtórzeniowe

665. Uprość wyrażenie i znajdź jego wartość:
1) $0{,}8(a - 5) - 0{,}6(2 - a)$, jeżeli $a = -5$;
2) $\frac{4}{7}(7x - 14y) - \frac{2}{9}(18x - 27y)$, jeżeli $x = 2024$, $y = -\frac{1}{2}$.

666. Znajdź pierwiastek równania:
1) $6x(x-1)-2x(3x-5)=-8$;
2) $5(2-x^2)-4x(x-1)=3x(1-3x)$.

Matematyka życia

667. Redaktorka naczelna wydawnictwa zleciła pilną pracę dwóm pracownikom od nabierania tekstów. Pierwszy drukuje stronę w ciągu 4 min, inny za 6 min. W jakich proporcjach powinni podzielić między sobą pracę, żeby wykonać ją jak najwcześniej.

Przygotuj się do przyswojenia nowego materiału

668. Podaj wyrażenie w postaci wielomianu:
1) $(x+3)(x+3)$; 2) $(y-2)(y-2)$;
3) $(7-m)(7-m)$; 4) $(5+a)(5+a)$.

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

669. Czy istnieje taka naturalna wartość niewiadomych x i y, dla których $x^5+y^5=33^6$?

SAMODZIELNA PRACA DOMOWA NR 3

Zadania 1–12 mają po 4 warianty odpowiedzi (A-D), wśród których tylko jedna jest prawidłowa. Wybierz prawidłowy wariant odpowiedzi.

1 **1.** Wskaż wyrażenie, które nie jest wielomianem.

A. $\frac{a}{a-5}$ **B.** x^2-2x+7 **C.** $-b-19$ **D.** $6c^2$

2. $k(n-m)=\ldots$

A. $kn-m$ **B.** $n-km$ **C.** $kn+km$ **D.** $kn-km$

3. $4c+8=\ldots$

A. $2(c+4)$ **B.** $4(c+2)$ **C.** $8(c+1)$ **D.** $4(c-2)$

2 **4.** Któremu z wielomianów równa się wyrażenie $(x-5)(x+2)$?

A. $x^2+3x-10$ **B.** $x^2-3x-10$
C. $x^2+3x+10$ **D.** x^2-3x-3

5. Podaj wyrażenie $(3m^2 - m) + (4m^2 - 5) - (7m^2 + 3)$ w postaci wielomianu w postaci kanonicznej.
A. $14m^2 - m - 2$ **B.** $-m - 2$
C. $-m - 8$ **D.** $8 - m$

6. Rozłóż $am - an - 2m + 2n$ na czynniki.
A. $(m - n)(a - 2)$ **B.** $(m - n)(a + 2)$
C. $(m + n)(a - 2)$ **D.** $(m - a)(n - 2)$

3 **7.** Dla jakiej wartości x wartość różnicy jednomianu $8x$ i wielomianu $3x - 4x^2 + 2$ będzie równe wartości wielomianu $3x + 4x^2 - 4$?
A. 2 **B.** 1 **C.** –1 **D.** 0

8. Oblicz $297 \cdot 397 - 397^2$ w najwygodniejszy sposób.
A. 39 700 **B.** –39 700 **C.** –29 700 **D.** 29 700

9. Znajdź wartość wyrażenia $(x - 5)(x + 2) - (x - 7)(x + 4)$, jeżeli $x = 10{,}2$.
A. 18,2 **B.** 18 **C.** 28,2 **D.** 7,8

4 **10.** Rozwiąż równanie $x^2 + 7x = 2(x + 7)$.
A. –7; 2 **B.** –7 **C.** 2 **D.** –2; 7

11. Wartość wyrażenia $27^4 - 3^9$ est wielokrotnością liczby …
A. 7 **B.** 11 **C.** 13 **D.** 17

12. Znajdź największą z czterech kolejnych liczb parzystych, jeżeli iloczyn pierwszej i trzeciej liczb jest o 44 mniej niż iloczyn dwóch innych.
A. 10 **B.** 6 **C.** 18 **D.** 14

Zadania 1–12 można wykonać również online pod linkiem *https://cutt.ly/TwKdmoDY* lub kodem QR.

W zadaniu 13 trzeba dopasować informację oznaczoną liczbami i literami. Jedna odpowiedź jest zbędna.

2 Dopasuj zgodność między wyrażeniami (1–3) i wielomianami, które są między sobą tożsamościowo równe (A–D).

Wyrażenie

1. $(3x^3 + x^2 - 2x) - (2x^3 - 4x^2 - 2x + 6)$
2. $2x^2(3x - 5) - 5x(x^2 - 3x)$
3. $(x^2 + 6x)(x - 1)$

Wielomian

A. $x^3 + 5x^2$
B. $x^3 + 5x^2 - 6$
C. $x^3 + 5x^2 - 6x$
D. $x^3 + 5x - 6$

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE WIEDZĘ WEDŁUG §§ 10–15

1 **1.** Wykonaj mnożenie:
1) $m(a - b + 3)$; 2) $-p(x + y - 4)$.

2. Wynieś wspólny czynnik przed nawiasy:
1) $7a - 7b$; 2) $xm + ym$.

3. Wykonaj mnożenie:
1) $(a + 2)(x - 3)$; 2) $(b - 5)(c - m)$.

2 **4.** Przekształć wyrażenie na wielomian w postaci kanonicznej:
1) $(2x^2 - x) + (3x - 5) - (x^2 - 5)$;
2) $-2xy(x^2 - 3xy + y^2)$.

5. Rozłóż wielomian na czynniki:
1) $9a^2 - 12ab$; 2) $7x - 7y + ax - ay$.

6. Uprość wyrażenie $(x + 5)(x - 2) - x(x + 3)$.

3 **7.** Rozwiąż równanie $(2x + 3)(3x - 7) = x(6x - 3) - 17$.

8. Rozłóż wielomian na czynniki:
1) $9m^3 - 3m^4 - 27m^8$; 2) $m^2 + 2n - 2m - mn$.

4 **9.** Znajdź cztery kolejne liczby całkowite, iloczyn dwóch mniejszych z których jest o 90 mniejszy niż iloczyn dwóch większych.

Dodatkowe ćwiczenia

4 **10.** Udowodnij, że suma pięciu kolejnych liczb naturalnych jest podzielna przez 5.

11. Rozwiąż równanie $x^2 - 5x = 4x - 20$.

12. Przekształć wyrażenie na wielomian w postaci kanonicznej:
1) $(x^2 - 2x + 5)(x^2 + 3x - 1)$; 2) $(a + 3)(a - 5)(a - 1)$.

§ 16. Kwadrat sumy i kwadrat różnicy

Wzór na kwadrat sumy

Podniesiemy dwumian $a + b$ do kwadratu:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Dlatego,

$$\boldsymbol{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.}$$

Dana tożsamość jest nazywana wzorem na kwadrat sumy. On daje możliwość podnieść do kwadratu sumę dwóch dowolnych wyrażeń nie według zasady mnożenia wielomianów, a w skrócie: od razu pisać kwadrat $(a + b)^2$ w postaci $a^2 + 2ab + b^2$. Dlatego wzór na kwadrat sumy nazywamy również *wzorem skróconego mnożenia*. Czytamy go następująco:

kwadrat sumy dwóch wyrażeń równa się kwadratowi pierwszego wyrażenia, plus iloczyn pierwszy na drugi pomnożony na dwa, plus kwadrat drugiego wyrażenia.

Przykład 1. Podaj wyrażenie $(3x + 5y)^2$ w postaci wielomianu.

Rozwiązanie.
$(3x + 5y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 5y + (5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$.
Jeżeli pośrednie działania są lekkie do wykonania w pamięci, to można od razu napisać odpowiedź:
$(3x + 5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$.
Odpowiedź: $(3x + 5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$.

Wzór na różnicę kwadratu

Teraz podniesiemy do kwadratu dwumian $a - b$:
$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
Dlatego

$$\boldsymbol{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.}$$

Otrzymaliśmy ***wzór na kwadrat różnicy***, która również jest wzorem skróconego mnożenia. Czytamy go następująco:

kwadrat różnicy dwóch wyrażeń równa się kwadratowi pierwszego wyrażenia, minus iloczyn pierwszy na drugi pomnożony na dwa, plus kwadrat drugiego wyrażenia.

Warto podkreślić, że wzór na kwadrat różnicy można otrzymać, jeżeli przepisać różnicę $a - b$ w postaci sumy $a + (-b)$:

$$(a - b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a \cdot (-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Przykład 2. Podnieść dwumian $4a - 7b$ do kwadratu.

Rozwiązanie. Według wzoru na kwadrat różnicy otrzymujemy
$(4a - 7b)^2 = (4a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot 7b + (7b)^2 = 16a^2 - 56ab + 49b^2$.
Odpowiedź: $(4a - 7b)^2 = 16a^2 - 56ab + 49b^2$.

Przekształcenie wyrażeń za pomocą wzorów na kwadrat sumy i kwadrat różnicy

Już wiemy, że $x^2 = (-x)^2$, dlatego przy podnoszeniu wyrażeń w postaci $-a - b$ i $-a + b$ do kwadratu, wskazana jest wstępna zamiana ich na przeciwstawne do nich wyrażenia:

$$\boldsymbol{(-a - b)^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;}$$
$$\boldsymbol{(-a + b)^2 = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.}$$

Przykład 3. Przekształcić na wielomian:

1) $(-x - 6m)^2$; 2) $(-2p^2 + 9q)^2$.

Rozwiązanie. 1) $(-x - 6m)^2 = (x + 6m)^2 = x^2 + 12xm + 36m^2$;
2) $(-2p^2 + 9q)^2 = (2p^2 - 9q)^2 = 4p^4 - 36p^2q + 81q^2$.

Odpowiedź: 1) $x^2 + 12xm + 36m^2$; 2) $4p^4 - 36p^2q + 81q^2$.

Przykład 4. Uprościć wyrażenie $(-5m^3 - 2n^2)^2 + (2m^3 - 5n^2)^2$.

Rozwiązanie. $(-5m^3 - 2n^2)^2 + (2m^3 - 5n^2)^2 = (5m^3 + 2n^2)^2 +$
$+ (2m^3 - 5n^2)^2 = 25m^6 + \underline{\underline{20m^3n^2}} + \underline{\underline{4n^4}} + 4m^6 - \underline{\underline{20m^3n^2}} + \underline{\underline{25n^4}} =$
$= 29m^6 + 29n^4$.

Odpowiedź: $29m^6 + 29n^4$.

Obliczenie kwadratów liczb za pomocą wzorów na kwadratu sumy i kwadrat różnicy

Rozpatrzmy, jak stosuje się wzory na kwadrat sumy i na kwadrat różnicy do obliczania kwadratów liczb.

Przykład 5. Obliczyć: 1) $(50 + 1)^2$; 2) $5{,}8^2$.

Rozwiązanie. 1) $(50 + 1)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 1 + 1^2 = 2500 + 100 + 1 =$
$= 2601$;
2) $5{,}8^2 = (6 - 0{,}2)^2 = 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 0{,}2 + 0{,}2^2 = 36 - 2{,}4 + 0{,}04 =$
$= 33{,}64$.

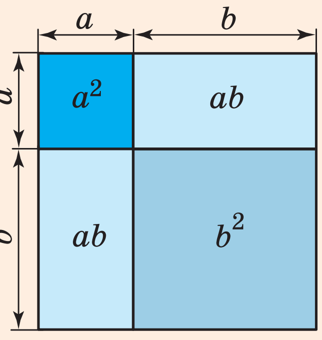
Odpowiedź: 1) 2601; 2) 33,64.

Dawno, dawno temu...

Niektóre zasady skróconego mnożenia były znane starożytnym chi ńskim i greckim matematykom 4 tysiące lat temu. Wtedy oni określili te zasady nie za pomocą liter i symboli, a słownie, i udowodnili geometrycznie, czyli tylko dla liczb dodatnich.

Na przykład, tożsamość $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ w drugiej książce „Elementy" Euklidesa (III wiek p.n.e.) została sformułowana w następujący sposób: „Jeżeli linia prosta (czyli odcinek) jest przecięta, to kwadrat na całej linii prostej jest równy kwadratom na odcinkach łącznie z dwukrotnie wziętymi prostokątami znajdującymi się między odcinkami". Sformułowanie „kwadrat na całej linii" należy rozumieć jako $(a + b)^2$, „kwadraty na odcinkach" jako a^2 i b^2, „prostokąt znajdujący się między odcinkami" jako ab.

Interpretację geometryczną danej tożsamości zilustrowano na rysunku.



Zapisz i przeczytaj wzór na kwadrat sumy. Zapisz i przeczytaj wzór na kwadrat różnicy. Jak podnieść do kwadratu wyrażenia $-a - b$ i $-a + b$?

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

1

670. (*Ustnie.*) Które z wyrażeń są kwadratami sumy dwóch wyrażeń, a które kwadratami różnicy:
1) $x^2 + y^2$; 2) $(a - b)^2$; 3) $p^2 - c^2$; 4) $(m + 2)$;
5) $(x + 3)^2$; 6) $(b - 7)^3$; 7) $(4 - p)^2$; 8) $(x + y)^2$?

671. (*Ustnie.*) Które z równości są poprawne:
1) $(b - 2)^2 = b^2 - 2^2$; 2) $(a + 3)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2$;
3) $(x + 5)^2 = x^2 + x \cdot 5 + 5^2$; 4) $(7 - y)^2 = 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot y + y^2$?

672. Które z równości są poprawne:
1) $(a + 7)^2 = a^2 + 7^2$; 2) $(x - 3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2$;
3) $(2 - y)^2 = 2^2 - 2 \cdot y + y^2$; 4) $(b + 3)^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot 3 + 3^2$?

673. Podaj w postaci wielomianu:
1) $(a + m)^2$; 2) $(b - x)^2$; 3) $(x + p)^2$; 4) $(m - y)^2$.

674. Podnieś do kwadratu:
1) $(b - p)^2$; 2) $(x + t)^2$; 3) $(c - a)^2$; 4) $(y + d)^2$.

2

675. (*Ustnie.*) Podaj wyrażenie w postaci wielomianu:
1) $(a + 4)^2$; 2) $(x - 3)^2$; 3) $(b + 2)^2$; 4) $(m - 5)^2$.

676. Podnieś do kwadratu:
1) $(x - 9)^2$; 2) $(a + 3)^2$; 3) $(10 - m)^2$;
4) $(7 + y)^2$; 5) $(c - 0{,}2)^2$; 6) $(0{,}8 + x)^2$.

677. Przekształć na wielomian:
1) $(2x + 5)^2$; 2) $(7b - 4)^2$; 3) $(10x + 3y)^2$;
4) $(9a - 4b)^2$; 5) $\left(\frac{1}{3}x + 3y\right)^2$; 6) $(5m - 0{,}2t)^2$.

678. Przekształć na wielomian:
1) $(a-3)^2$; 2) $(x+9)^2$; 3) $(c+0{,}3)^2$;
4) $(2a-5)^2$; 5) $(4y+3)^2$; 6) $(9a-8b)^2$;
7) $(4b+7a)^2$; 8) $\left(\frac{1}{2}m-2n\right)^2$; 9) $(0{,}5p+2q)^2$.

679. Wykonaj działania:
1) $(3a+1)^2-1$; 2) $12ab+(2a-3b)^2$;
3) $(4a+8)^2-16(a^2+4)$; 4) $-4y^2+(5x-2y)^2-25x^2$.

680. Uprość: 1) $20a+(a-10)^2$; 2) $(3m+5)^2-9m^2$;
3) $(x+4)^2-8(x+2)$; 4) $(2a-7b)^2-(4a^2+49b^2)$.

681. Przekształć wyrażenie na wielomian w postaci kanonicznej:
1) $(a-2)^2+a(a+4)$; 2) $(b+1)(b+2)+(b-3)^2$.

682. Uprość wyrażenie:
1) $(m-5)^2-m(m-10)$; 2) $(x+4)^2+(x+1)(x-9)$.

683. Rozwiąż równanie:
1) $(x+3)^2-x^2=12$; 2) $(y-2)^2=y^2-2y$.

684. Rozwiąż równanie:
1) $(x-4)^2-x^2=24$; 2) $(y+5)^2=5y+y^2$.

685. Wypełnij w zeszycie tablicę według wzoru:

Wyrażenie I	Wyrażenie II	Kwadrat różnicy wyrażeń I i II
$2x$	b	$4x^2-4xb+b^2$
	$7b$	$4x^2-28xb+49b^2$
$3x$		$9x^2-2xb+\frac{1}{9}b^2$
$0{,}5x$	$4b$	

686. Wypełnij w zeszycie tablicę według wzoru:

Wyrażenie I	Wyrażenie II	Kwadrat różnicy wyrażeń I i II
$3m$	a	$9m^2+6ma+a^2$
$5m$		$25m^2+20ma+4a^2$
	$4a$	$\frac{1}{16}m^2+2ma+16a^2$
$0{,}6m$	$5a$	
		$\frac{1}{9}m^2+6ma+81a^2$

3 **687.** Oblicz według wzoru na kwadrat sumy lub na kwadrat różnicy:
1) $(100 + 2)^2$; 2) 41^2; 3) 99^2; 4) $3{,}8^2$.

688. Oblicz, stosując wzór na kwadrat sumy lub na kwadrat różnicy:
1) $(40 - 1)^2$; 2) 89^2; 3) 501^2; 4) $4{,}02^2$.

689. Wśród wyrażeń $(x - y)^2$, $(x + y)^2$, $(-y + x)^2$, $(-x - y)^2$ znajdź te, które są tożsamościowe równe wyrażeniu:
1) $(y + x)^2$; 2) $(y - x)^2$.

690. Podaj w postaci wielomianu:
1) $(-p + 5)^2$; 2) $(-a - 7)^2$; 3) $(-p - 2m)^2$; 4) $(-3b + c)^2$.

691. Przekształć na wielomian:
1) $(-a + 3)^2$; 2) $(-b - 5)^2$; 3) $(-4m + p)^2$; 4) $(-a - 3b)^2$.

692. Przekształć na wielomian:
1) $(-9b + 4m)^2$; 2) $(-7a - 10b)^2$; 3) $(-0{,}5m - 0{,}4p)^2$;
4) $\left(-1\frac{1}{2}x + 6y\right)^2$; 5) $(0{,}04p - 50q)^2$; 6) $(-0{,}25c - 0{,}2d)^2$.

693. Podaj w postaci wielomianu:
1) $(-3a + 5x)^2$; 2) $(-8x - 5y)^2$; 3) $(-4b - 0{,}5y)^2$;
4) $\left(8x + \frac{1}{16}y\right)^2$; 5) $(-0{,}02a - 10b)^2$; 6) $(-0{,}15m + 0{,}1n)^2$.

694. Wykonaj działanie:
1) $(a^2 - 9)^2$; 2) $(7 - y^3)^2$; 3) $(2a + c^4)^2$;
4) $(-5a + b^3)^2$; 5) $(4a^2 - 5m^3)^2$; 6) $\left(\frac{1}{3}p^4 + 9q^3\right)^2$.

695. Podnieś do kwadratu:
1) $(a^2 + 2a)^2$; 2) $\left(\frac{1}{4}m^3 - 12m\right)^2$; 3) $\left(1\frac{1}{3}p^7 + 3p^2\right)^2$;
4) $(7ab - 2b^3)^2$; 5) $\left(10p^6 + \frac{1}{2}p^4a^3\right)^2$; 6) $(0{,}2m^2n + 15m^3n^4)^2$.

696. Podaj w postaci wielomianu:
1) $(b^7 - 5)^2$; 2) $(a^3 + 2b^4)^2$; 3) $\left(8x^6 - \frac{1}{4}x^2\right)^2$;
4) $\left(6m^3 + 1\frac{1}{6}m^5\right)^2$; 5) $(7a^2 + 8ap^3)^2$; 6) $\left(\frac{1}{2}b^2m^3 - \frac{1}{3}b^3m^2\right)^2$.

697. Uprość wyrażenie:
1) $(3a - 4b)^2 - (3a + 4b)^2$; 2) $(2a + 3b)^2 + (a - 6b)^2$;
3) $a(2a - 1)^2 - 4a(a + 5)^2$; 4) $12m^2 - 3(2m - n)^2 - 12mn$.

698. Wykonaj działanie:
1) $(7a + 9b)^2 - (7a - 9b)^2$; 2) $(10a - 3b)^2 + (6a + 5b)^2$;
3) $18x^2 - 12xy - 2(3x - y)^2$; 4) $a(9a - 1)^2 - 81a(a - 2)^2$.

699. Jakie wielomiany trzeba wpisać zamiast „gwiazdki”, żeby stworzyć tożsamość:
1) $(* + 2a)^2 = b^2 + 4ab + 4a^2$; 2) $(2b - *)^2 = 4b^2 + 9 - 12b$;
3) $(3a^4 + *)^2 = * + 30a^4 + 25$; 4) $(5x^2 - *)^2 = 25x^4 - * + 9m^2$?

700. Zamień „gwiazdkę” jednomianem tak, żeby otrzymać tożsamość:
1) $(* - 7)^2 = x^2 - 14x + 49$; 2) $(4p^3 + *)^2 = * + 9 + 24p^3$.

701. Podaj wyrażenie w postaci wielomianu w postaci kanonicznej:
1) $(x - 2)(x + 1)^2$; 2) $(x + 1)(x - 5)^2$.

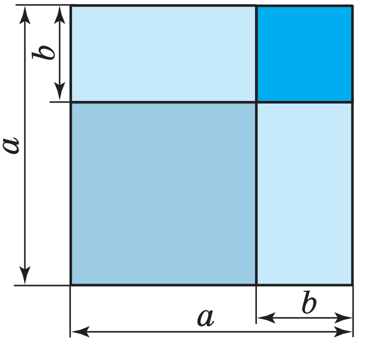
702. Udowodnij tożsamość:
1) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$;
2) $m^2 + n^2 = (m + n)^2 - 2mn$.

703. Udowodnij tożsamość:
1) $-4ab = (a - b)^2 - (a + b)^2$;
2) $(x - y)^2 + 2xy = x^2 + y^2$.

704. Rozwiąż równanie:
1) $(3x - 4)^2 - (3x + 2)^2 = -24$;
2) $(2x - 3)^2 + (1 - x)(9 + 4x) = 18$.

705. Rozwiąż równanie:
1) $x(x - 2) - (x + 5)^2 = -1$;
2) $(2y - 7)^2 + (5 - 4y)(y - 7) = 3(y - 6)$.

4 **706.** Posiłkując się rysunkiem, wytłumacz ilustrację geometryczną wzoru $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ dla $a > 0$, $b > 0$, $a > b$.



707. Uprość wyrażenie
$((((a + b)^2 - 2ab)^2 - 2a^2b^2)^2 - 2a^4b^4)^2 - 2a^8b^8$.

708. Udowodnij wzór skróconego mnożenia dla:
1) sześcianu sumy: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
2) różnicy sześcianu: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
Rozwiązanie.
1) $(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b) =$
$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

709. Podnieś do sześcianu według wzorów skróconego mnożenia:
1) $(2 + a)^3$; 2) $(2b - 1)^3$.

710. Podnieś do sześcianu:
1) $(x - 2)^3$; 2) $(1 + 2m)^3$.

Ćwiczenia powtórzeniowe

711. Znajdź wartość wyrażenia $\mathbf{993\frac{2}{7} + \left(5,4 : \frac{9}{35} - 11\frac{2}{9}\right) \cdot 2,25 - 4\frac{2}{7}}$ i dowiedz się rok rozpoczęcia budowy Soboru Sofijiwskiego w Kijowie.

712. Znajdź trzy kolejne parzyste liczby naturalne, jeżeli iloczyn dwóch mniejszych wśród nich jest o 104 mniejszy od iloczynu dwóch większych.

713. Udowodnij, że wartość wyrażenia:
1) $8^{10} - 8^9 + 8^8$ jest wielokrotnością liczby 152;
2) $15^4 - 10^4 - 5^4$ jest podzielna przez 80.

Matematyka życia

714. Na stacji jeden litr benzyny kosztuje 45 UAH. Kierowca zatankował 30 litrów benzyny i dodatkowo kupił flaszkę wody w cenie 20 UAH. Ile reszty otrzyma kierowca z 1500 UAH?

Przygotuj się do przyswojenia nowego materiału

715. Podaj w postaci kwadratu liczbę:
1) 1; 2) 9; 3) 25; 4) 64;
5) 100; 6) 121; 7) 196; 8) 900.

716. Podaj w postaci kwadratu liczbę wielomianu:
1) x^4; 2) y^8; 3) m^6; 4) p^{10};
5) $16a^2$; 6) $49b^{10}$; 7) m^2n^4; 8) $36c^2a^2$.

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

717. Udowodnij, że dla dowolnej wartości naturalnej n wartość wyrażenia $(n^2 + n)(n + 2)$ jest podzielna przez 6.

§ 17. Rozkładanie wielomianów na czynniki za pomocą wzorów na kwadrat sumy i na kwadrat różnicy

Przekształcenie trójmiany na kwadrat dwumianu

Wzory na kwadrat sumy i na kwadrat różnicy można stosować również w rozkładaniu na czynniki wyrażeń w postaci $a^2 + 2ab + b^2$ i $a^2 - 2ab + b^2$. W tym celu przepiszemy te wzory, zamieniając miejscami ich lewą i prawą stronę.

$$\boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2; \qquad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.}$$

Taką postać wzorów wygodnie stosować dla przekształcenia trójmianu na kwadrat dwumianu.

Trójmian w postaci $a^2 + 2ab + b^2$ lub $a^2 - 2ab + b^2$ nazywamy *pełnym kwadratem*. Właśnie jego można przedstawić w postaci kwadratu dwumianu.

Na przykład, $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ i $a^2 - 6a + 9 = (a - 3)^2$, dlatego trójmiany $x^2 + 4x + 4$ i $a^2 - 6a + 9$ są pełnymi kwadratami. Przekształcenie trójmianu, który jest pełnym kwadratem, w kwadrat dwumianu nazywamy *uzupełnieniem do pełnego kwadratu*.

Ponieważ $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ i $(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$, to uzupełnienie do pełnego kwadratu jest rozkładaniem trójmianu na czynniki.

Przykład 1. Rozłożyć trójmian $4x^2 + 12x + 9$ na czyniki.

Rozwiązanie. Ponieważ $4x^2 = (2x)^2$; $12x = 2 \cdot 2x \cdot 3$ i $9 = 3^2$, to trójmian $4x^2 + 12x + 9$ jest kwadratem sumy $2x + 3$, dlatego można go rozłożyć na czynniki:

$4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = (2x + 3)^2$.

Odpowiedź: $(2x + 3)^2$.

Przykład 2. Znaleźć wartość wyrażenia $x^2 + 25y^4 - 10xy^2$, jeżeli $x = 44$, $y = -3$.

Rozwiązanie. Najpierw uzupełnimy wyrażenie do pełnego kwadratu:

$x^2 + 25y^4 - 10xy^2 = x^2 - 10xy^2 + 25y^4 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5y^2 + (5y^2)^2 =$
$= (x - 5y^2)^2$.

Teraz obliczenie nie będzie trudne. Jeżeli $x = 44$, $y = -3$, to $(x - 5y^2)^2 = (44 - 5 \cdot (-3)^2)^2 = (44 - 45)^2 = (-1)^2 = 1$.

Odpowiedź: 1.

Przekształcenie trójmianu w wyrażenie, przeciwstawne kwadratowi dwumianu

Przykład 3. Przekształcić trójmian $-16a^2 + 8ab - b^2$ na wyrażenie, przeciwstawne kwadratowi dwumianu.

Rozwiązanie. Wyłączymy przed nawiasy -1, a otrzymane w nawiasach wyrażenie uzupełnimy do pełnego kwadratu:
$-16a^2 + 8ab - b^2 = -(16a^2 - 8ab + b^2) = -((4a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot b + b^2) =$
$= -(4a - b)^2$.

Odpowiedź: $-(4a - b)^2$.

Wspomnijmy, że nie każdy trójmian można przedstawić w postaci kwadratu dwumiany lub w postaci wyrażenia, przeciwstawnego kwadratowi dwumianu.

Rozwiązywanie równań

Przykład 4. Rozwiązać równanie $16x^2 - 40x + 25 = 0$.

Rozwiązanie. Otrzymujemy: $(4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 5 + 5^2 = 0$;
$(4x - 5)^2 = 0$.
Ponieważ wartość kwadratu wyrażenia wynosi zero wtedy i tylko wtedy, kiedy wartość samego wyrażenia wynosi zero, to otrzymujemy: $4x - 5 = 0$, $x = 1{,}25$.

Odpowiedź: 1,25.

? Podaj przykład trójmianu, który jest kwadratem sumy; kwadratem różnicy.

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

1

718. (*Ustnie.*) Rozłóż na czynniki:
1) $c^2 + 2cd + d^2$; 2) $x^2 - 2xy + y^2$; 3) $m^2 + 2 \cdot m \cdot 5 + 5^2$.

719. Uzupełnij wielomian do pełnego kwadratu:
1) $m^2 - 2mn + n^2$; 2) $p^2 + 2pq + q^2$; 3) $a^2 + 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2$.

720. Rozłóż trójmian na czynniki:
1) $t^2 + 2tp + p^2$; 2) $a^2 - 2ax + x^2$; 3) $b^2 + 2 \cdot b \cdot 7 + 7^2$.

2

721. Rozłóż na czynniki:
1) $a^2 - 6a + 9$; 2) $64 + 16b + b^2$; 3) $0{,}01m^2 + 0{,}2m + 1$;
4) $\frac{1}{25} - \frac{2}{5}p + p^2$; 5) $4m^2 - 12m + 9$; 6) $9c^2 + 24cd + 16d^2$.

722. Podaj wyrażenie w postaci kwadratu dwumianu:
1) $a^2 + 4a + 4$; 2) $9m^2 - 6m + 1$;

3) $b^2 - 1{,}2b + 0{,}36$; 4) $\frac{1}{49}m^2 - \frac{2}{7}m + 1$;

5) $81a^2 + 18ab + b^2$; 6) $25m^2 - 60mn + 36n^2$.

723. Oblicz w wygodny sposób:

1) $36^2 + 2 \cdot 36 \cdot 14 + 14^2$; 2) $117^2 - 2 \cdot 117 \cdot 17 + 17^2$.

724. Oblicz w wygodny sposób:

1) $87^2 + 2 \cdot 87 \cdot 13 + 13^2$; 2) $137^2 - 2 \cdot 137 \cdot 47 + 47^2$.

725. Znajdź wartość wyrażenia, po wcześniejszym uzupełnieniu go do pełnego kwadratu:

1) $a^2 - 2a + 1$, jeżeli $a = 91; -19$;

2) $4m^2 + 28m + 49$, jeżeli $m = -3{,}5; 0$;

3) $16x^2 - 40xy + 25y^2$, jeżeli $x = 5$, $y = 4$.

726. Znajdź wartość wyrażenia:

1) $a^2 + 10a + 25$, jeżeli $a = -15; 95$;

2) $0{,}01x^2 + 0{,}8x + 16$, jeżeli $x = 10; -40$;

3) $4m^2 + 28mn + 49n^2$, jeżeli $m = -3$, $n = -\frac{1}{7}$.

3 **727.** Przekształć trójmian w kwadrat dwumianu:

1) $\frac{1}{4}m^2 + 4n^2 + 2mn$; 2) $-10mn + 0{,}25m^2 + 100n^2$;

3) $9p^2 + pq + \frac{1}{36}q^2$; 4) $m^6 + 4n^2 - 4m^3n$;

5) $25m^{12} + p^6 - 10m^6p^3$; 6) $\frac{9}{64}c^6 - 3dc^5 + 16d^2c^4$.

728. Rozłóż na czynniki:

1) $\frac{1}{9}a^4 + 9b^2 + 2a^2b$; 2) $-6{,}4a^2y^4 + 0{,}16a^4 + 64y^8$;

3) $16m^{20} + n^{12} - 8m^{10}n^6$; 4) $6a^4b^2 + a^6 + 9a^2b^4$.

729. Podaj trójmian w postaci kwadratu dwumianu lub wyrażenia przeciwstawnego do kwadratu dwumianu:

1) $-1 + 4x - 4x^2$; 2) $-40a + 25a^2 + 16$;

3) $24xy - 9x^2 - 16y^2$; 4) $-140x^3y + 100x^6 + 49y^2$;

5) $4pq - 25p^2 - 0{,}16q^2$; 6) $-0{,}64m^6 - 1{,}6m^3n^2 - n^4$.

730. Podaj trójmian w postaci kwadratu dwumianu lub wyrażenia przeciwstawnego do kwadratu dwumianu:

1) $-9 - 30x - 25x^2$; 2) $-36b + 81b^2 + 4$;

3) $42xy - 49x^2 - 9y^2$; 4) $-0{,}36a^4 - 25b^6 + 6a^2b^3$.

731. Rozwiąż równanie:

1) $x^2 - 10x + 25 = 0$; 2) $64y^2 + 16y + 1 = 0$;
3) $9x^2 + 1 = -6x$; 4) $16y^2 = 56y - 49$.

732. Rozwiąż równanie:

1) $x^2 + 16x + 64 = 0$; 2) $36x^2 - 12x + 1 = 0$;
3) $4x^2 + 9 = -12x$; 4) $x^2 = 0,4x - 0,04$.

733. Napisz zamiast „gwiazdki” taki jednomian, żeby otrzymany trójmian można było przekształcić na kwadrat dwumianu:

1) $* - 2mn + n^2$; 2) $25a^2 + 20a + *$;
3) $64m^2 + * + 49b^2$; 4) $* - 12bm^3 + 9b^2$;
5) $p^2 - 0,8p^7 + *$; 6) $* + a^2b^3 + \frac{1}{4}a^4$.

734. Napisz zamiast „gwiazdki” taki jednomian, żeby otrzymany trójmian można było przekształcić na kwadrat dwumianu:

1) $* - 28x + 49$; 2) $64a^2 - 16a + *$;
3) $25a^2 + * + \frac{1}{25}b^6$; 4) $0,01a^8 + 100b^6 + *$.

735. Rozłóż wyrażenie na czynniki:

1) $(x - 2)^2 + 2(x - 2) + 1$; 2) $(a^2 + 6a + 9) + 2(a + 3) + 1$.

736. Udowodnij, że nierówność jest prawdziwa dla dowolnej wartości x:

1) $x^2 + 2 > 0$; 2) $x^2 - 6x + 9 \geqslant 0$.

4 **737.** Porównaj wartość wyrazu do zera:

1) $x^2 - 4x + 4$; 2) $-x^2 + 2x - 1$.

738. Dopisz niewpisane znaki $\leqslant$ lub $\geqslant$ taki sposób, żeby dla dowolnych wartości x nierówność była prawidłową:

1) $x^2 + 4x + 4$ ... 0; 2) $-x^2 + 30x - 225$ ... 0;
3) $-x^2 - 8x - 16$ ... 0; 4) $36 - 12x + x^2$ ... 0.

739. Udowodnij, że dla dowolnych wartości niewadomej wyrażenie $x^2 + 4x + 5$ przybiera wyłącznie wartość dodatnią. Jaką najmniejszą wartość przybiera dane wyrażenie i dla jakiej wartości x?

740. Udowodnij, że dla dowolnych wartości niewadomej wyrażenie $x^2 + 6x + 11$ przybiera wyłącznie wartość dodatnią. Jaką najmniejszą wartość przybiera dane wyrażenie i dla jakiej wartości x?

741. Zamień „gwiazdki” jednomianami w taki sposób, żeby otrzymany trójmian był pełnym kwadratem (znajdź trzy różne rozwiązania do zadania):

1) $* - 48xy + *$; 2) $* + 20ab + *$.

742. Podaj wyrażenie w postaci kwadratu dwumianu, jeżeli jest to możliwe:
1) $x^2 - 3x + 9$;
2) $49a^2 - 140ab + 100b^2$;
3) $4a^2 - 9b^2 - 12ab$;
4) $16y^2 + 8y - 1$;
5) $\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{40}xy + \frac{1}{25}y^2$;
6) $-xy + \frac{1}{16}y^2 + 4x^2$.

Ćwiczenia powtórzeniowe

743. Dla jakich wartości x:
1) Kwadrat dwumianu $x + 2$ przez 225 jest większy niż kwadrat dwumianu $x - 3$;
2) Kwadrat dwumianu $2x - 6$ jest 4 razy większy niż kwadrat dwumianu $x + 3$?

744. Uprość wyrażenie:
1) $(m - 2)(m + 3)(m - 5)$;
2) $(p^2 + 1)(p^8 - p^6 + p^4 - p^2 + 1)$.

Matematyka życia

745. W każdą środę w aptece „Bądź zdrów" działa 15-procentowa zniżnka dla emerytów. Ile pieniędzy zaoszczędzi emeryt przy zakupie leków w środę, jeżeli cena hurtowa danych leków wynosi 580 UAH?

Przygotuj się do przyswojenia nowego materiału

746. Podaj wyrażenie w postaci wielomianu:
1) $(x - 3)(x + 3)$;
2) $(y + 2)(y - 2)$;
3) $(1 + m)(1 - m)$;
4) $(4 - a)(4 + a)$.

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

747. Są piaskowe zegarki są dwóch rodzajów: pierwszym odliczają 7 min, drugim 11 min. Jak za pomocą tych zegarków odliczyć dokładnie 15 min?

§ 18. Mnożenie różnicy dwóch wyrazów przez ich sumę

Wzór na mnożenie różnicy dwóch wyrażeń przez ich sumę

Pomnożymy różnicę $a - b$ na sumę $a + b$:

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

Dlatego:

$$\mathbf{(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.}$$

Otrzymaliśmy jeszcze jeden wzór skróconego mnożenia, który czytamy następująco:

Iloczyn różnicy dwóch wyrażeń przez ich sumę równa się różnicy kwadratów tych wyrażeń.

Rozpatrzymy przykłady stosowania danego wzoru.

Przykład 1. Wykonać mnożenie:

1) $(2m - 3p)(2m + 3p)$;
2) $(4a^2 + b^3)(b^3 - 4a^2)$.

Rozwiązanie.

1) $(2m - 3p)(2m + 3p) = (2m)^2 - (3p)^2 = 4m^2 - 9p^2$ lub w skrócie: $(2m - 3p)(2m + 3p) = 4m^2 - 9p^2$.
2) $(4a^2 + b^3)(b^3 - 4a^2) = (b^3 + 4a^2)(b^3 - 4a^2) = (b^3)^2 - (4a^2)^2 = b^6 - 16a^4$.

Odpowiedź: 1) $4m^2 - 9p^2$; 2) $b^6 - 16a^4$.

Przykład 2. Podaj iloczyn $(-5m - 7a)(5m - 7a)$ w postaci wielomianu.

Rozwiązanie.

1-wszy sposób. Wyłączamy w wyrażeniu $-5m - 7a$ przed nawias liczbę -1. Otrzymamy:
$(-5m - 7a)(5m - 7a) = -1 \cdot (5m + 7a)(5m - 7a) = -((5m)^2 - (7a)^2) =$
$= -(25m^2 - 49a^2) = -25m^2 + 49a^2 = 49a^2 - 25m^2$.

2-gi sposób. W każdym z czynników zamieniamy miejscami wyrazy:
$(-5m - 7a)(5m - 7a) = (-7a - 5m)(-7a + 5m) = (-7a)^2 - (5m)^2 =$
$= 49a^2 - 25m^2$.

Odpowiedź: $49a^2 - 25m^2$.

Zastosowanie mnożenia różnicy dwóch wyrażeń przez ich sumę podczas uproszczenia wyrażeń

Przykład 3. Uprościć wyrażenie:
1) $-2m(m-5)(m+5)$; 2) $4x(x-2)-(2x+3)(2x-3)$;
3) $(b^2-2)(b^2+2)(b^4+4)$.

Rozwiązanie. 1) $-2m(m-5)(m+5) = -2m(m^2-5^2) = -2m(m^2-25) = -2m^3+50m = 50m-2m^3$.

2) $4x(x-2)-(2x+3)(2x-3) = 4x^2-8x-((2x)^2-3^2) = 4x^2-8x-4x^2+9 = 9-8x$.

3) Stosujemy dwa razy pod rząd wzór mnożenia różnicy dwóch wyrażeń przez ich sumę. Otrzymamy: $(b^2-2)(b^2+2)(b^4+4) = ((b^2)^2-2^2)\times(b^4+4) = (b^4-4)(b^4+4) = (b^4)^2-4^2 = b^8-16$.

Odpowiedź: 1) $50m-2m^3$; 2) $9-8x$; 3) b^8-16.

Zastosowanie mnożenia różnicy dwóch wyrażeń przez ich sumę podczas obliczenia wyrażeń.

Przykład 4. Oblicz w wygodny sposób $4{,}3\cdot 3{,}7$.

Rozwiązanie.
$4{,}3\cdot 3{,}7 = (4+0{,}3)(4-0{,}3) = 4^2-0{,}3^2 = 16-0{,}09 = 15{,}91$.

Odpowiedź: 15,91.

? Jakiemu wyrażeniu równa się iloczyn różnicy dwóch wyrażeń na ich kwotę? Zapisz i przeczytaj odpowiedni wzór.

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

1

748. (*Ustnie.*) Które z równości są tożsamością:
1) $(a-c)(a+c)=a^2-c^2$; 2) $(m+p)(m-p)=m^2+p^2$;
3) $(y-x)(y+x)=(y-x)^2$; 4) $(d+n)(d-n)=n^2-d^2$?

749. Dokończ zapisanie równości:
1) $(c-5)(c+5)=c^2-5^2=\ldots$;
2) $(b+7)(b-7)=b^2-7^2=\ldots$.

750. Znajdź iloczyn:
1) $(c-d)(c+d)$; 2) $(p+a)(p-a)$.

751. Wykonaj mnożenie dwumianów:
1) $(b+t)(b-t)$; 2) $(a-t)(a+t)$.

2

752. Wykonaj mnożenie:
1) $(p-9)(p+9)$; 2) $(5+x)(5-x)$;
3) $(3-c)(3+c)$; 4) $(7+y)(y-7)$.

753. Przekształć na wielomian:
1) $(m-2)(m+2)$; 2) $(7+a)(7-a)$;
3) $(4-x)(4+x)$; 4) $(11+b)(b-11)$.

754. Podaj iloczyn w postaci wielomianu:
1) $(2x-3)(2x+3)$; 2) $(3p+8)(3p-8)$;
3) $(4+5a)(5a-4)$; 4) $(3m-4p)(4p+3m)$;
5) $(7a+10b)(10b-7a)$; 6) $\left(\frac{1}{4}p-\frac{1}{7}q\right)\left(\frac{1}{7}q+\frac{1}{4}p\right)$.

755. Wykonaj mnożenie:
1) $(p-2m)(p+2m)$; 2) $(2p+7)(2p-7)$;
3) $(2c+5)(5-2c)$; 4) $(8a-0{,}3x)(0{,}3x+8a)$;
5) $(0{,}1p+q)\,(q-0{,}1p)$; 6) $\left(\frac{2}{7}a-\frac{3}{5}b\right)\left(\frac{2}{7}a+\frac{3}{5}b\right)$.

756. Wypełnij tabelę w zeszycie według wzoru:

Wyrażenie I	Wyrażenie II	Iloczyn różnicy wyrażeń I i II przez ich sumę	Różnica kwadratów wyrażeń I i II
$3a$	b	$(3a-b)(3a+b)$	$9a^2-b^2$
$5m$	$2n$		
$\frac{1}{2}x$	$3y$		
$0{,}1p$	$0{,}7q$		
$\frac{1}{7}c$	$\frac{1}{3}d$		

757. Wykonaj działania:
1) $16+(3a+4)(3a-4)$; 2) $(5m-3)(5m+3)-25m^2$.

758. Uprość wyrażenie:
1) $(8x-5)(8x+5)+25$; 2) $9m^2+(5-3m)(5+3m)$;
3) $(2b-3)(3+2b)-4b^2$; 4) $(4a+7)(7-4a)-49$.

759. Rozwiąż równanie:
1) $3x=(2x-3)(2x+3)-4x^2$; 2) $9x^2+(8-3x)(8+3x)=4x$.

760. Znajdź pierwiastki równania:
1) $8x=(5x-4)(5x+4)-25x^2$;
2) $(9-4x)(9+4x)+16x^2=3x$.

761. Oblicz w wygodny sposób:
1) $(40-1)(40+1)$; 2) $81\cdot 79$; 3) $1002\cdot 998$; 4) $1{,}03\cdot 0{,}97$.

762. Znajdź wartość wyrażenia w wygodny sposób:
1) $(80 + 2)(80 - 2)$; 2) $59 \cdot 61$; 3) $108 \cdot 92$; 4) $12{,}3 \cdot 11{,}7$.

763. Podaj iloczyn w postaci wielomianu:
1) $(p^2 + 3q)(3q - p^2)$; 2) $(2a - m^3)(m^3 + 2a)$;
3) $(5a - b^2)(b^2 + 5a)$; 4) $(0{,}7m + n^2)(0{,}7m - n^2)$;
5) $(4t^2 - p^4)(4t^2 + p^4)$; 6) $(3a^3 - 4b^4)(4b^4 + 3a^3)$.

764. Wykonaj mnożenie:
1) $(1{,}7a - 1{,}4p^3)(1{,}4p^3 + 1{,}7a)$; 2) $\left(3a^2 - \frac{1}{4}b^3\right)\left(\frac{1}{4}b^3 + 3a^2\right)$;
3) $\left(5m^2n + \frac{1}{7}p^3\right)\left(\frac{1}{7}p^3 - 5m^2n\right)$;
4) $\left(\frac{2}{3}a^7 + 1{,}2y^8\right)\left(1{,}2y^8 - \frac{2}{3}a^7\right)$.

765. Wykonaj mnożenie:
1) $(5a + b^2)(b^2 - 5a)$; 2) $(4a^3 - d^2)(d^2 + 4a^3)$;
3) $(0{,}7p - m^7)(m^7 + 0{,}7p)$; 4) $\left(\frac{1}{5}m^2 + 3b^7\right)\left(3b^7 - \frac{1}{5}m^2\right)$;
5) $(0{,}2a^2b - 0{,}3ab^2)(0{,}2a^2b + 0{,}3ab^2)$;
6) $\left(1{,}2p^7 - \frac{2}{3}a^8\right)\left(\frac{2}{3}a^8 + 1{,}2p^7\right)$.

766. Podaj w postaci wielomianu:
1) $(-a^2 + 7)(7 + a^2)$; 2) $(-p^2 - q^7)(p^2 - q^7)$;
3) $(-8m - 5p)(-8m + 5p)$; 4) $(-2a^3 - 3b)(-3b + 2a^3)$.

767. Uprość wyrażenie:
1) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$; 2) $(2a + x)(4a^2 + x^2)(2a - x)$;
3) $(c^3 + d^2)(c^3 - d^2)(d^4 + c^6)$;
4) $(-x - y)(x - y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$.

768. Przekształć na wielomian:
1) $(-a^7 + b^5)(a^7 + b^5)$; 2) $(-0{,}1m^3 - p^4)(0{,}1m^3 - p^4)$;
3) $(3x - 2p)(3x + 2p)(9x^2 + 4p^2)$;
4) $(-a^2 - 5b^3)(a^2 - 5b^3)(a^4 + 25b^6)$.

769. Zamiast „gwiazdek” napisz takie wielomiany, aby utworzyć tożsamość:
1) $(2a + *)(2a - *) = 4a^2 - 49b^2$;
2) $(* - 9p)(* + 9p) = 0{,}25m^4 - 81p^2$;
3) $100a^8 - 9b^6 = (* + 10a^4)(10a^4 - *)$;
4) $(4x - 3y)(* + *) = 16x^2 - 9y^2$.

770. Znajdź pierwiastki równania:

1) $8x(1 + 2x) - (4x + 1)(4x - 1) = 17$;
2) $x - 12x(1 - 3x) = 14 - (5 - 6x)(6x + 5)$;
3) $(4x + 1)(4x - 1) + (2x - 3)^2 = 5x(4x - 11)$.

771. Rozwiąż równania:

1) $5x(4x - 1) - (6x - 1)(6x + 1) = (4x + 3)(3 - 4x)$;
2) $(3x - 4)(3x + 4) - (5x - 2)(5x + 2) = 2x(1 - 8x)$;
3) $(5x - 4)^2 - 2x(8x - 5) = (3x - 2)(3x + 2)$.

772. Uprość wyrażenie:

1) $(a + 3)^2 - (a + 3)(a - 3)$;
2) $(8x - 3y)(8x + 3y) - (3x - 8y)^2$;
3) $(b - 3)^2(b + 3)^2$;
4) $(a + 5)^2(5 - a)^2$.

773. Uprość wyrażenie:

1) $(c - 2)^2 - (c - 3)(c + 3)$;
2) $(9x - 2y)(9x + 2y) - (5x - 2y)^2$;
3) $(a + 6)^2(a - 6)^2$;
4) $(2 - m)^2(m + 2)^2$.

4 **774.** Udowodnij, że kwadrat dowolnej liczby całkowitej zawsze jest o jednostkę większy niż iloczyn poprzedniej do niej i następnej za nim liczb.

775. Wykonaj mnożenie stosując wzory skróconego mnożenia:

1) $((x + y) + 1)((x + y) - 1)$;
2) $(a + b + c)(a - (b + c))$;
3) $(m + n + 2p)(m + n - 2p)$;
4) $(x - y - 2)(x + y + 2)$.

Ćwiczenia powtórzeniowe

776. Oblicz: $2,7 \cdot \left(8\frac{7}{12} - 2\frac{17}{36}\right) - 4\frac{1}{3} : 0,65$.

777. Żeby zaasfaltować pewien odcinek drogi w ciągu określonego czas, ekipa drogowców musiała co godzinę asfaltować po 15 m^2. Natomiast oni asfaltowali co godzinę o 3 m^2 więcej, dlatego na 2 godziny przed terminem zostało im zaasfaltować 12 m^2. Jaka była powierzchnia odcinka i ile godzin musieli ją asfaltować?

Matematyka życia

778. Kiedy ukraińcy obliczają koszy cenowy barszczu, czyli cenę zestawu produktów do przygotowania 5 l klasycznej ukraińskiej potrawy, to robią to według jednego z wielu przepisów (patrz rys.). Tak więc, w 2019 roku taki zestaw kosztował średnio 74,4 UAH, podczas gdy minimalna pensja na Ukrainie wynosiła 4173 UAH. W 2023 roku wspomniany zestaw kosztował średnio 99,2 UAH, podczas gdy minimalna pensja wynosiła 6700 UAH. Ile baniaków barszczu można by było ugotować na minimalną pensję w 2023 roku? Wyciągnij wnioski.

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

779. Niech a_1; a_2; a_3 – liczby naturalne, b_1; b_2; b_3 – te same liczby, zapisane w innej kolejności. Udowodnij, że iloczyn $|a_1 - b_1| \cdot |a_2 - b_2| \cdot |a_3 - b_3|$ jest liczbą parzystą.

§ 19. Rozkładanie na czynniki różnicy kwadratów dwóch wyrażeń

Wzór na różnicę kwadratów

W tożsamości $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ zamienimy miejscami lewą i prawą stronę. Otrzymamy:

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).}$$

Daną tożsamość nazywamy ***wzorem na różnicę kwadratów*** dwóch wyrażeń i czytamy następująco:

różnica kwadratów dwóch wyrażeń jest równa iloczynowi różnicy tych wyrażeń przez ich sumę.

Wzór na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń stosujemy dla rozkładania dwumianu $a^2 - b^2$ na czynniki. Dany wzór można wykorzystywać również dla rozkładania na czynniki różnicy kwadratów dowolnych dwóch wyrażeń.

Przykład 1. Rozłożyć na czynniki:

1) $16 - x^2$; 2) $49m^4 - 64p^6$.

Rozwiązanie. 1) Ponieważ $16 = 4^2$, to według wzoru na różnicę kwadratów: $16 - x^2 = 4^2 - x^2 = (4 - x)(4 + x)$.

2) Ponieważ $49m^4 = (7m^2)^2$, a $64p^6 = (8p^3)^2$, otrzymujemy:

$49m^4 - 64p^6 = (7m^2)^2 - (8p^3)^2 = (7m^2 - 8p^3)(7m^2 + 8p^3)$.

Odpowiedź: 1) $(4 - x)(4 + x)$; 2) $(7m^2 - 8p^3)(7m^2 + 8p^3)$.

Przykład 2. Rozłożyć na czynniki $25x^2 - (1 - 2x)^2$.

Rozwiązanie. $25x^2 - (1 - 2x)^2 = (5x)^2 - (1 - 2x)^2 = (5x - (1 - 2x)) \times$
$\times (5x + (1 - 2x)) = (5x - 1 + 2x)(5x + 1 - 2x) = (7x - 1)(3x + 1)$.

Odpowiedź: $(7x - 1)(3x + 1)$.

Obliczenie wartości wyrażeń za pomocą wzoru na różnicę kwadratów

Przykład 3. Obliczyć $105^2 - 95^2$ w wygodny sposób.

Rozwiązanie.

$$105^2 - 95^2 = (105 - 95)(105 + 95) = 10 \cdot 200 = 2000.$$

Odpowiedź: 2000.

Rozwiązywanie równań z wykorzystaniem wzoru na różnicę kwadratów

Przykład 4. Rozwiązać równanie $x^2 - 25 = 0$.

Rozwiązanie. Ponieważ $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$, otrzymujemy:

$$x^2 - 25 = 0;$$
$$(x - 5)(x + 5) = 0;$$
$$x - 5 = 0 \quad \text{albo} \quad x + 5 = 0;$$
$$\text{więc, } x = 5 \text{ albo } x = -5.$$

Odpowiedź: -5; 5.

? Przeczytaj i zapamiętaj wzór na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń.

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

1

780. (*Ustnie.*) Jakie z równości są tożsamościami:

1) $c^2 - d^2 = (c - d)(c - d)$; 2) $p^2 - t^2 = (p + t)(p - t)$;
3) $a^2 + b^2 = (a + b)(a + b)$; 4) $3^2 - b^2 = (3 - b)(3 + b)$?

781. Dopasuj zamiast luk taki dwumian, żeby równość przekształciła się na tożsamość:
1) $a^2 - 1 = (a - 1)(\ldots)$; 2) $4 - m^2 = (\ldots)(2 + m)$.

782. Dopasuj zamiast luk takie wyrażenie, żeby równość przekształciła się na tożsamość:
1) $p^2 - 1 = (\ldots)(p + 1)$; 2) $9 - c^2 = (3 - c)(\ldots)$.

2 **783.** (*Ustnie.*) Rozłóż na czynniki:
1) $a^2 - 4$; 2) $36 - b^2$; 3) $4x^2 - 25m^2$; 4) $x^2y^2 - 1$.

784. Podaj wielomian w postaci iloczynu różnicy i sumy:
1) $a^2 - 25$; 2) $16 - p^2$; 3) $d^2 - 1{,}44$;
4) $0{,}09 - m^2$; 5) $b^2 - \frac{4}{9}$; 6) $\frac{25}{36} - c^2$.

785. Rozłóż na czynniki:
1) $36a^2 - b^2$; 2) $-a^2 + b^2$; 3) $49x^2 - 64$;
4) $9m^2 - 16n^2$; 5) $-100m^2 + 121k^2$; 6) $0{,}25 - a^2b^2$;
7) $16m^2a^2 - 0{,}01$; 8) $p^2 - c^2d^2$; 9) $81p^2m^2 - n^2$.

786. Podaj wielomian w postaci iloczynu różnicy i sumy:
1) $a^2 - 64$; 2) $0{,}25 - b^2$; 3) $-81 + 36x^2$;
4) $169p^2 - q^2$; 5) $400a^2 - 25m^2$; 6) $49a^2b^2 - 16$;
7) $900 - a^2b^2$; 8) $c^2d^2 - 4m^2$; 9) $100a^2b^2 - 0{,}16m^2$.

787. Oblicz stosując wzór na różnicę kwadratów:
1) $67^2 - 57^2$; 2) $43^2 - 53^2$; 3) $112^2 - 88^2$;
4) $21{,}5^2 - 21{,}4^2$; 5) $0{,}725^2 - 0{,}275^2$; 6) $\left(5\frac{2}{3}\right)^2 - \left(4\frac{1}{3}\right)^2$.

788. Oblicz w wygodny sposób:
1) $43^2 - 33^2$; 2) $27^2 - 37^2$; 3) $0{,}97^2 - 0{,}03^2$.

789. Znajdź wartość wyrażenia $x^2 - y^2$, jeżeli
1) $x = 55$; $y = 45$; 2) $x = 2{,}01$; $y = 1{,}99$.

790. Rozwiąż równanie:
1) $x^2 - 16 = 0$; 2) $\frac{1}{9} - x^2 = 0$;
3) $y^2 - 0{,}25 = 0$; 4) $4x^2 - 9 = 0$.

791. Znajdź pierwiastki równania:
1) $x^2 - 36 = 0$; 2) $y^2 - \frac{1}{16} = 0$;
3) $0{,}49 - x^2 = 0$; 4) $64y^2 - 49 = 0$.

3

792. Rozłóż na czynniki:

1) $c^4 - m^6$; 2) $p^8 - a^{10}$; 3) $a^6 - 9m^4$;
4) $100a^6 - 25x^8$; 5) $0{,}49 - m^4p^{12}$; 6) $36x^2c^{14} - 0{,}16d^4$;
7) $\frac{25}{49}a^8 - \frac{36}{49}b^6c^2$; 8) $-0{,}01m^2 + 0{,}81x^6y^8$;
9) $1\frac{7}{9}t^{20}a^{24} - 1\frac{11}{25}p^{16}q^{18}$.

793. Rozłóż na czynniki:

1) $a^8 - 16m^6$; 2) $36c^6 - 49a^{10}$;
3) $0{,}25 - m^{12}a^2$; 4) $-121p^8c^4 + 4a^2$;
5) $-\frac{25}{36}a^2b^4 + \frac{36}{49}c^6$; 6) $2\frac{1}{4}a^2b^8 - 1\frac{9}{16}p^6c^{18}$.

794. Znajdź wartość wyrażenia:

1) $\frac{100}{15^2 - 10^2}$; 2) $\frac{29^2 - 21^2}{80}$; 3) $\frac{47^2 - 23^2}{48^2 - 22^2}$.

795. Podaj wyrażenie w postaci iloczynu:

1) $(x + 2)^2 - 1$; 2) $4 - (y + 3)^2$;
3) $(4m - 5)^2 - 16$; 4) $6{,}25 - (a - 3{,}5)^2$;
5) $(2x - 5)^2 - 49$; 6) $1 - (2x + 1)^2$.

796. Rozłóż na czynniki:

1) $16x^2 - (1 + 3x)^2$; 2) $(3y - 5)^2 - 16y^2$;
3) $49m^2 - (a + 3m)^2$; 4) $(5a - 2b)^2 - 25a^2$.

797. Rozłóż na czynniki:

1) $(p + 2)^2 - 9$; 2) $16 - (m - 3)^2$;
3) $(3x - 2)^2 - 36$; 4) $x^2 - (2x - 1)^2$;
5) $(5a - 3b)^2 - 9b^2$; 6) $(3x + 4y)^2 - 100y^2$.

798. Znajdź pierwiastki równania:

1) $(x - 1)^2 - 25 = 0$; 2) $49 - (2x + 5)^2 = 0$;
3) $(5x + 3)^2 = 64$; 4) $(0{,}1x - 0{,}5)^2 = 0{,}36$.

799. Rozwiąż równania:

1) $(x + 2)^2 - 36 = 0$; 2) $(5x - 4)^2 - 81 = 0$;
3) $(2x + 7)^2 = 49$; 4) $(0{,}2x - 0{,}5)^2 = 0{,}09$.

800. Udowodnij, że dla dowolnej wartości naturalnej n wartość wyrażenia $(n + 7)^2 - n^2$ jest podzielne przez 7.

4

801. Podaj wyrażenie w postaci iloczynu:

1) $a^6 - (b - 5a^3)^2$; 2) $(-3m^2 + 4p)^2 - 9m^4$;
3) $(7x + 2y)^2 - (2x - 7y)^2$; 4) $(a + b + c)^2 - (a + b - c)^2$;
5) $a^2(a + 1)^2 - c^8$; 6) $(5a - b - 1)^2 - (5a + b - 1)^2$.

802. Rozłóż na czynniki:
1) $(5a^2 - 3b)^2 - 16a^4$; 2) $m^8 - (3c - 2m^4)^2$;
3) $(2a + 3b)^2 - (4a - 5b)^2$; 4) $(x - y + t)^2 - (x - y - t)^2$.

803. Rozwiąż równania:
1) $(3x - 4)^2 - (5x - 8)^2 = 0$; 2) $x^4 - 81 = 0$;
3) $16x^4 - 1 = 0$; 4) $81x^2 + 4 = 0$.

804. Udowodnij, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb całkowitych, gdzie zmniejszającą jest większa liczba, jest równa sumie tych liczb.

Ćwiczenia powtórzeniowe

805. Uprość wyrażenie:
1) $(t + 1)(t - 7) - (t - 1)(t + 7)$;
2) $(a^3 - 2b)(a^2 + 2b) - (a^2 - 2b)(a^3 + 2b)$.

806. Oblicz stosując wzór sześcianu dwumianu:
1) $(100 - 1)^3$; 2) 41^3; 3) 29^3; 4) $0{,}99^3$.

Matematyka życia

807. Statek płynie z prędkością 11 węzłów. Rowerzysta pokonuje 100 m za 18 s. Porównaj prędkość statku i rowerzysty, Zwróć uwagę na rysunek.

Przygotuj się do przyswojenia nowego materiału

808. Podaj w postaci sześcianu liczbę:
1) 1; 2) 27; 3) 64; 4) 216.

809. Podaj w postaci sześcianu jednomian:
1) x^6; 2) $8y^3$; 3) $1000m^{12}$; 4) $125p^3c^9$.

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

810. Gospodyni ma wagę odważnikową i odważnik o masie 100 g. Jak gospodyni za 4 ważenia odmierzyć 1,5 kg kaszy?


§ 20. Suma i różnica sześcianów

Wzór na sumę sześcianów

Pomnożymy $a + b$ na $a^2 - ab + b^2$:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + ba^2 - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

Otrzymamy tożsamość, którą nazywamy ***wzorem na sumę sześcianów***:

$$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).}$$

W prawej stronie wzoru czynnik $a^2 - ab + b^2$ przypomina pełny kwadrat $a^2 - 2ab + b^2$, ale zamiast podwójnego iloczynu $2ab$ zawiera ab. Trójmian $a^2 - ab + b^2$ nazywamy ***niepełnym kwadratem różnicy*** wyrażeń a i b. Dlatego wzór na sumę sześcianów czytamy następująco:

suma sześcianów dwóch wyrażeń równa się iloczynowi sumy tych wyrażeń przez niepełny kwadrat ich różnicy.

Przykład 1. Rozłożyć wielomain $x^3 + 64$ na czynniki.

Rozwiązanie. Ponieważ $64 = 4^3$, to dany wielomian można przedstawić w postaci sumy sześcianów dwóch wyrażeń:

$$x^3 + 64 = x^3 + 4^3.$$

Według wzoru na sumę sześcianów otrzymamy

$$x^3 + 4^3 = (x + 4)(x^2 - 4x + 4^2) = (x + 4)(x^2 - 4x + 16).$$

Odpowiedź: $(x + 4)(x^2 - 4x + 16)$.

Wzór na różnicę sześcianów

Teraz pomnożymy $a - b$ na $a^2 + ab + b^2$:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3.$$

Otrzymamy tożsamość, którą nazywamy ***wzorem na różnicę sześcianów***:

$$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).}$$

Trójmian $a^2 + ab + b^2$ nazywamy ***niepełnym kwadratem sumy*** wyrażeń a i b, a wzór na różnicę sześcianów czytamy następująco:

różnica sześcianów dwóch wyrażeń równa się iloczynowi różnicy tych wyrażeń na niepełny kwadrat ich sumy.

Przykład 2. Rozłożyć wielomian $27a^3 - m^6$ na czynniki.

Rozwiązanie. Ponieważ $27a^3 = (3a)^3$ i $m^6 = (m^2)^3$, to dany wielomian można przekształcić na różnicę sześcianów:

$$27a^3 - m^6 = (3a)^3 - (m^2)^3.$$

Dalej stosujemy wzór na różnicę sześcianów:

$(3a)^3 - (m^2)^3 = (3a - m^2)((3a)^2 + 3am^2 + (m^2)^2) = (3a - m^2) \times \times (9a^2 + 3am^2 + m^4)$.

Odpowiedź: $(3a - m^2)(9a^2 + 3am^2 + m^4)$.

Przykład 3. *Podać wyrażenie* $(p - 2)^3 - 1$ *w postaci iloczynu.*

Rozwiązanie. $(p - 2)^3 - 1 = (p - 2)^3 - 1^3 = (p - 2 - 1)((p - 2)^2 + + (p - 2) \cdot 1 + 1^2) = (p - 3)(p^2 - 4p + 4 + p - 2 + 1) = (p - 3) \times \times (p^2 - 3p + 3)$.

Odpowiedź: $(p - 3)(p^2 - 3p + 3)$.

Mnożenie sumy dwóch wyrażeń przez niepełny kwadrat ich różnicy i różnicy dwóch wyrażeń przez niepełny kwadrat ich sumy

Zamieniając miejscami lewą i prawą strony wzoru na sumę i różnicę sześcianów otrzymamy:

$$\boldsymbol{(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3,}$$
$$\boldsymbol{(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.}$$

Dane tożsamości są wzorami skróconego mnożenia i dają możliwość w skrócony sposób wykonywać mnożenie sumy dwóch wyrażeń przez niepełmny kwadrat ich różnicy i różnicy dwóch wyrażeń przez niepełny kwadrat ich sumy.

Iloczyn sumy dwóch wyrażeń przez niepełny kwadrach ich różnicy równa się sumie sześcianów danych wyrażeń. Iloczyn różnicy dwóch wyrażeń przez niepełny kwadrat ich sumy równa się różnicy sześcianów danych wyrażeń.

Przykład 4. Przekształcić wyrażenie $(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$ na wielomian.

Rozwiązanie. Ponieważ wyrażenie $x^2 - 2xy + 4y^2$ jest niepełnym kwadratem wyrażeń x i $2y$, wtedy możemy zastosować wzór na sumę sześcianów:

$$(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = x^3 + (2y)^3 = x^3 + 8y^3.$$

Odpowiedź: $x^3 + 8y^3$.

Przykład 5. Rozwiązać równanie:

$$(5x - 1)(25x^2 + 5x + 1) = 125x^3 - 8x.$$

Rozwiązanie. Zastosujemy do lewej strony równania wzór na różnicę sześcianów, otrzymamy: $(5x)^3 - 1^3 = 125x^3 - 8x;$

$$125x^3 - 1 = 125x^3 - 8x;$$
$$125x^3 - 125x^3 + 8x = 1;$$
$$8x = 1;$$
$$x = 0{,}125.$$

Odpwiedź: 0,125.

Zapamiętaj wzór na sumę sześcianów. Zapamiętaj wzór na różnicę sześcianów. Jakie wyrażenie jest tożsamościowo równe iloczynowi sumy dwóch wyrażeń przez niepełny kwadrat ich różnicy? A iloraz różnicy dwóch wyrażeń przez niepełny kwadrat ich sumy?

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

1

811. (*Ustnie.*) Które z wyrażeń jest niepełnym kwadratem różnicy wyrażeń x i y, a które niepełnym kwadratem ich sumy:
1) $x^2 + xy + y^2$; 2) $x^2 - 2xy + y^2$; 3) $x^2 - xy - y^2$;
4) $x^2 + 2xy + y^2$; 5) $x^2 - xy + y^2$; 6) $x^2 + 4xy + y^2$?

812. (*Ustnie.*) Które z równości jest tożsamością:
1) $c^3 + d^3 = (c^2 + d^2)(c + d)$;
2) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$;
3) $m^3 + n^3 = (m + n)(m^2 - mn + n^2)$;
4) $p^3 - t^3 = (p - t)(p^2 + 2pt + t^2)$?

813. Wśród równości wybierz te, które są tożsamościami:
1) $m^3 - p^3 = (m^2 - p^2)(m - p)$;
2) $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - xa + a^2)$;
3) $c^3 - d^3 = (c - d)(c^2 + cd + d^2)$;
4) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - 2xy + y^2)$.

2

814. Rozłóż na czynniki:
1) $m^3 - p^3$; 2) $a^3 + d^3$; 3) $8 - a^3$;
4) $q^3 + 27$; 5) $n^3 - 64$; 6) $0{,}001 + t^3$.

815. Podaj wyrażenie w postaci sumy lub różnicy sześcianów i rozłóż je na czynniki:

1) $8a^3 + 1$; 2) $27 - \frac{1}{27}c^3$; 3) $y^3 + 64x^3$;

4) $0{,}125b^3 - 64y^3$; 5) $1 + 1000m^3$; 6) $\frac{1}{125}a^3 - \frac{1}{216}b^3$.

816. Rozłóż na czynniki:

1) $\frac{1}{27} + b^3$; 2) $\frac{1}{8}x^3 - 8$; 3) $1 + 125p^3$;

4) $0{,}064m^3 - \frac{1}{1000}n^3$; 5) $\frac{27}{8}a^3 + \frac{8}{27}b^3$; 6) $216p^3 - \frac{1}{216}q^3$.

817. Podaj w postaci wielomianu:

1) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$; 2) $(a + 3)(a^2 - 3a + 9)$;
3) $(1 - d + d^2)(1 + d)$; 4) $(m - 2)(m^2 + 2m + 4)$.

818. Przekształć wyrażenie na wielomian:

1) $(m + n)(m^2 - mn + n^2)$; 2) $(m - 1)(m^2 + m + 1)$;
3) $(b + 4)(b^2 - 4b + 16)$; 4) $(25 + 5q + q^2)(5 - q)$.

819. Znajdź wartość wyrażenia:

1) $(4p - 1)(16p^2 + 4p + 1)$, jeżeli $p = -0{,}25$;

2) $(2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2)$, jeżeli $a = -\frac{1}{2}$; $b = 2$.

820. Znajdź wartość wyrażenia:

1) $(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1)$, jeżeli $x = \frac{2}{3}$;

2) $(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$, jeżeli $x = -2$; $y = 0{,}5$.

3 **821.** Rozłóż wielomian na czynniki:

1) $a^3 - b^6$; 2) $t^{12} + c^9$; 3) $p^{18} + m^{24}$;

4) $-c^3 + m^{15}$; 5) $-\frac{1}{8} - a^{24}$; 6) $-c^{99} - d^{60}$;

7) $x^3y^3 + 1$; 8) $27 - a^3b^9$; 9) $x^6y^{12} + m^{27}$;

10) $64m^6p^{21} - 125x^3$; 11) $\frac{1}{27}c^{24}m^{18} + 27t^9$;

12) $343a^{18}b^{33} - 0{,}001c^{36}$.

822. Zapisz wyrażenie jako iloczyn:

1) $x^9 - y^6$; 2) $-p^{12} - 27$;
3) $-a^9b^6 + 1$; 4) $216p^{15} + 0{,}008t^{18}$;
5) $64m^{21}c^3 - p^{30}$; 6) $512t^{24}p^{27} - 729a^{33}$.

823. Wykonaj mnożenie:

1) $(b^3 - d^2)(b^6 + b^3d^2 + d^4)$;
2) $(c^3 + 2p)(c^6 - 2pc^3 + 4p^2)$;
3) $(9x^2 + 3xy + y^2)(3x - y)$;
4) $(4c + 3d)(16c^2 - 12cd + 9d^2)$;
5) $(a^8 - 4a^4 + 16)(a^4 + 4)$;
6) $(5m^2 - 6p^3)(25m^4 + 30m^2p^3 + 36p^6)$.

824. Podaj w postaci wielomianu:
1) $(a^5 - m^2)(a^{10} + a^5m^2 + m^4)$;
2) $(25a^2 - 5ab + b^2)(5a + b)$;
3) $(2x - 7y^2)(4x^2 + 14xy^2 + 49y^4)$;
4) $(3p^2 + 4c^3)(9p^4 - 12p^2c^3 + 16c^6)$.

825. Wykonaj działania:
1) $(a + 2)(a^2 - 2a + 4) - a(a^2 - 5)$;
2) $(b - 3)(b^2 + 3b + 9) - b(b - 3)(b + 3)$;
3) $(x + 4)(x^2 - 4x + 16) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$;
4) $(2b^2 - 1)(4b^4 + 2b^2 + 1) - (2b^3 + 1)^2$.

826. Uprość wyrażenie:
1) $(a - 4)(a^2 + 4a + 16) - a(a - 2)(a + 2)$;
2) $(x^2 + 3)(x^4 - 3x^2 + 9) - (x^2 - 2)(x^4 + 2x^2 + 4)$;
3) $b(b - 1)^2 - (b - 5)(b^2 + 5b + 25)$;
4) $(a - 1)(a^2 + a + 1)(a + 1)(a^2 - a + 1)$.

827. Znajdź wartość wyrażenia:
1) $(2a + 1)(4a^2 - 2a + 1) - 7a^3$, jeżeli $a = -2$;
2) $(x^2 + 5xy + 25y^2)(x - 5y) + 25y^3 - x^3$, jeżeli $x = -2024$, $y = 0{,}1$.

828. Rozwiąż równania:
1) $(x - 4)(x^2 + 4x + 16) = x^3 - 8x$;
2) $(x^3 + 1)(x^6 - x^3 + 1) = x^9 - 5x$;
3) $(9x^2 - 6x + 4)(3x + 2) = 3x(3x + 4)(3x - 4) + 32$;
4) $8\left(\frac{1}{2}x - 2\right)\left(\frac{1}{4}x^2 + x + 4\right) - x(x - 3)^2 = 6x^2 - 46$.

829. Rozwiąż równania:
1) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 24x + x^3$;
2) $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) = 2x(2x - 3)(2x + 3) + 37$.

4 **830.** Rozłóż na czynniki:
1) $(a + 3)^3 - a^3$;
2) $(x - 4)^3 + 8$;
3) $27p^3 - (p + 1)^3$;
4) $64x^3 + (x - 1)^3$.

831. Rozłóż na czynniki:
1) $(a + 1)^3 + a^3$;
2) $(b - 2)^3 - 8$;
3) $125b^3 - (b - 1)^3$;
4) $64a^3 + (a + 2)^3$.

832. Udowodnij, że dwie ostatnie cyfry wartości wyrażenie $415^3 + 85^3$ są zerami.

833. *Czy liczba* $115^3 - 15^3$ *jest podzielna przez* 100?

834. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{57^3 - 43^3}{14} + 57 \cdot 43$ w dogodny sposób.

Ćwiczenia powtórzeniowe

835. Udowodnij, że różnica naturalnej trzycyfrowej liczby naturalnej i liczby zapisanej tymi samymi cyframi w odwrotnej kolejności, jest podzielna przez 11.

836. W jednym opakowaniu było 90 zeszytów, a w drugim 30. Kiedy z pierwszego wzięto dwa razy więcej zeszytów niż z drugiego, to w pierwszym opakowaniu zostało 5 razy więcej zeszytów niż w drugim. Po ile zeszytów zostało w każdym opakowaniu?

Matematyka życia

837. U Marii jest karta rabatowa księgarni „Olimp” dzięki której klient otrzymuję zniżkę w wysokości 12 % ceny zakupu. Ile Maria zapłaci za książkę, cena której 150 UAH, jeżeli skorzysta z karty rabatowej?

Przygotuj się do przyswojenia nowego materiału

838. Różłóż wielomian na czynniki:

1) $a^3 + a^2$; 2) $3c^5 - 15c^2$; 3) $x^2 + 6x + 9$;

4) $9x^2 - 6x + 1$; 5) $0,81 - y^2$; 6) $0,25a^2 - \frac{9}{16}b^2$.

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

839. *Z ukraińskiego folkloru.* Kobieta sprzedawała kury na bazarze. Pierwszemu klientowi ona sprzedała połowę wszystkich kur i jeszcze pół kurczaka. Drugiemu – połowę z tego, co pozostało i jeszcze pół kurczaka. Trzeciemu – połowę tego, co pozostało i jeszcze pół kurczaka. Później okazało się, że wszystkie kury sprzedano i zadowolona kobieta wróciła do domu. Ile kur ona przywiozła na sprzedaż?

§ 21. Zastosowanie kilku metod rozkładania wielomianów na czynniki

Przykłady rozkładania wielomianów na czynniki z zastosowaniem dwóch kolejnych metod

W poprzednich paragrafach już rozpatrzyliśmy kilka metod rozkładania wielomianów na czynniki: wyłączenie wspólnego czynnika przed nawiasy, grupowanie, zastosowanie wzorów skróconego mnożenia.

Czasem w celu rozłożenia na czynniki trzeba zastosować kilka metod. Dlatego rozkładanie należy zaczynać z wyłączenia wspólnego czynnika przed nawiasy, jeżeli taki czynnik istnieje.

Rozpatrzymy kilka przykładów.

Przykład 1. Rozłożyć na czynniki wielomian $5m^4 - 20m^2n^2$.

Rozwiązanie. Najpierw wyłączymy wspólny czynnik $5m^2$: przed nawiasy:
$5m^4 - 20m^2n^2 = 5m^2(m^2 - 4n^2)$.
Teraz do wyrażenia w nawiasach zastosujemy wzór na różnicę kwadratów:

$$5m^2(m^2 - 4n^2) = 5m^2(m - 2n)(m + 2n).$$

Odpowiedź: $5m^2(m - 2n)(m + 2n)$.

Przykład 2. Rozłożyć na czynniki wielomian

$$2x^4 + 12x^3 + 18x^2.$$

Rozwiązanie. Wyłączymy przed nawiasy wspólny czynnik $2x^2$, a wyrażenie w nawiasach uzupełnimy do pełnego kwadratu:

$$2x^4 + 12x^3 + 18x^2 = 2x^2(x^2 + 6x + 9) = 2x^2(x + 3)^2.$$

Odpowiedź: $2x^2(x + 3)^2$.

Przykład 3. Rozłożyć na czynniki wielomian

$$a^3b^2 - 3a^3b + 5a^2b^2 - 15a^2b.$$

Rozwiązanie. Wyłączymy wspólny czynnik a^2b przed nawiasy, otrzymamy:

$$a^3b^2 - 3a^3b + 5a^2b^2 - 15a^2b = a^2b(ab - 3a + 5b - 15).$$

Wielomian $ab - 3a + 5b - 15$, który utworzył się w nawiasach, można rozłożyć na czynniki metodą grupowania:
$ab - 3a + 5b - 15 = (ab - 3a) + (5b - 15) = a\underline{(b - 3)} + 5\underline{(b - 3)} = (b - 3)(a + 5)$.
Ostatecznie otrzymamy: $a^3b^2 - 3a^3b + 5a^2b^2 - 15a^2b = a^2b(b - 3)(a + 5)$.

Odpowiedź: $a^2b(b - 3)(a + 5)$.

Uniwersalnej zasady do rozkładania wielomianów na czynniki nie istnieje. Przykłady, które my rozpatrzyliśmy wyżej, dają możliwość jedynie sformułować *zasadę, którą można się kierować*, i którą należy przestrzegać przy rozkładaniu wielomianów na czynniki.

1) Jeżeli jest to możliwe, wyłączyć wspólny mnożnika przed nawiasy.
2) Sprawdzić, czy wyrażenie otrzymane w nawiasach, nie jest kwadratem dwumianu lub różnicą kwadratów, różnicą lub sumą sześcianów.
3) Jeżeli wielomian, otrzymany w nawiasach, zawiera cztery lub sześć składników, sprawdzić, czy wielomian nie rozkłada się na czynniki metodą grupowania.

Sztuczne techniki rozkładania wielomianów na czynniki

Oprócz zaproponowanej zasady, czasami pomagają sztuczne techniki. Rozpatrzymy je na przykładach.

Przykład 4. Rozłożyć na czynniki wielomian

$$a^2 - 4a + 4 - b^2.$$

Rozwiązanie. Ponieważ pierwsze trzy składniki są kwadratem dwumianu, stosujemy sztuczne grupowanie, rozdzielając wielomian na dwie grupy, pierwsza z których jest kwadratem dwumianu, a do drugiej włączymy czwarty składnik. Wtedy ten wielomian przekształci się na różnicę kwadratów dwóch wyrażeń:

$$a^2 - 4a + 4 - b^2 = (a - 2)^2 - b^2 = (a - 2 - b)(a - 2 + b).$$

Odpowiedź: $(a - 2 - b)(a - 2 + b)$.

Przykład 5. Rozwiązać równanie $x^2 + 8x - 20 = 0$.

Rozwiązanie. Znajdziemy taką liczbę, która wspólnie z wyrażeniem $x2 + 8x$ utworzy kwadrat dwumianu. To jest liczba 16. Dlatego po lewej stronie równania dodamy i odejmiemy liczbę 16. Otrzymamy:

$x^2 + 8x + 16 - 16 - 20 = 0;$
$(x^2 + 8x + 16) - 36 = 0;$
$(x + 4)^2 - 6^2 = 0.$

Kolejno rozkładamy lewą stronę równania na czynniki według wzoru na różnicę kwadratów i rozwiążemy otrzymane równanie:

$(x + 4 - 6)(x + 4 + 6) = 0;$
$(x - 2)(x + 10) = 0;$
$x - 2 = 0$ *lub* $x + 10 = 0;$
$x = 2$ *lub* $x = -10.$

Odpowiedź: -10; 2.

Przekształcenie $x^2 + 8x - 20 = x^2 + 8x + 16 - 16 - 20 = (x + 4)^2 - 36$ nazywamy *wydzieleniem kwadratu dwumianu*.

O rozkładania wielomianów na czynniki

Nie każdy wielomian drugiego stopnia, a tym bardziej wyższy niż drugi stopień, można rozłożyć na czynniki. Na przykład, nie można rozłożyć na czynniki wielomiany $x^2 + 4$, $x^2 + y^2 + 1$, $x^2 + x + 2$ itp. Zwłaszcza, nie rozkładają się na czynniki wielomiany drugiego stopnia, które są niepełnymi kwadratami sumy lub różnicy i nie zawierają wspólnego czynnika. Na przykład $m^2 + m + 1$, $p^2 - 3p + 9$, $4x^2 + 2x + 1$ itp.

Jakie znasz metody rozkładania wielomianów na czynniki? ○ Na czym polega zasada, którą można się kierować, w celu rozkładaniu wielomianów na czynniki? ○ Czy każdy wielomian można rozłożyć na czynniki? ○ Podaj przykłady wielomianów, które nie można rozłożyć na czynniki.

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

1

840. (*Ustnie.*) Ze wzorów wybierz te, które są tożsamością:
1) $(a + b)^2 = a^2 + ab + b^2$;
2) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
3) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
4) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
5) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + 2ab + b^2)$;
6) $a^2 - b^2 = (a - b)^2$.

841. Które ze wzorów są tożsamością:
1) $(m - n)^2 = m^2 - mn + n^2$;
2) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - 2xy + y^2)$;
3) $p^2 - q^2 = (p - q)(p + q)$;
4) $(c + d)^2 = c^2 + 2cd + d^2$;
5) $m^3 - n^3 = (m - n)(m^2 + mn + n^2)$;
6) $a^2 - b^2 = (a + b)(a + b)$?

842. Zakończ rozkładania na czynniki:
1) $xa^2 - 9x = x(a^2 - 9) = x(a^2 - 3^2) = \ldots$;
2) $bm^2 - 2mb + b = b(m^2 - 2m + 1) = \ldots$.

2

843. (*Ustnie.*) Rozłóż na czynniki:
1) $ax^2 - ay^2$; 2) $mp^2 - m$; 3) $b^3 - b$.

844. Rozłóż na czynniki:
1) $5a^2 - 5b^2$; 2) $ap^2 - aq^2$; 3) $2xm^2 - 2xn^2$;
4) $7b^2 - 7$; 5) $16x^2 - 4$; 6) $75 - 27c^2$;
7) $5mk^2 - 20m$; 8) $63ad^2 - 7a$; 9) $125px^2 - 5py^2$.

845. Podaj w postaci iloczynu:
1) $m^3 - m$; 2) $p^2 - p^4$; 3) $7a - 7a^3$;
4) $9b^5 - 9b^3$; 5) $81c^3 - c^5$; 6) $3a^5 - 300a^7$.

846. Rozłóż na czynniki:
1) $ax^2 - ay^2$; 2) $ma^2 - 4mb^2$; 3) $28 - 7m^2$;
4) $p^5 - p^3$; 5) $b - 4b^3$; 6) $a^5 - a^3c^2$;
7) $15d - 15d^3$; 8) $625b^3 - b^5$; 9) $500a^5 - 45a^3$.

847. Rozwiąż równania:
1) $3x^2 - 27 = 0$; 2) $5 - 20x^2 = 0$.

848. Znajdź pierwiastki równania:
1) $8 - 2x^2 = 0$; 2) $75x^2 - 3 = 0$.

849. Rozłóż na czynniki:
1) $3a^2 + 6ab + 3b^2$; 2) $-2m^2 + 4mn - 2n^2$;
3) $-a^2 - 4a - 4$; 4) $6a^2 + 24ab + 24b^2$;
5) $2am^2 + 4am + 2a$; 6) $8a^4 - 8a^3 + 2a^2$.

850. Podaj wielomian w postaci iloczynu:
1) $-4a^2 + 8ab - 4b^2$; 2) $-25by^2 - 10by - b$;
3) $a^5 + 6a^4m + 9a^3m^2$; 4) $6by^2 + 36by^3 + 54by^4$.

851. Znajdź wartość wyrażenia:
1) $3m^2 - 3n^2$, *jeżeli* $m = 41$, $n = 59$;
2) $2x^2 + 4xy + 2y^2$, *jeżeli* $x = 29$, $y = -28$.

852. Znajdź wartość wyrażenia:
1) $5x^2 - 5y^2$, *jeżeli* $x = 49$, $y = 51$;
2) $3a^2 - 6ab + 3b^2$, *jeżeli* $a = 102$, $b = 101$.

853. Podaj w postaci iloczynu:
1) $3a^3 - 3b^3$; 2) $7x^3 + 7y^3$; 3) $-pm^3 - pn^3$;
4) $16a^3 - 2$; 5) $125m + m^4$; 6) $a^7 - a^4$.

854. Rozłóż na czynniki:
1) $bx^3 - by^3$; 2) $-2a^3 - 2b^3$; 3) $8a - a^4$.

855. Rozłóż na czynniki:
1) $a^4 - 81$; 2) $16 - c^4$; 3) $x^8 - 1$; 4) $a^4 - b^8$.

856. Udowodnij tożsamość:
$$a^8 - b^8 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4).$$

857. Rozwiąż równania:
1) $x^3 - x = 0$; 2) $112y - 7y^3 = 0$;
3) $64x^3 + x = 0$; 4) $y^3 + 4y^2 + 4y = 0$.

858. Rozwiąż równania:
1) $y - y^3 = 0$; 2) $5x^3 - 180x = 0$;
3) $16y^3 + y = 0$; 4) $x^3 - 2x^2 + x = 0$.

859. Rozłóż na czynniki:
1) $7ab + 21a - 7b - 21$;
2) $6mn + 60 - 30m - 12n$;
3) $-abc - 3ac - 4ab - 12a$;
4) $a^3 - ab - a^2b + a^2$.

860. Podaj wyrażenie w postaci iloczynu:
1) $90 + 3ab - 45a - 6b$;
2) $-3mn - 9m - 18n - 54$;
3) $a^4x + a^4 + a^3x + a^3$;
4) $p^3a^2 + pa^2 - 3ap^3 - 3ap$.

861. Rozłóż na czynniki:
1) $a^2 + 2ab + b^2 - 16$;
2) $a^2 - x^2 - 2xy - y^2$;
3) $p^2 - x^2 + 10p + 25$;
4) $p^2 - x^2 + 20x - 100$.

862. Rozłóż na czynniki:
1) $x^2 + 2xy + y^2 - 25$;
2) $m^2 - a^2 + 2ab - b^2$;
3) $m^2 - a^2 - 8m + 16$;
4) $m^2 - b^2 - 8b - 16$.

863. Podaj wyrażenie w postaci iloczynu:
1) $a^2 - 81 + a - 9$;
2) $m^2 - a^2 - (a + m)$;
3) $x^2 - y^2 - x + y$;
4) $x + x^2 - y - y^2$;
5) $a - 3b + a^2 - 9b^2$;
6) $16m^2 - 25n^2 - 4m - 5n$.

864. Rozłóż na czynniki:
1) $a^2 - b^2 - (a - b)$;
2) $p^2 - b - p - b^2$;
3) $16x^2 - 25y^2 + 4x - 5y$;
4) $100m^2 - 10m + 9n - 81n^2$.

865. Przekształć wyrażenie na iloczyn:
1) $p^2(m - 3) - 2p(m - 3) + (m - 3)$;
2) $1 - a^2 - 4b(1 - a^2) + 4b^2(1 - a^2)$.

866. Udowodnij tożsamość:

$$c^2(c - 2) - 10c(c - 2) + 25(c - 2) = (c - 2)(c - 5)^2.$$

867. Podaj w postaci iloczynu:
1) $ab^2 - b^3 - a + b$;
2) $ax^2 - a^3 + 7x^2 - 7a^2$;
3) $p^3 + p^2q - 4p - 4q$;
4) $a^3 - 5m^2 + 5a^2 - am^2$.

868. Rozłóż na czynniki:
1) $m^3 + n^3 + m + n$;
2) $a - b - (a^3 - b^3)$;
3) $a^3 + 8 - a^2 - 2a$;
4) $8p^3 - 1 - 12p^2 + 6p$.

869. Podaj w postaci iloczynu:
1) $m^3 + m^2n - m - n$;
2) $ba^2 - 3a^2 - 4b + 12$;
3) $a^3 - b^3 + a - b$;
4) $x^3 + 1 - 5x - 5$.

4 **870.** Rozwiąż równania:
1) $y^3 - 5y^2 - y + 5 = 0$;
2) $x^3 = 2x^2 + 4x - 8$.

871. Dla jakiej wartości x:
1) wartość wyrażenia $x^3 - x^2 - x + 1$ jest równa zero;
2) wartość wyrażenia $x^3 - 9x$ i $x^2 - 9$ są sobie równe?

872. Zapisz w postaci iloczynu:
1) $9(a + b)^2 - (a^2 - 2ab + b^2)$;
2) $25(3y - 2m)^2 - 36(9y^2 + 12my + 4m^2)$.

873. Rozłóż na czynniki:
1) $a^3 + 8b^3 + a^2 - 2ab + 4b^2$;
2) $m^3 - 8n^3 + m^2 - 4mn + 4n^2$.

874. Przekształć wielomian na iloczyn wielomianów:
1) $a^3 - b^3 + a^2 - 2ab + b^2$; 2) $c^2 + 2cd + d^2 - x^2 - 2xy - y^2$.

875. Rozłóż trójmian na czynniki, wydzielając najpierw kwadrat dwumianu:
1) $x^2 - 2x - 3$;
2) $x^2 + 8x - 9$;
3) $x^2 - 3x - 4$;
4) $x^2 + x - 2$.

Rozwiązanie.

4) $x^2 + x - 2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} =$

$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = (x - 1)(x + 2).$

876. Udowodnij, że dla dowolne wartości całkowitego wyrażenia n wartość wyrażenia $\frac{n^3 - n}{6}$ jest liczbą całkowitą.

Ćwiczenia powtórzeniowe

877. Uprość wyrażenie:
1) $x(x + 1)(x + 2) - 3(x - 2)(x + 2) + 2(x - 6)$;
2) $(2x + 3y)(3y - x) - (2x - y)(5x - y) + (2x - 3y)(5x + 2y)$.

878. Rozwiąż równania:

$$x((x - 2)^2 + 4x) = 64\left(\frac{1}{4}x - 1\right)\left(\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}x + 1\right).$$

879.Do rocznicy swego otwarcia sklep z elektroniką zdecydował sprzedać 141 tabletów i 95 smartfonów ze zniżkami. Co godzinę sprzedawali po 12 promocyjnych tabletów i po 10 promocyjnych smartfonów. Po ilu godzinach od rozpoczęcia promocji promocyjnych tabletów w sklepie elektronicznym zostało trzy razy więcej niż promocyjnych smartfonów?

Matematyka życia

880. Switłana zainwestowała 60 000 UAH w papiery wartościowe kupując akcje spółki „Alfa” na 15 000 UAH, akcje spółki „Beta” na 20 000 UAH, a resztę zainwestowała w akcje spółki „Gamma”. Za rok akcje spółki „Alfa” zdrożały o 20 %, akcje spółki „Beta” o 8 %, a akcje spółki „Gamma” staniały o 10 %. Jaki jest całkowity zysk lub strata Switłany za ten rok?

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

881. Taras i Janina mieszkają na jednej klatce schodowej na jednym piętrze i uczą się w tej samej szkole. Taras pieszo idzie do szkoły 12 min, a Janina – 18 min. 3 min po tym, jak Janina wyruszyła do szkoły, wyruszył Taras. Za jaki czas po wyjściu z domu Taras dogoni Janinę?

SAMODZIELNA PRACA DOMOWA NR 4

Zadania 1–12 mają po cztery warianty odpowiedzi (A–D), wśród których tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa. Wybierz prawidłowy wariant odpowiedzi.

1

1. Jakiemu wielomianowi jest tożsamościowo równe wyrażenie $(m - n)^2$?

A. $m^2 + 2mn + n^2$ **B.** $m^2 - n^2$
C. $m^2 + n^2$ **D.** $m^2 - 2mn + n^2$

2. Znajdź iloczyn $(a - x)(a + x)$.

A. $a^2 + x^2$ **B.** $a^2 - x^2$ **C.** $x^2 - a^2$ **D.** $a^2 + 2xa + x^2$

3. Podaj wyrażenie $x^2 + 2xy + y^2$ w postaci kwadratu dwumianu.

A. $(x - y)^2$ **B.** $(y - x)^2$ **C.** $(2x + y)^2$ **D.** $(x + y)^2$

2

4. Przekształć wyrażenie $(5x - 1)^2$ na wielomian.

A. $5x^2 - 10x + 1$ **B.** $25x^2 + 10x + 1$
C. $25x^2 - 10x + 1$ **D.** $25x^2 - 1$

5. Rozłóż dwumian $-16 + 9a^2$ na czynniki.

A. $(3a - 4)(3a - 4)$ **B.** $(3a + 4)(4 - 3a)$
C. $(3a + 4)(3a - 4)$ **D.** $(3a - 4)^2$

6. Podaj wyrażenie $m^3 + 64$ w postaci iloczynu.

A. $(m + 4)(m^2 - 4m + 16)$ **B.** $(m + 4)(m^2 - 8m + 16)$
C. $(m - 4)(m^2 + 4m + 16)$ **D.** $(m + 4)(m^2 - 4m - 16)$

3

7. Rozwiąż równania: $x(x + 2) - (x - 3)^2 = 7$.

A. –2 **B.** –1 **C.** 1 **D.** 2

8. Uprość wyrażenie $(m^2 + 2p)(m^4 - 2m^2p + 4p^2)$.

A. $m^4 + 8p^3$ **B.** $m^6 + 8p^3$
C. $m^6 - 8p^3$ **D.** $m^6 + 4p^3$

9. Rozłóż wielomian $3ab - 3b + 6a - 6$ na czynniki.

A. $(a - 1)(b + 2)$ **B.** $3(a + 1)(b - 2)$
C. $3(a + 1)(b + 2)$ **D.** $3(a - 1)(b + 2)$

4 **10.** Jaką najmniejszą wartość przybiera wyrażenie $x^2 + 4x + 3$?

A. 1 **B.** 0 **C.** –1 **D.** –2

11. Rozwiąż równanie $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.

A. –2; –1; 1 **B.** –2; 1 **C.** –2; –1 **D.** –1; 1

12. Rozłóż wyrażenie $(b - 2)^3 - b^3$ na czynniki.

A. $2(b^2 - 6b + 4)$ **B.** $-2(b^2 - 6b + 4)$
C. $-2(3b^2 - 6b + 4)$ **D.** $2(3b^2 - 6b + 4)$

Zadania 1–12 można rozwiązać również online pod linkiem *https://cutt.ly/fwKdmAlQ* lub QR kodem.

W zadaniu 13 trzeba dopasować zgodność między cyframi i literami. Jedna odpowiedź jest zbędna.

3 **13.** *Dopasuj zgodność między wyrażeniem* (1–3) i *jego wartościami, jeżeli* $x = 1{,}4$ (A–*D*).

Wyrażenie	*Wartość wyrażenia, jeżeli $x = 1{,}4$*
1. $25x^2 - 70x + 49$	**A.** –1
2. $(5x - 1)(25x^2 + 5x + 1) - 125x^3$	B. 0
3. $72 - 120x + 50x^2$	C. 1
	D. 2

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE WIEDZĘ DO §§ 16–21

1 **1.** Przekształć wyrażenie na wielomian:

1) $(p + a)^2$; 2) $(c - m)(c + m)$.

2. Rozłóż na czynniki:

1) $t^2 - 2tb + b^2$; 2) $d^2 - n^2$.

3.^Jtakie z nierówności są tożsamościami:

1) $(p - a)^2 = p^2 - pa + a^2$;
2) $p^3 + q^3 = (p + q)(p^2 - pq + q^2)$;
3) $m^2 - c^2 = (m - c)(m + c)$;
4) $d^3 - t^3 = (d - t)(d^2 + 2dt + t^2)$?

2 **4.** Przekształć wyrażenie na wielomian:

1) $(3a - 5)^2$; 2) $(7 + 2b)(2b - 7)$.

5. Rozłóż wielomian na czynniki:

1) $a^2 + 6a + 9$; 2) $-25 + 36x^2$;
3) $b^3 + 64$; 4) $7c^2 - 7d^2$.

6. Uprość wyrażenie $(2x + 3)^2 + (7 - 2x)(7 + 2x)$ i znajdź jego wartość, jeżeli $x = -\frac{1}{12}$.

3 **7.** Rozwiąż równania:

1) $2x^3 - 50x = 0$; 2) $x^3 - 10x^2 + 25x = 0$.

8. Uprość wyrażenie:

1) $(-4a + 3b)^2 + (-4a + 5b)(5b + 4a) + 24ab$;
2) $(a - 2)(a^2 + 2a + 4) - a(a - 3)(a + 3)$.

4 **9.** Udowodnij, że dla dowolnej wartości niewiadomej x wyrażenie $x^2 + 8x + 17$ przybiera tylko wartości dodatnich. Jaką namniejszą wartość przybiera to wyrażenie i dla jakiej wartośc x?

Ćwiczenia dodatkowe

4 **10.** Przekształć wyrażenie na wielomian:

1) $(a + 3)^3$; 2) $(2m - 5)^3$.

11. Znajdź dwie ostatnie cyfry liczby $293^3 - 93^3$.

12. Rozłóż trójmian $x^2 + 6x - 7$ na czynniki.

ĆWICZENIA NA POWTÓRZENIE ROZDZIAŁU 2

Do § 4

1 **882.** Wypisz wyrażenia, które są wyrażeniami z niewiadomymi, na dwie grupy: w pierwszej grupie racjonalne wyrażenia całkowite, w drugiej – ułamkowe wyrażenia racjonalne:

1) $m - 7$; 2) $\frac{a^2 - b}{5}$; 3) $\frac{7 + 9 \cdot 2}{3}$; 4) $(3 - 9) + 7 \cdot 8$;
5) $-\frac{1}{6}ab$; 6) $\frac{3}{a + c^3}$; 7) $\frac{1}{x} + \frac{1}{3}$; 8) $a^3 - a^2 + a$.

2 **883.** Do magazynu przywieziono a worków cukru po 50 kg każdy. Zapisz w postaci wyrażenia masę całego przywiezionego cukru. Znajdź wartość teog wyrażenia, jeżeli $a = 12$.

3 **884.** Zapisz w postaci wyrażenia:

1) dwucyfrową liczbę, w której x dziesiątków i y jednostek;
2) dwucyfrową liczbę, w której 5 dziesiątków i a jednostek;
3) trzycyfrową liczbę, w której a setek, b dziesiątków i c jednostek;

4) trzycyfrową liczbę, w której m setek, n dziesiątków i 6 jednostek.

4 **885.** Wiadomo, że $x - y = 2$ i $p = 3$. Znajdź wartość wyrażenia:

1) $x + p - y$; 2) $x - y + 5p$; 3) $(y - x)p$;

4) $\dfrac{3(y - x)}{-p + 4(x - y)}$; 5) $7x - 7y - p$; 6) $\dfrac{6}{p} - \dfrac{4}{5(y - x)}$.

Do § 5

1 **886.** Uprość wyrażenie:

1) $2 + 3a - 5$; 2) $0{,}4m + m$;
3) $3p - 2p + 5$; 4) $-(m - 3)$.

2 **887.** Otwórz nawiasy i zredukuj składniki podobne:

1) $7(5x + 8) - 12x$; 2) $9m + 3(15 - 4m)$;
3) $6(x + 1) - 6x - 9$; 4) $12x - 2(3x - 5)$;
5) $-(2x + 1) - 3(2x - 5)$; 6) $5(x - 2) - 4(2x - 3)$.

3 **888.** Udowodnij tożsamość:

1) $18(a - 2) = 12a - (20 - (6a - 16))$;
2) $2(x - y + t) - 3(x + y - t) - 5(t - y) = -x$.

4 **889.** Udowodnij, że suma dowolnych trzech kolejnych liczb jest podzielna przez 3.

* **890.** Czy jest równość tożsamością:

1) $|a + 5| = a + 5$; 2) $|m^2 + 1| = m^2 + 1$;
3) $|m - n| = |n - m|$; 4) $|a| + |b| = |a + b|$?

Do § 6

1 **891.** a) Podaj iloczyn w postaci potęgi:

1) $0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3$; 2) $-2 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$;

3) aa; 4) $\dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{x}{y}$.

b) Podaj potęgę w postaci iloczynu jednakowych czynników:

1) m^3; 2) 17^4; 3) $(p + 2)^2$; 4) $\left(\dfrac{a}{9}\right)^5$.

2 **892.** Oblicz:

1) 2^6; 2) $(0{,}2)^3$; 3) $\left(-\dfrac{1}{8}\right)^2$; 4) $\left(-1\dfrac{1}{6}\right)^3$;

5) $-(-2)^3$; 6) $-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$; 7) $-(-0{,}1)^2$; 8) $-(-1)^{27}$.

893. Porównaj do zera wartość wyrażenia nie wykonując obliczeń:
1) $(-1{,}7)^{15} \cdot (-2{,}7)^2$; 2) $(-2{,}3)^3 : (-5{,}89)$;
3) $-3{,}7^2 \cdot (-2{,}8)^4$; 4) $-(-2{,}6)^8 \cdot (-5{,}7)^5$.

894. Znajdź ostatnią cyfrę liczby:
1) 2025^{13}; 2) 5011^7; 3) 1006^{17}; 4) $15^9 + 16^8 + 101^{17}$.

895. Czy jest liczba:
1) $10^{17} + 5$ jest wielokrotnością liczby 3;
2) $10^{29} + 7$ jest wielokrotnością liczby9?

Do § 7

896. Podaj w postaci potęgi:
1) b^7b^3; 2) a^3a; 3) $9^8 \cdot 9^7$; 4) $p^{10} : p^3$;
5) $19^8 : 19^6$; 6) $7^{15} : 7^{14}$; 7) $(a^3)^4$; 8) $(2^5)^3$.

897. Oblicz:
1) $3^8 : 3^7$; 2) $2^5 \cdot 2^{12} : 2^{15}$; 3) $\dfrac{10^4 \cdot 10^9}{10^{10}}$; 4) $\dfrac{8^5 \cdot 8^{10}}{8^{11} \cdot 8^3}$.

898. Znajdź wartość x, dla której równość jest tożsamość:
1) $(4^7)^x = 4^{21}$; 2) $(3^2)^6 = 3^{3x}$; 3) $\left(\left(\left(\dfrac{1}{7}\right)^x\right)^3\right)^4 = \left(\dfrac{1}{7}\right)^{24}$.

899. Zapisz wyrażenie w postaci potęgi (n – *liczba naturalna*):
1) $(a^{18} : a^{2n}) \cdot (a^7 : a^n)$, де $n < 7$; 2) $\dfrac{a^8 \cdot a^{2n}}{a^n \cdot a^5} \cdot a^{4n}$.

900. Znajdź ostatnią cyfrę liczby (n – *liczba naturalna*):
1) 8^{4n}; 2) 7^{4n+1}.

Do § 8

901. Które z wyrażeń są jednomianami? Które z jednomianów podano w postaci kanonicznej:
1) $-a^2c$; 2) $7a \cdot 2b \cdot 4$; 3) 17; 4) $aaba$;
5) $6\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{3}y\right)$; 6) $p + 1$; 7) $-p^2$; 8) $c^9 - c$?

902. Sprowadź jednomian do postaci kanonicznej, podaj jego współczynnik i potęgę:
1) $-\dfrac{1}{2}a^2b \cdot 2ab^7$; 2) $3m \cdot (-2m^2) \cdot 5m^7$;

3) $-7ap^2 \cdot 0{,}1a^2p^9$; 4) $1\frac{1}{8}m^2 \cdot \frac{8}{9}mc^2$;

5) $-a \cdot (-b) \cdot (-c) \cdot (-5d)$; 6) $p^9 \cdot (-2a^2) \cdot (-5p^7) \cdot a^8$.

3 **903.** Utwórz dwa różne jednomiany w postaci kanonicznej z niewiadomymi a i b tak, żeby:
1) potęga każdego z nich wynosiła 7, a współczynnik wynosił –8;
2) potęga każdego z nich wynosiła 3, a współczynnik wynosił 17.

Do § 9

1 **904.** Znajdź iloczyn jednomianów:
1) $3m \cdot 2n$; 2) $-4p \cdot 2a$; 3) $8m^2 \cdot 3n$; 4) $-2a^3 \cdot (-b^7)$.

2 **905.** Podaj wyrażenie w postaci jednomianu w postaci kanonicznej:
1) $-2{,}5m^2 \cdot (-4m^3p)$; 2) $12p^2m \cdot \left(-\frac{5}{6}p^3m^7\right)$;
3) $0{,}6m^7a^9 \cdot 10m^2a^7 \cdot \frac{1}{2}m^3$; 4) $(-mn^7)^3$;
5) $(-2a^5b^7)^2$; 6) $(m^3p^7a^9)^5$.

3 **906.** Znajdź jednomian A, jeżeli:
1) $A \cdot 14m^2n = 42m^4n^2$; 2) $3p^2q^7 \cdot A = -21p^3q^7$.

907. Dokonaj mnożenia jednomianów $0{,}4m \cdot 10nm^2$ i znajdź wartość otrzymanego iloczynu, jeżeli $m = -2$; $n = 0{,}5$.

4 **908.** Czy można podać wyrażenie w postaci kwadratu jednomianu:
1) $49m^8n^{12}$; 2) $-25a^4b^8$;
3) $-0{,}2m^4n^2 \cdot (-5m^2n^4)$; 4) $-(-3a^4)^3 \cdot 3a^{12}$?

909. Dla jakiej wartości naturalnej n równość

$$(2{,}5a^8c)^n \cdot 0{,}16c^5 = 2{,}5a^{24}c^8$$

jest trożsamością?

Do § 10

1 **910.** Z podanych jednomianów ułóż wielomian i podaj jego potęgę:
1) $5a^2$ i $4b$; 2) $-a^2$; ab i m;
3) $5c^3$ i -8; 4) $3mn^2$; $4mn$; $-5m^2n$ i -7.

2 **911.** Zredukuj wyrazy podobne wielomianu:
1) $8a^2b - 7ab^2 + 5a^2b + 4b^2a$; 2) $5mn - 2mn - 8 - 3mn$;
3) $7m^3 + m^2 - 8 - m^3 + 3m^2$;
4) $2x^2y - 7xy^2 - 5xy + 3yx^2 + 7y^2x$.

3 **912.** Sprowadź wielomian do postaci kanonicznej

$$-\frac{1}{4}ab \cdot (-8ab^2) + 8a^2 \cdot (-1{,}5ab) + 20ab \cdot (-0{,}1ab^2) + a^2ab + 2a \cdot 6a^2b$$

i znajdź jego wartość, jeżeli $a = 5$; $b = -\frac{1}{25}$.

4 **913.** Czy istnieją takie wartości naturalne niewiadomej a, dla których wartość jednomianu $2a^2 + 6a + 7$ jest liczbą parzystą?

Do § 11

2 **914.** Uprość wyrażenie:
1) $(3m + 5n) + (9m - 7n) - (-2n + 5m)$;
2) $(12ab - b^2) - (5ab + b^2) + (ab + 2b^2)$;
3) $(3x^2 + 2x) + (2x^2 - 3x - 4) - (17 - x^2)$;
4) $(m - n + p) + (m - p) - (m - n - p)$.

3 **915.** 1) Podaj wielomian $4x^3 - 4x^2 + 5x - 7$ w postaci sumy dwumianów.
2) Podaj wielomian $x^3 - 5x + 7x^2 - 9$ w postaci różnicy jednomianu i trójmianu.

916. Który wielomian w sumie z wielomianem $2x^2 - 3x + 7$ daje:
1) 0; 2) 5; 3) $-3x + 1$; 4) $x^2 - 5x + 7$?

4 **917.** Udowodnij, ze suma dwóch kolejnych nieparzystych liczb całkowitych jest podzielna przez 4.

918. Uprość wyrażenie $5xy - 8x^2y - \left(3xy - \left(4\frac{1}{4}xy^2 + 8x^2y\right) - 2{,}75xy^2\right)$

i znajdź jego wartość, jeżeli $x = -1$; $y = 3$.

Do § 12

1 **919.** Wykonaj mnożenie:
1) $a(b + 7)$; 2) $c(2 - x)$; 3) $-a(m - 3)$; 4) $-b(a - x + y)$.

2 **920.** Przekształć iloczyn na wielomian:
1) $2xa(a^2 - 3ax)$; 2) $-3mp(2m^3 - 5mp)$;
3) $4ab^2(a^2 - 2ab - b^2)$; 4) $(4m^3 - 2mn^2 - n^2)mn^2$;
5) $(-0{,}1x^3y + 0{,}2x^2y - y^3)(-5x^2y)$;
6) $-10n^3x\,(5nx^2 - 2n^2x + x^5)$.

3 **921.** Uprość wyrażenie i znajdź jego wartość:
1) $2x(x + y) - y(2x - y) - y(y + 1)$, *jeżeli* $x = -5$, $y = -10$;
2) $m^2(m^2 - 5m + 1) - 2m(m^3 - 4m^2 + m) + m^4 - 3m^3 + 2$, *jeżeli* $m = -3$.

922. Dla jakiej wartości niewiadomej wartość wyrażenia $2x(6x - 5)$ jest o 5 mniejsza od określonej wartości wyrażenia $3(4x^2 - 5)$?

4 **923.** Uprość wyrażenie $\frac{1}{8}x^n - \frac{5}{8}x^2(1 + x^{n-2}) + \frac{1}{2}x^3(x^{n-3} + 2)$, gdzie $n > 3$, n – liczbą naturalną.

924. W pierwszym dniu na magazynie warzyw sprzedano o 3 cetnary więcej warzyw niż w drugim, a w trzecim – $\frac{4}{9}$ od tego, co sprzedali w 2 pierwsze dni łącznie. Po ile cetnarów warzyw sprzedano każdego z tych dni, jeżeli w ciągu tych dni łącznie sprzedano 65 cetnarów warzyw?

* **925.** Rozwiąż równanie $\dfrac{1 - \frac{3x}{2}}{4} + \dfrac{2 - \frac{x}{4}}{3} = x - 2$.

Do § 13

1 **926.** Wyłącz wspólny czynnik przed nawiasy:
1) $5x - 5y$; 2) $7m + 7n$; 3) $ap + ac$; 4) $bm - bk$.

2 **927.** Rozłóż na czynniki:
1) $7ax - 7bx$; 2) $8a + 24ac$; 3) $18p - 24p^2$;
4) $5m^3 - 10m^2$; 5) $-15a^2 - 20a^3$; 6) $a^7 - a^2 + a^5$.

3 **928.** Podaj wyrażenie w postaci iloczynu:
1) $6xy - 12x^2y + 15xy^2$;
2) $7mn^5 + 28m^2n^3 - 7m^3n^2$;
3) $a(x - 2) + 3b(x - 2) - 2(2 - x)$;
4) $8(m - 1)^2 - n(1 - m)$.

4 **929.** Rozwiąż równania:
1) $x|x - 3| - 5|x - 3| = 0$;
2) $|x||x - 2| - 7|x - 2| = 0$.

* **930.** Dla określonej wartości x wartość wyrażenia $x^2 - 3^x - 13$ równa się -1. Znajdź dla tej samej wartości x wartość wyrażenia:
1) $2x^2 - 6x - 26$; 2) $x^2(x^2 - 3x - 13) - 3x(x^2 - 3x - 13)$;
3) $3x^2 - 9x - 8$; 4) $\frac{5}{12}x^2 - \frac{5}{4}x + 3$.

Do § 14

1 **931.** Wykonaj mnożenie:
1) $(m - p)(a + x)$; 2) $(2 + t)(a - 3)$;
3) $(a + b)(2 + c)$; 4) $(a -2)(b - 3)$.

2 **932.** Podaj w postaci wielomianu:
1) $(2m - 3p)(3m + 2p)$; 2) $(2a^2 + b)(3b - 5a^2)$;
3) $(7x^2 - 2x)(3x + 1)$; 4) $(5a^3 - 4a^2)(9a^2 + 8a)$;
5) $(3a^2 + 5ba)(3b - 4a)$; 6) $(mn - n^2)(4n^3 + 2n^2m)$.

3 **933.** Uprość wyrażenie:
1) $(a - 8)(2a - 2) - (a + 9)(a - 3)$;
2) $(x - y)(x + 3) - (x + y)(x - 3)$;
3) $(3a - 5b)(5a + 3b) - (5a - 3b)(3a + 5b)$;
4) $(a^3 + 4m)(a^2 - 4m) - (a^2 + 4m)(a^3 - 4m)$.

934. Rozwiąż równania:
1) $(3x - 1)(2x + 6) - (2x - 2)(3x + 1) = -24$;
2) $(3x + 9)(x - 5) - (x - 7)(3x - 1) = 12 + 8x$.

4 **935.** Udowodnij, że wartość wyrażenia
$2(10x - 5)(x + 0{,}6) + (4x^2 - 1)(2x - 5) - (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$
nie zależy od wartości niewiadomej.

936. Udowodnij, że $(x + 1)(y + 1) - (x - 1)(y - 1) = 8$, jeżeli $x + y = 4$.

* **937.** Dwa akwaria mają kształt prostokątnego równoległościanu. Długość pierwszego jest o 10 cm większa niż jego szerokość. Długość drugiego akwarium jest o 20 cm większa niż długość pierwszego, a szerokość o 10 cm większa od szerokości pierwszego. Jeżeli oba akwaria napełnić wodą do wysokości 25 cm, to wody w drugim akwarium będzie o 37,5 l więcej niż w pierwszym. Znajdź długość i szerokość pierwszego akwarium.

Do § 15

1 **938.** Zakończ rozkładanie wielomianu na czynniki:

$$ab - 7b + 3a - 21 = (ab - 7b) + (3a - 21) = \ldots$$

2 **939.** Rozłóż na czynniki:
1) $m(a - b) + 3a - 3b$; 2) $a(b + c) + b + c$;
3) $3a - 3c + xa - xc$; 4) $ab - ac - 4b + 4c$.

3 **940.** Podaj wielomian w postaci iloczynu:
1) $12x^2c - 8x^2y - 9cy^3 + 6y^4$;
2) $1{,}6mn^2 - 2{,}4mp^2 - n^3 + 1{,}5np^2$.

4 **941.** Rozwiąż równanie $x^2 + 5x - 6 = 0$, stosując rozkładanie wielomianu na czynniki.

Do § 16

1 **942.** Podnieś dwumian do potęgi:
1) $(x - p)^2$; 2) $(m + a)^2$; 3) $(b - k)^2$; 4) $(y + c)^2$.

943. Przekształć wyrażenie na wielomian:
1) $(3a-7)^2$; 2) $(2b+5)^2$; 3) $(10m-5k)^2$;
4) $(4p+9q)^2$; 5) $(0{,}1m-5p)^2$; 6) $\left(\frac{1}{6}a+6b\right)^2$.

944. Uprość wyrażenie i znajdź jego wartość:
1) $(a-1)^2-(a-2)^2$, jeżeli $a=1{,}5$;
2) $(3b+2)^2+(3b-2)^2$, jeżeli $b=-\frac{1}{3}$.

945. Znajdź liczbę, kwadrat której po zwiększeniu tej liczby o 3 zwiększy się o 159.

946. Czy równość $(a-b)^2=|a-b|^2$ jest tożsamością?

947. Podaj w postaci wielomianu:
1) $((x+y)+a)^2$; 2) $((b-c)-d)^2$;
3) $(m+n+2)^2$; 4) $(a+3-c)(a+3-c)$.

Do § 17

948. Podaj w postaci kwadratu dwumianu:
1) $m^2-2mp+p^2$; 2) $b^2+2by+y^2$; 3) $a^2-2\cdot a\cdot 4+4^2$.

949. Rozłóż na czynniki:
1) $m^2+20m+100$; 2) $49-14b+b^2$; 3) $0{,}09x^2+0{,}6x+1$;
4) $\frac{1}{36}-\frac{1}{3}p+p^2$; 5) $4x^2+20x+25$; 6) $4m^2-12mp+9p^2$.

950. Znajdź wartość wyrażenia:
1) $-100m^2+20m-1$, jeżeli $m=0{,}1$; $-0{,}9$;
2) $-4x^2-12xy-9y^2$, jeżeli $x=0{,}03$, $y=-0{,}02$.

951. Rozwiąż równania:
1) $3x^2-2x+\frac{1}{3}=0$; 2) $5y^2+2y+\frac{1}{5}=0$.

952. Zamień jeden ze współczynników wielomianu tak, żeby otrzymany trójmian można było przedstawić w postaci kwadratu dwumianu (znajdź trzy różne rozwiązania):
1) $100m^2+40mn+n^2$; 2) $25a^2-ab+9b^2$.

953. Udowodnij, że dla dowolnych wartości niewiadomych wyrażenie przybierze tylko wartości ujemne:
1) $4x(4x-10)+25$;
2) $(a-2)((a-2)+2m)+m^2$;
3) $(a+b)(a+b+8)+16$.

Do § 18

1 **954.** Jakie z nierówności są tożsamościami:
1) $(b - x)(b + x) = b^2 + x^2$; 2) $(c - d)(c + d) = c^2 - d^2$;
3) $(m + n)(m - n) = (m + n)^2$; 4) $(p + q)(p - q) = p^2 - q^2$?

2 **955.** Wykonaj mnożenie:
1) $(c + 7)(7 - c)$; 2) $(0{,}5m - 3)(0{,}5m + 3)$;
3) $(3k + 7)(3k - 7)$; 4) $(2p - 9q)(9q + 2p)$;
5) $(10m + 9n)(9n - 10m)$; 6) $\left(\frac{2}{3}c - \frac{4}{5}d\right)\left(\frac{2}{3}c + \frac{4}{5}d\right)$.

956. Podaj w postaci wielomianu:
1) $4(a - 1)(a + 1)$; 2) $b(b - 2)(b + 2)$;
3) $7p(p + 3)(p - 3)$; 4) $-3x(x + 4)(x - 4)$.

3 **957.** Uprość wyrażenie i znajdź jego wartość:
1) $(1{,}9x - 3)(3 + 1{,}9x) + 0{,}39x^2$, jeżeli $x = 2$;
2) $9{,}99 - (5y - 0{,}1)(5y + 0{,}1)$, jeżeli $y = \frac{1}{5}$;
3) $(2x - 3y)(2x + 3y) + (3x + 2y)(3x - 2y)$, jeżeli $x = 1{,}8$; $y = -1{,}8$;
4) $(ab + 1)(ab - 1)(a^2b^2 + 1)$, jeżeli $a = 5$; $b = \frac{1}{5}$.

4 **958.** Oblicz: $7^{40} \cdot 3^{40} - (21^{20} - 1)(21^{20} + 1)$.

Do § 19

1 **959.** Jakie z nierówności są tożsamościami:
1) $m^2 - p^2 = (m + p)(m - p)$; 2) $a^2 - 7^2 = (a - 7)(a + 7)$;
3) $c^2 - d^2 = (c - d)(c + d)$; 4) $9^2 - a^2 = (9 - a)^2$?

2 **960.** Rozłóż dwumian na czynniki:
1) $x^2 - 49$; 2) $100 - p^2$; 3) $0{,}04m^2 - n^2$;
4) $25x^2 - 36y^2$; 5) $16a^2 - b^2c^2$; 6) $121m^2a^2 - \frac{1}{9}b^2$.

3 **961.** Rozwiąż równanie, gdzie x – niewiadoma:
1) $a^2x^2 - b^2 = 0$, $a \neq 0$; 2) $x^2 - 0{,}09a^2 = 0$.

4 **962.** Czy jest:
1) $138^2 - 136^2$ podzielne przez 4;
2) $349^2 - 347^2$ podzielne przez 6?

963. Rozłóż na czynniki wyrażenie:
1) $9 - (2x - 8)(3x + 2) - 2x(5x + 10)$;
2) $(3x + 5)(4x - 5) - 2x(2{,}5 + 1{,}5x)$.

Do § 20

964. Które z danych wyrażeń jest niepełnym kwadratem sumy wyrażeń m i n, a które niepełnym kwadratem ich różnicy:
1) $m^2 - 2mn + n^2$; 2) $m^2 + mn + n^2$;
3) $m^2 + 2mn + n^2$; 4) $m^2 - mn + n^2$?

965. Rozłóż na czynniki:
1) $x^3 - y^3$; 2) $p^3 + k^3$; 3) $a^3 - 64$;
4) $\frac{1}{125} + b^3$; 5) $0{,}001m^3 - 1$; 6) $8x^3 + 27p^3$.

966. Udowodnij, że wartość wyrażenia $37^3 + 13^3$ jest podzielna przez 50.

967. Udowodnij tożsamość
$$x^6 - y^6 = (x - y)(x + y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2).$$

Do § 21

968. Zakończ rozkładania na czynniki:
1) $ym^2 - 4y = y(m^2 - 4) = y(m^2 - 2^2) = \ldots$
2) $ca^2 + 2ac + c = c(a^2 + 2a + 1) = \ldots$

969. Różłóż wielomian na czynniki:
1) $mp^2 - mq^2$; 2) $20a^2 - 5$;
3) $c - c^3$; 4) $64a^2 - a^4$;
5) $5x^2 - 10xy + 5y^2$; 6) $2b + 4bn + 2bn^2$.

970. Podaj w postaci iloczynu:
1) $9a^3 - 9b^3$; 2) $2mn - 2bn + 6m - 6b$;
3) $\frac{1}{81}p^4 - 1$; 4) $m^2 - 4mn + 4n^2 - 25$;
5) $b^2 - 36 + b - 6$; 6) $m^3 - 4m - m^2n + 4n$.

971. Różłóż wielomian na czynniki:
1) $am^4 - m^4 - am^2 + m^2$; 2) $a^3b - a^3 - ab + a$;
3) $b^3 + 1 - b^2 - b$; 4) $x^3 - 27 + x^4 - 9x^2$.

972. Udowodnij tożsamość:
1) $(a + 1)^3 - 4(a + 1) = (a + 1)(a - 1)(a + 3)$;
2) $(m^2 + 9)^2 - 36m^2 = (m - 3)^2(m + 3)^2$.

Najważniejsze w rodziale 2

WYRAŻENIA TOŻSAMOŚCIOWE

Dwa wyrażenie, odpowiednie wartości których są równe sobie dla dowolnych wartości niewiadomych, nazywamy ***tożsamościowe***, lub ***tożsamościowo równe***.

TOŻSAMOŚĆ

Równość będąca prawidłową dla dowolnych wartości niewiadomych, nazywamy ***tożsamością***.

UDOWODNIENIE TOŻSAMOŚĆI

Udowodnić tożsamość można w następujące sposoby:

▼ wykonać przekształcenia tożsamościowe jej lewej strony, czym sprowadzimy do postaci prawej strony;

▼ wykonać przekształcenia tożsamościowe jej prawej strony, czym sprowadzimy do postaci lewej strony;

▼ wykonać przekształcenia tożsamościowe obu jej stron, czym sprowadzimy obie strony do jednakowych wyrażeń.

POTĘGA Z WYKŁADNIKIEM NATURALNYM

Potęga liczby i jej wykładnik naturalny n ($n > 1$) – to jest iloczyn n mnożników, każdy z których jest równy a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}},\ n > 1.$$

Potęga liczby z wykładnikiem 1 – to ta sama liczba a:

$$a^1 = a.$$

CECHY POTĘGI Z WYKŁADNIKIEM NATURALNYM

$a^m a^n = a^{m+n}$	$a^{m+n} = a^m a^n$
$a^m : a^n = a^{m-n}$	$a^{m-n} = a^m : a^n$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$
$(ab)^n = a^n b^n$	$a^n b^n = (ab)^n$

JEDNOMIAN

Wyrażenia całkowite – liczby, niewiadome, ich potęgi i iloczyny – nazywamy ***jednomianami***.

Jeżeli jednomian jest iloczynem, który ma jeden czynnik liczbowy, który zapisano jako pierwszy, a inne czynniki są potęgami różnych niewiadomych, to taki jednomian nazywamy ***jednomianem w postaci kanonicznej***.

Potęgą jednomianu nazywamy sumę wykładników potęg wszystkich niewiadomych, które on zawiera. Jeżeli jednomian nie zawiera niewiadomych (czyli jest liczbą), to uważa się, że jego potęga równa się zero.

WIELOMIAN

Wielomian jest sumą jednomianów.

Wyrazy podobne w wielomianie nazywane są ***wyrazami podobnymi wielomianu***, a suma wyrazów podobnych w wielomianie nazywana jest ***sumą wyrazów podobnych wielomianu***.

Wielomian będący sumą jednomianów standardowej postaci, wśród których nie ma wyrazów podobnych, nazywany jest ***wielomianem standardowej postaci***.

DODAWANIE I ODEJMOWANIE WIELOMIANÓW

Dodawanie i odejmowanie wielomianów wykonujemy stosując zasady otwarcia nawiasów i redukcji składników podobnych.

MNOŻENIE JEDNOMIANU PRZEZ WIELOMIAN

Żeby pomnożyć jednomian przez wielomian, trzeba pomnożyć ten jednomian przez jażdy wyraz wielomianu i dodać znalezione iloczyny.

ROZKŁADANIE WIELOMIANÓW NA CZYNNIKI

Rozłożyć wielomian na czynniki oznacza podać go w postaci iloczynu jednomianu przez wielomian lub iloczynu kilku wielomianów tak, żeby ten iloczyn był tożsamościowo równy danemu wielomianowi.

MNOŻENIE WIELOMIANU PRZEZ WIELOMIAN

Żeby pomnożyć wielomian przez wielomian, trzeba każdy wyraz jednego wielomianu pomnożyć przez każdy wyraz innego wielomianu i dodać otrzymane iloczyny.

WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$
$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$
$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

ROZKŁADANIE WIELOMIANÓW NA CZYNNIKI

KWADRAT SUMY I KWADRAT RÓŻNICY

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

RÓŻNICA KWADRATÓW

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

SUMA I RÓŻNICA SZEŚCIANÓW

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

O fundatorach olimpiad z matematyki w Ukrainie

Trochę wcześniej już zapoznałeś się z historią ruchu olimpiadowego Ukrainy z matematyki, teraz dokładniej opowiemy o jej fundatorach, którzy większą część swego życia poświęcili odkryciu, wychowaniu i nauce matematycznie uzdolnionej młodzieży.

„On żył i bezmiernie płonął z miłości do Ukrainy i do matematyki oraz cały swój krótki okres życia nieustannie i twórczo pracował na rzecz nauki i edukacji własnego narodu. Jego lekcje – to zarówno siła, bezmierna głębia i piękno myśli matematycznej". Te słowa o Michale Krawczuku ku jego 115-tej rocznicy napisała Nina Wirczenko, ukraińska naukowiec w dziedzinie matematyki, doktor w dziedzinie fizyki i matematyki, zasłużona pracowniczka oświaty Ukrainy, profesorka Narodowego Uniwersytetu Technicznego Ukrainy.

Urodził się przyszły naukowiec 27 września 1892 r. w miejscowości Czołnica. Uczył się w Łuckim gimnazjum, które ukończył w 1910 roku ze złotym medalem i dostał się na studia na kierunek matematyczny wydziału fizyki i matematyki w Kijowskim Uniwersytecie św. Włodzimierza (obecnie Kijowski Narodowy Uniwersytet im. Tarasa Szewczenki). W 1914 roku M. Krawczuk kończy daną uczelnię i jego zatrzymują na uniwersytecie jako stypendystę profesorskiego do przygotowania do pracy naukowej i wykładowczej. Po pomyślnym zdaniu egzaminów magisterskich w 1917 roku, Michał Krawczuk otrzymuje tytuł prywatnego doktora (docenta). Od tego czasu cała naukowa, pedagogiczna i społeczna działalność Krawczuka była związana z Kijowem. Wykłada on przedmioty matematyczne w pierwszych utworzonych w stolicy gimnazjach ukraińskich, Ukraińskim Narodowym Uniwersytecie. Był nauczycielem Archipa Lulki, wynalazcy silnika turboodrzutowego, i Sergieja Korolowa, światowej sławy konstruktora samolotów. Na lekcjach Michała Krawczuka nigdy nie było wolnego miejsca, słuchać jego przychodzili zarówno biolodzy i chemicy, jak i filozofowie, filolodzy i pracownicy…

W 1919 roku Krawczuk opublikował pierwszy przetłumaczony na język ukraiński podręcznik „Geometria elementarna" A. Kiselowa, rosyjskojęzycznego podręcznika, który na początku *x*X wieku otrzymał pozytywną ocenę nauczycieli z matematyki istniał przez ponad pół wieku aż do zmiany szkolnego kursu matematyki w ZSRR. Na początku 1920 roku Michała Krawczuka wybrano członkiem komisji ds. terminologii matematycznej przy Instytucie Języka Naukowego Ukraińskiej Akademii Nauk. W końcu tegoż samego roku dana komisja pod przewodnictwem M, Krawczuka stworzyła trzytomowy słownik matematyczny. Dokładna przestudiowanie dzieł Michała Krawczuka z punktu widzenia językowo-pojęciowego i obecnie może służyć takiej aktualnej sprawie, jak dalsze opracowanie ukraińskiej terminologii matematycznej.

Znając biegle kilka języków (francuski, niemiecki, włoski, polski, rosyjski), on pisał w nich swoje prace naukowe, ale najczęściej w języku ojczystym, i ten jego język jest godnym przykładem stylu naukowego i matematycznego.

W 1924 roku Michał Krawczuk znakomicie obronił pracę doktorską. To była pierwsza w Ukrainie pracy doktorskiej. W 1925 roku Michał Krawczuk otrzymał tytuł profesora, a w 1929 roku jego wybrano czynnym członkiem Ogólnoukraińskiej Akademii Nauk. W wieku 37 lat stał się on najmłodszym członkiem Akademii w Ukrainie. Zainteresowania matematyczne Michała Krawczuka były różnorodne, jego prace naukowe wyróżniały się oryginalnymi pomysłami, niestandardowym podejściem do znanych i nowych zagadnień matematycznych. Oryginalność i elastyczność myślenia, wysoka produktywność i wydajność, erudycja, dokładność i ofiarność naukowa, oddanie się nauce Michała Krawczuka wzbudziły podziw jego uczniów i naśladowców, których krąg poszerzał się z roku na rok.

Osiem lat, od 1929 do 1937, były najowocniejsze w twórczości i osiągnięciach naukowych Michała Krawczuka. Otrzymuje on szereg znaczących wyników w różnych dziedzinach matematyki, zwłaszcza w teorii wielomianów, publikuje podręczniki dla wyższych uczelni, inicjuje przeprowadzenie pierwszej w Ukrainie szkolnej olimpiady z matematyki, stale pracuje nad udoskonaleniem terminologii matematycznej. Wyniki swoich badań publikuje nie tylko w publikacjach naukowych w Ukrainie, ale i za granicą (we Włoszech, Francji, Niemczech).

Ale dalsze losy Michała Krawczuka były tragiczne. W ZSRR zaczęły się represje stalinowskie. W 1938 roku trudne czasy nadeszły i dla niego. Został aresztowany i oskarżony o typowe jak na te czasy przestępstwa: ukraiński nacjonalizm, szpiegostwo, działalność kontrrewolucyjna. Z tego powodu we wrześniu 1938 roku Michał Krawczuk został skazany na 20 lat więzienia i 5 lat zesłania i został wysłany na Kołymę. Tam Krawczuk spędził trzy katorżnicze zimy i lata, chory i przygnębiony niesprawiedliwością. A 9 marca 1942 roku odszedł na tamten świat. Michał Krawczuk na wieki wieczne pozostał w kołymskiej zmarzlinie obok poety neoklasyka Michała Draj-Chamary, który kilka lat przed nim spoczął w tej dalekiej ziemi, wraz z tysiącami innych torturowanych przedstawicieli inteligencji. Dopiero w 1956 roku Michał Krawczuk został zrehabilitowany.

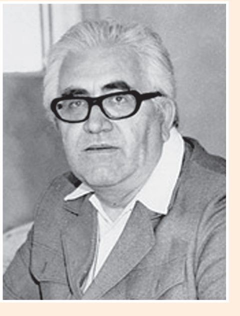
W 1992 roku, po uzyskaniu niepodległości, Ukraina obchodziła 100-lecie urodzin Michała Krawczuka. Jego imię zostało wpisane do Międzynarodowego Kalendarza UNESCO wybitnych działaczy naukowych. W Narodowym Uniwersytecie Technicznym Ukrainy „Kijowski Instytut Politechniczny” cyklicznie odbywają się międzynarodowe konferencje naukowe, poświęcone pamięci akademika Michała Krawczuka, w których biorą udział naukowcy ze wszystkich województw Ukrainy, z Litwy, Australii, USA, Niemiec, Polski, Chin, Japonii i innych krajów.

Pamięć o Michale Krawczuku została uwieczniona w nazwie jednej z ulic Kijowa, na ojczyźnie naukowca otwarto poświęcone jemu muzeum. W Narodowym Uniwersytecie Technicznym Ukrainy „Kijowski Instytut Politechniczny" utworzono stypendium jego imienia, a na terenie tej uczelni odsłonięto pomnik naukowcu, a na jego cokole wyryto jego życiowe credo: „Moja miłość – Ukraina i matematyka".

Historia zna wspaniałe przykłady, kiedy tajemnice nauki były odkrywane młodymi badaczami.

Wybitny matematyk i fizyk teoretyczny Mikołaj Bogolubow (1909-1993) rozpoczął naukę na studiach doktoranckich, kiedy jeszcze nie miał nawet 15 lat. W 17 lat za osiągnięcia w dziedzinie matematyki otrzymał stopień doktora. Dwa lata później jego prace naukowe były odznaczone nagrodą Bolońskiej Akademii Nauk (Włochy), a w wieku 20 lat za wybitne osiągnięcia w dziedzinie matematyki decyzją Ogólnoukraińskiej Akademii Nauk, otrzymał stopień naukowy doktora habilitowanego nauk fizycznych i matematycznych bez obrony pracy doktorskiej.

Mikołaj Boholubow urodził się w Niżnym Nowogrodzie (Rosja), ale większą część swego życia i działalności naukowej on spędził w Ukrainie. Rodzina Mikołaja przejechała do Kijowa, kiedy ten miał roczek. Mikołaj od najmłodszych lat samodzielnie opracowywał kurs wyższej matematyki i fizyki, i trzynastoletni chłopak o niezwykłych zdolnościach otrzymuje pozwolenie na odwiedzanie wykładów w Kijowskim Uniwersytecie. Z wielkim entuzjazmem młodzeniec uczy się tu matematyki, fizyki, astronomii, bierze udział w pracy seminariów naukowych. Od 1923 roku jego lekcjami z matematyki kieruje znany naukowiec, matematyk i mechanik M. Kryłow (1879-1955). Ponad dwa dziesięciolecia Mikołaj Boholubow kieruje przeprowadzeniem olimpiad z matematyki wśród uczniów w Kijowie i na Ukrainie, był profesorem Kijowskiego i Moskiewskiego Uniwersytetów, pracował przy Akademii Nauki URSR, w Instytucie Matematycznym im. W. Stiekłowa, Akademii Nauki ZSRRR, Międzynarodowym centrum naukowym badań jądrowych i fizycznych – Zintegrowanym Instytucie badań jądrowych w miejscowości Dubna (Rosja).



Z ukraińskimi olimpiadami z matematyki nierozerwalnie związane jest imię jeszcze jednej wybitnej osobowości – Michała Jadrenka (1932-2004), który co roku aż do śmierci stał na czele jury Ogólnoukraińskiej olimpiady wśród uczniów.

Niezwykle owocną była jego droga życiowa. Urodził się w m. Drimajliwka w województwie Czernihowskim. Ze słów samego Michała Jadrenka, jego pierwszymi podręcznikami był elementarz i „Kobzar" Szewczenki. Ucząc się w szkole zdecydowanie postanowił zostać matematykiem. W marcu 1950 roku Michał usłyszał w radiu ogłoszenie, że w Kijowskim Uniwersytecie miała odbyć się się olimpiada z matematyki i chcąc wziąć w niej udział, napisał list do uniwersytetu z pytaniem o taką możliwość dla uczniów spoza Kijowa. Za jakiś czas otrzymał odpowiedź z zaproszeniem na olimpiadę. Wtedy Michał zajął w tych zawodach drugie miejsce spośród uczniów 10 klasy. W tym samym roku ukończył szkołę ze złotym medalem i dostał się do Kijowskiego Uniwersytetu na wydział mechaniki i matematyki, a po jego ukończeniu na studia doktoranckie. Obronił pracę doktorancką i pracę doktorską. Będąc jeszcze doktorantem, on aktywnie uczestniczy w organizacji Kijowskiej olimpiady z matematyki i przygotowaniu zadań konkursowych. Od 1970 roku staje na czele jury Ogólnoukraińskiej olimpiady z matematyki.

Praca z młodzieżą szkolną, poszukiwanie i wsparcie uzdolnionej młodzieży było powołaniem naukowca.

Ponad 40 lat swego życia Michał Jadrenko poświęcił rozwojowi szkolnej edukacji matematycznej, publikacji książek i zbiorów zadań z matematyki, tytanicznej pracy polegającej na wychowaniu matematycznie uzdolnionej młodzieży. W 2010 roku ku pamięci Michała Jadrenka nazwano Ogólnoukraiński turniej młodych matematyków, jeszcze jedne nie mniej popularne niż olimpiada zawody matematyczne na poziomie ogólnopaństwowym.

Całe swoje życie on pracowała w Kijowskim Uniwersytecie, ponad 30 lat kierował katedrą teorii prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej wydziału mechanicznego i matematycznego. Pod jego kierownictwem 45 doktorantów obroniło prace doktoranckie, 10 zostało doktorami habilitowanymi. W 1990 roku Michał Jadrenko został wybrany członkiem-korespondentem Narodowej Akademii Nauk Ukrainy,

Nie sposób wymienić wszystkie społeczne obowiązki Michała Jadrenka. Zwłaszcza on był wiceprezesem Ukraińskiego Towarzystwa Matematycznego, członkiem Biura oddziału matematyki Narodowej Akademii Nauk Ukrainy, redaktorem szeregi naukowych dzienników.

Mikołaj Jadrenko swoją owocną pracę naukową, pedagogiczną, metodyczną i społeczną pracę prowadził do ostatnich dni swego życia, które zakończyło się 28 września 2004 roku.

Jego córka Olga w swoich wspomnieniach o ojcu podkreśliła: „Całe swoje życie ojciec poświęcił ludziom, matematyce, Ukrainie…”.

ROZDZIAŁ 3

FUNKCJE

$y = kx + l$

$y = x^2 - 1$

$y = \frac{7}{x}$

W DANYM ROZDZIALE:

- **zapoznasz się** z pojęciem funkcji i jej wykresem, funkcji liniowej;
- **dowiesz się** o sposobach przedstawienia funkcji;
- **nauczysz się** znajdować obszar określenia i obszar wartości niektórych funkcji, stwarzać wykresy funkcji liniowej.

§ 22. Funkcja. Dziedzina i zakres funkcji. Sposoby przedstawienia funkcji. Zależność funkcjonalna między wielkościami jako model matematyczny sytuacji rzeczywistych

Pojęcie funkcji

W życiu codziennym często spotykamy się z zależnościami między różnymi wielkościami. Na przykład, obwód kwadratu zależy od długości jego boku, pole prostokąta od jego wymiarów, masa kawałka kredy od jego objętości, odległość, którą pokonuje obiekt ruchomy, od jego prędkości i czasu ruchu itp.

Rozpatrzymy przykłady *zależności między dwoma* wielkościami.

Przykład 1. Niech bok kwadratu wynosi a cm, a jego obwód wynosi P cm. Dla daždej wartości niewiadomej a można znaleźć określoną wartość niewiadomej P. Na przykład,

jeżeli $a = 5$, wtedy $P = 4 \cdot 5 = 20$;

jeżeli $a = 8$, wtedy $P = 4 \cdot 8 = 32$;

jeżeli $a = 1{,}2$, wtedy $P = 4 \cdot 1{,}2 = 4{,}8$.

Dlatego, obwód kwadratu zależy od długości jego bok. Model matematyczny tej zależności można zapisać w postaci wzoru $P = 4a$.

Ponieważ każda wartość długości boku kwadratu odpowiada pewna wartość jego obwodu, to mówimy, że mamy *zgodność* między długością boku kwadratu i jego obwodem (lub *zależność między niewiadomymi* a i P). Jednocześnie uważa się, że wartość $a = 5$ *odpowiada* wartości $P = 20$, lub wartość $P = 20$ *odpowiada* wartości $a = 5$.

Niewiadomą a, wartość której jest wybierana losowa, nazywamy ***niezależną niewiadomą***, a niewiadomą P, każda wartość której zależy od wybranej wartośći a, – ***zależną niewiadomą***.

Przykład 2. Niech samochód jedzie ze stałą prędkością 80 km/h. Odległość, którą on pokona, zależy od czasu jego ruchu.
Oznaczymy czas ruchu samochodu (w godzinach) symbolem t, a odległość, którą on pokonał (w kilometrach) – symbolem s. Dla każdej wartości niewiadomej t ($t \geqslant 0$) można znaleźć odpowiednią wartość s. Na przykład,

jeżeli $t = 1{,}5$, wtedy $s = 80 \cdot 1{,}5 = 120$;
jeżeli $t = 3$, wtedy $s = 80 \cdot 3 = 240$;
jeżeli $t = 4{,}5$, wtedy $s = 80 \cdot 4{,}5 = 360$.

Zależność niewiadomej s od niewiadomej t można przedstawić wzorem $s = 80t$, gdzie t – niezależna niewiadoma, a s – zależna niewiadoma.

Zwykle w matematyce niewiadomą oznaczają literą x, a niezależna niewiadomą literą y. W przykładach, które my rozpatrzyliśmy, każdej wartości niezależnej niewiadomej odpowiada *tylko jedna wartość* zależnej niewiadomej.

Jeżeli każdej wartości niezależnej niewiadomej odpowiada jedyna wartość zależnej niewiadomej, to taką zależność nazywamy *zależnością funkcjonalną* lub *funkcją*.

Niezależną niewiadomą nazywa także ***argumentem***, a o zależnej niewiadomą mówi się, że ona jest ***fukcją*** tego argumentu. We wspomnianych wyżej przykładach obwód kwadratu P jest funkcją od długości jego boku a, a odległość s, którą pokonał samochód ze stałą prędkością, jest fukncją od czasu ruchu t. Wartość zależnej niewiadomej nazywamy ***wartością funkcji***.

Dziedzina i zakres funkcji

Wszystkie wartości, które przybiera niezależna niewiadoma (argument), tworzą *dziedzinę funkcji.*
Wszystkie wartości, które przybiera zależna niewiadoma (funkcja), tworzą *zakres funkcji.*

Na przykład, dziedziną funkcji w przykładzie 1 są wszystkie liczby dodatnie a, czyli $a > 0$.

Dziedziną funkcji w przykładzie 2 są wszystkie nieujemne liczby t, czyli $t \geqslant 0$.

Dziedzina funkcji w 1. przykładzie składa się ze wszystkich dodatnich P, a zakres funkcji w 2. przykładzie – ze wszystkich liczb nieujemnych $s \geqslant 0$.

Przykład 3. Funkcję przedstawiono wzorem $y = \dfrac{8}{x-2}$. Znajdź:

1) dziedzinę funkcji;
2) wartość funkcji, która odpowiada wartości argumentu, która wynosi –2; 6; 10;
3) wartość argumentu, dla którego wartość funkcji wynosi –1..

Rozwiązanie. 1) Obszarem określenia funkcji są wszystkie te wartości x, dla których $\dfrac{8}{x-2}$ ma treść. Mianownik ułamka jest równy zero dla $x = 2$. Zatem dziedziną funkcji są wszystkie liczby oprócz liczby 2. Umówmy się, że w takich przypadkach można zapisywać: «$x \neq 2$», co oznacza, że wszystkie wartości oprócz liczby 2, tworzą dziedzinę funkcji.

2) Jeżeli $x = -2$, wtedy $y = \dfrac{8}{-2-2} = \dfrac{8}{-4} = -2$; jeżeli $x = 6$, wtedy $y = \dfrac{8}{6-2} = 2$; jeżeli $x = 10$, wtedy $y = \dfrac{8}{10-2} = 1$.

3) Żeby znaleźć x, dla którego $y = -1$, należy we wzorze funkcji zamiast y podstawić liczbę – 1. Wtedy otrzymamy równanie: $-1 = \dfrac{8}{x-2}$, pierwiastkiem którego jest liczba -6.

Dlatego wartość $y = -1$ funkcji przybiera dla $x = -6$.

Metody przedstawienia funckji

Przedstawić funkcję można na różne sposoby. W rozpatrzonych przykładach *funkcje przedstawiono za pomocą wzorów*: $P = 4a$; $s = 80t$; $y = \dfrac{8}{x-2}$. Dany sposób przedstawienia funkcji jest dosyć wygodny, ponieważ daje możliwość dla dowolnej wartości argumentu znajdywać odpowiednią do niego wartość funkcji. Jest również zwarty, ponieważ w większości przypadków wzór ma krótki zapis.

Istnieją również funkcje, które dla różnych wartości argumentów przedstawia się za pomocą różnych wzorów. Rozpatrzmy taką funkcję, jej zapis i jak ją opracować.

Przykład 4. Niech podano funkcję $y = \begin{cases} 2x - 7, \text{ якщо } x \leqslant -2; \\ x^2 + 1, \text{ якщо } x > -2. \end{cases}$

Dany zapis oznacza, że dla wartości argumentu x takich, że $x \leqslant -2$, wartość funkcji obliczamy według wzoru $y = 2x - 7$, a dla wartości argumentu x takich, ż $x > -2$, – według wzoru $y = x^2 + 1$.

Na przykład, eżeli $x = -3$, wtedy $y = 2 \cdot (-3) - 7 = -13$;
eżeli $x = -2$, wtedy $y = 2 \cdot (-2) - 7 = -11$;
eżeli $x = 0$, wtedy $y = 0^2 + 1 = 1$;
eżeli $x = 5$, wtedy $y = 5^2 + 1 = 26$.

Przedstawić funkcję można również za pomocą *tabeli*. Dany sposób podania funkcji nazywamy *tabelarycznym*. Rozpatrzymy go na podstawie przykładu.

Przykład 5. Co godziny, począwszy od ósmej do trzynastej, mierzono ciśnienie atmosferyczne, a otrzymane wartości zapisywano w tabeli

Czas t, h	8	9	10	11	12	13
Ciśnienie atmosferyczne p, mmHg	753	754	756	754	753	752

Tabela podano zgodność między czasem mierzenia t i ciśnieniem atmosferycznym, p. Dana zgodność jest fukcją, ponieważ każdej wartości niewiadomej t odpowiada jedyna wartość niewiadomej p. W danym przykładzie t jest niezależną niewiadomą, a p jest zależną niewiadomą. Dziedzina funkcji składa się z liczb 8; 9; 10; 11; 12; 13 (pierwszy rząd tabeli), a zakres wartości z liczb 752; 753; 754; 756 (drugi rząd tabeli).

Tabelaryczny sposób przedstawienia funkcji jest wygodny, ponieważ dla określenia wartości funkcji nie trzeba nic obliczać. Niewygodnością jest to, że tabela zazwyczaj zajmuje dużo miejsca i może nie zawierać właśnie tej wartości argumentu, która nas interesuje, na przykład, jeżeli nie ma jej w pierwszym rzędzie tablicy. Zwłaszcza, w przykładzie 5 niemożliwie znaleźć wartość funkcji, która odpowiada wartości argumentu, na przykład 8,5 lub 14.

Przedstawiać funkcję można również wyrażeniem. Taki sposób przedstawienia funkcji nazywamy *opisowym* lub *słownym*.

Przykład 6. Do każdej liczby naturalnej dopasujemy zgoność w postaci kwadratu tej liczby. Otrzymamy funkcję, dziedzina której składa się ze wszystkich liczb naturalnych, a zakres wartości z kwadratów tych licz

Zależności funkcjonalne jako model matematyczny sytuacji rzeczywistych

Rozpatrywaliśmy już zadania o treści praktycznej modelami matematycznymi których są równania. Modelami sytuacji rzeczywistych mogą być również zależności funkcjonalne.

Zależności funkcjonalne, które rozpatrzyliśmy w przykładach 2 i 5, są modelami matematycznymi sytuacji rzeczywistych: model ruchu samochodu o stałej prędkości, model mierzenia ciśnienia atmosferycznego w pewnym okresie czasu.

W przyszłości podczas nauki algebry będziemy wielokrotnie odwoływać się do modeli matematycznych sytuacji rzeczywistych.

Dawno, dawno temu...

Funkcja jest jednym z najważniejszych pojęć współczesnej matematyki.

B. Bolzano (1781–1848)

Zależności między różnymi wielkościami były przedmiotem zainteresowania jeszcze starożytnych matematyków. Zwłaszcza, w Babilonie opracowano tabelę kwadratów i sześcianów liczb, tabelę sum i iloczynów dwóch liczb, w Grecji odkryto stosunek między elementami okręgu. W pracach I, Newtona, Kartezjusza, G. Leibniza, P. de Fermata rozpatrywało się wiele zależności funkcjonalnych związanych z geometrią i fizyką. Na przykład, Pierre de Fermat (1601– 1665) i Kartezjusz (1596–1650) rozpatrywali funkcję jako zależność rzędnej punktu na krzywej od jej odciętej. Kartezjusz wykorzystywał pojęcie zmiennej wielkości.

Pojęcie „funkcja" (z łaciny functio – wykonanie, zakończenie) dla nazwy zależności po raz pierwszy wprowadziły Gottfried Leibniz (1646–1716). On powiązał funkcję z wykresami.

Szwajcarscy matematycy Johann Bernoulli (1667– 1748) i jego wybitny uczeń Leonhard Euler (1707– 1783) rozpatrywali funkcję jako wyrażenie analityczne, czyli wyrażenie stworzone z niewiadomych i liczb za pomocą tych lub innych operacji (działań) analitycznych.

P. G. Dirichlet (1805–1859)

Pojęcie funkcji jako zależności jednej niewiadomej od drugiej wprowadził czeski matematyk Bernard Bolzano, a uogólnił niemiecki matematyk Peter Gustav Dirichlet.

Najbardziej ogólne współczesne pojęcie funkcji zaproponowano w połowie *x*X wieku. Swój wkład w określenie tego pojęcia w ówczesne czasy zrobili matematycy M. Gunter, I. Gelfand, S. Sobolew, G. Szyłow.

Podaj przykłady zależności funkcjonalnej jednej niewiadomej od drugiej, nazwij w nich niezależną i zależną niewiadomą. ○ Co nazywamy funkcją, argumentem funkcji, wartością funkcji? ○ Co nazywamy dziedziną funkcji, co – zakresem wartości funkcji? ○ Jakie są metody przedstawienia funkcji? ○ Podaj własny przykład funkcji według wykorzystanego wzoru. ○ Podaj własny przykład zależności funkcjonalnej między wielkościami, które są modelem matematycznym sytuacji rzeczywistych?

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

1

973. (*Ustnie.*) Czy zależy obwód trójkąta równobocznego od długości jego boku? Czy obwód tego trójkąta jest funkcją od długości boku trójkąta? Jeżeli tak, to opisz funkcję za pomocą wzoru przy warunku, że strona trójkąta równa się a.

974. (*Ustnie.*) Jakie z danych zapisów tworzą funkcję? Wskaż zależną niewiadomą (argument) i zależną niewiadomą dla nich:

1) $a = 4b + 2$; 2) $4 + 2x = 2x - 7$; 3) $y = \frac{1}{4x-1}$;

4) $18 : 3 - 6 = 0$; 5) $p = t - t^3 - 2$; 6) $4a - 2 > 0$.

975. Które z danych zapisów przedstawiają funkcję? Wskaż zależną niewiadomą (argument) i zależną niewiadomą dla nich:

1) $m = 5n^2 - 2$; 2) $y = x^2 - x + 2$; 3) $40 - 30 > 5$;

4) $4x - 1 = 7 - 4x$; 5) $d = \frac{m-1}{m^2+1}$; 6) $3 \cdot 8 = 2 \cdot 12$.

976. (*Ustnie.*) Pole koła obliczają według wzoru $S = \pi r^2$, gdzie r – promień okręgu. Czy dany wzór przedstawia funkcję? Jeżeli tak, wskaż jej argument i dziedzinę.

977. Pole prostokąta z bokami x cm i 8 cm równa się S. Przedstaw za pomocą wzoru zależność S od x. Czy dany wzór przedstawia funkcję?

2

978. Objętość szczeœcianu o krawędzi a cm równa się V cm3. Przedstaw zależność V od a za pomocą wzoru. Czy dany wzór przedstawia funkcję? Znajdź według wzoru wartość V, jeżeli:

1) $a = 5$; 2) $a = 7$; 3) $a = \frac{3}{4}$.

979. Obwód trójkąta ze stronami x dm i 6 dm równa się P dm. Zapisz wzór zależności P od x. Dla wartości argumentu $x = 2; 4; 5; 15$ znajdź odpowiednie funkcje P.

980. (*Ustnie.*) Funkcję przedstawiono według wzoru $y = -2x$.
1) Która niewiadoma jest niezależną, a która zależną?
2) Znajdź wartości funkcji, które zgadzają się z wartościami argumentu –3; 0; 8.

981. Oblicz wartość funkcji przedstawionej według wzoru $y = 5x - 7$, dla wartości argumentu, które wynoszą –2; 0; 5; 10.

982. Znajdź wartości funkcji przedstawionej według wzoru $y = \dfrac{20}{x}$, dla wartości argumentu, które wynoszą –40; –10; 4; 5.

983. Funkcję przedstawiono według wzoru $y = -\dfrac{6}{x}$. W tabeli podano wartość jej argumentu. Odtwórz daną tabelę w zeszycie i wypełnij ją, obliczając odpowiednie wartości funkcji:

x	–12	–6	–5	–3	2	4	8	10
y								

984. Funkcję przedstawiono według wzoru $y = 4x + 3$. W tabeli podano wartość jej argumentu. Odtwórz daną tabelę w zeszycie i wypełnij ją, obliczając odpowiednie wartości funkcji:

x	–7	–5	–3	–1	2	4	6	8
y								

985. Ułóż tablicę wartości funkcji opisanej według wzoru $y = x^2 - 3$, dla wartości argumentu –3; –2; –1; 0; 1; 2.

986. Ułóż tablicę wartości funkcji opisanej według wzoru $y = 5 - x^2$, dla wartości argumentu –2; –1; 0; 1; 2; 3.

987. Pociąg jadąc z prędkością 65 km/h pokonuje w ciągu t h odległość s km. Przedstaw za pomocą wzoru zależność s od t. Oblicz wartości funkcji, które są zgodne z wartościami argumentu, które wynoszą 1; 2,4; 3; 5,8.

988. Każda wartość naturalna n odpowiada za trzy razy większą od niej liczbę N. Przedstaw za pomocą wzoru zależność N od n. Oblicz wartości funkcji, które są zgodne z wartościami argumentu, które wynoszą 2; 7; 13; 20.

989. Znajdź dziedzinę funkcji:

1) $y = 3x - 5$; 2) $y = \dfrac{2x+3}{5}$; 3) $y = \dfrac{8}{x}$; 4) $y = \dfrac{7}{x+2}$.

990. Znajdź dziedzinę funkcji:

1) $y = 2x + 3$; 2) $y = \frac{8x-3}{7}$; 3) $y = -\frac{6}{x}$; 4) $y = \frac{4}{x-3}$.

991. Znajdź wartość argumentu, dla którego:

1) funkcja $y = -3x$ przybiera wartość -6; 9; 15;
2) funkcja $y = 5x - 1$ przybiera wartość -1; 4; 14.

992. Znajdź wartość argumentu, dla którego:

1) funkcja $y = 4x$ przybiera wartość -8; 0; 12;
2) funkcja $y = 3 - 2x$ przybiera wartość -1; 3; 17.

993. Funkcję opisano tabelarycznie:

x	–2	–1	0	1	2
y	–5	–3	–1	2	7

Znajdź:
1) wartość funkcji dla $x = -2$; 0; 1;
2) wartość argumentu, dla którego wartość funkcji wynosi -3; 2; 7;
3) dziedzinę funkcji;
4) zakres funkcji.

994. Funkcję opisano tabelarycznie:

x	1	2	3	4	5
y	–2	0	2	5	7

Znajdź:
1) wartość funkcji dla wartości argumentu 1; 3; 4;
2) wartość argumentu, dla którego $y = 0$; 5; 7;
3) dziedzinę funkcji;
4) zakres funkcji.

3 **995.** Funkcję przedstawiono według wzoru $y = \frac{3}{4}x$. Odtwórz tabelę w zeszycie i wypełnij jej puste komórki:

x	–8		1,6		20,8		
y		–9		$-\frac{3}{8}$		$1\frac{5}{7}$	20,7

996. Funkcję przedstawiono według wzoru $y = \frac{3}{5}x$. Odtwórz tabelę w zeszycie i wypełnij jej puste komórki:

x	−10		0		8,5	
y		−1,2		$\frac{3}{5}$		13,5

997. Znajdź dziedzinę funkcji przedsztawionej według wzoru:

1) $y = \dfrac{5}{x^2 - 9}$; 2) $y = \dfrac{17}{x^2 + 4}$; 3) $y = \dfrac{9}{x(x - 3)}$;

4) $y = \dfrac{7x + 1}{x^2 + x}$; 5) $y = \dfrac{9}{(x - 1)(x + 4)}$; 6) $y = \dfrac{15}{x - 2} + \dfrac{7}{x + 3}$.

998. Znajdź dziedzinę funkcji:

1) $y = \dfrac{7}{x^2 - 4}$; 2) $y = \dfrac{13}{x^2 + 1}$; 3) $y = \dfrac{14}{(x + 2)x}$;

4) $y = \dfrac{9}{x^2 - x}$; 5) $y = \dfrac{7}{(x + 5)(x - 3)}$; 6) $y = \dfrac{14}{x + 3} + \dfrac{7}{x - 1}$.

999. Temperatura początkowa wody wynosiła 20 °C. Podczas podgrzewania ona podnosiła się co minutę 5 °C.

1) Przedstaw za pomocą wzoru zależność temperatury wody T od czasu t jej podgrzewania.
2) Znajdź wartość T, która odpowiada wartości argumentu t = 7; 9; 10.
3) Znajdź wartości t, którym odpowiada T = 45; 60; 70.
4) Znajdź wartość t, zgodnie z którym woda zakipi.

1000. Rowerzystka zatrzymała się na odległości 10 km od miasta. A za jakiś czas kontynuowała ruch z prędkością 15 km/h.

1) Przedstaw za pomocą wzoru zależność odległości s (w km), którą ogółem pokonała rowerzystka, od czasu t (w h), który odlicza się po zatrzymaniu się.
2) Znajdź wartość s, która odpowiada wartości t = 1; 2; 5.
3) Znajdź wartość t, dla której s = 34; 55; 70.

1001. W tabeli przedstawiono zależność funkcji y od argumentu x.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−3	−2	1	−3	5	1	6	−2	−3

Znajdź: 1) wartość y, jeżeli x = −4; −1; 0; 3;
2) wartości x, którym odpowiada y = −3; −2; 5;
3) wartość x, której odpowiada równa jej wartość y;
4) dziedzinę funkcji;
5) zakres funkcji.

1002. W tabeli przedstawiono zależność funkcji y od argumentu x.

x	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6	8
y	–1	2	4	2	4	7	2	–1	9

Znajdź:
1) wartość y, jeżeli $x = -8; -2; 4; 6$;
2) wartość x, którym odpowiada $y = -1; 4; 7$;
3) wartość x, której odpowiada przeciwna do x wartość y;
4) dziedzinę funkcji;
5) zakres funkcji.

1003. Utwórz tabelę wartości funkcji $y = 0{,}6 - 0{,}3x$, gdzie $-2 \leqslant x \leqslant 5$, z krokiem wynoszącym 1. Korzystając z danej tabeli, wskaż:
1) wartość funkcji, która odpowiada wartości argumentu, który wynosi 0;
2) wartość argumentu, dla którego wartość funkcji wynosi 0.

4

1004. Znajdź wartość funkcji dla $x = -5; 0; 3$, jeżeli:

1) $y = \begin{cases} 4x - 3, & \text{jeżeli: } x < 0, \\ -2x, & \text{jeżeli: } x \geqslant 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 7, & \text{jeżeli: } x \leqslant 1, \\ x^2, & \text{jeżeli: } x > 1. \end{cases}$

1005. Znajdź wartość funkcji dla wartości argumentu, która wynosi $-2; 0; 4$, jeżeli:

1) $y = \begin{cases} 7x - 2, & \text{jeżeli: } x \leqslant 0, \\ -3x, & \text{jeżeli: } x > 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 3, & \text{jeżeli: } x \leqslant 2, \\ -x^2, & \text{jeżeli: } x > 2. \end{cases}$

1006. Znajdź najmniejszą wartość funkcji $y = x^2 + 2x + 5$.

Ćwiczenia powtórzeniowe

1007. Oblicz: $\frac{8}{15} \cdot 0{,}5625 - \left(\frac{11}{24} + 1\frac{13}{36}\right) \cdot 1{,}44 + 2\frac{8}{25}$.

1008. Jakimi jednomianami należy wypełnić komórki, żeby równość przekształciła się w tożsamość:
1) $(3x - 2y)(\square + \square) = 9x^2 - 4y^2$;
2) $(5m + \square)(5m - \square) = 25m^2 - 36$;
3) $(7c^2 - \square)(\square + 3p) = 49c^4 - 9p^2$;
4) $(4m + 9a^2)(\square - \square) = 81a^4 - 16m^2$?

1009. Bok kwadratu jest o 4 cm większy niż jeden bok prostokąta **i o 5 cm mniejszy od drugiego.** Znajdź bok kwadratu, jeżeli jego pole jest o 10 cm2 większy niż pole prostokąta.

Matematyka życia

1010. Wiadomo, że 60 kg makulatury oszczędza jedno drzewo. Uczniowie siódmych klas szkoły zebrali 300 kg makulatury. Ile drzew oszczędzili uczniowie?

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

1011. W trzech opakowaniach leżą balony: w pierwszym dwa białe (BB), w drugim dwa czarne (CC), w trzecim biały i czarny (BC). Na opakowaniach są tabele z napisami: BB, CC i BC, ale zawartość żadnego z opakowań nie zgadzała się z napisem na jej tabeli. Z jakiego opakowania wystarczy losowo wziąć tylko jeden balon, żeby określić kolor balonów, które leżą w każdym opakowaniu?

§ 23. Wykres funkcji. Graficzna metoda przedstawienia funkcji

Pojęcie o wykresie funkcji

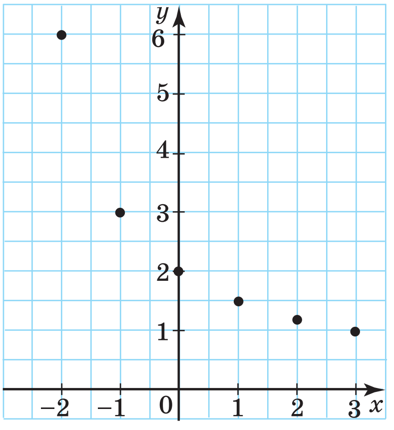
W 6 klasie już rozpatrywaliśmy wykres zależności między dwoma wielkościami. Rozpatrzmy, czym jest ***wykres funkcji***.

Przykład 1. Niech podano funkcję $y = \dfrac{6}{x+3}$, gdzie $-2 \leqslant x \leqslant 3$. Znajdziemy wartość danej funkcji dla wartości całkowitych argumentu i zapiszemy wyniki w tabeli:

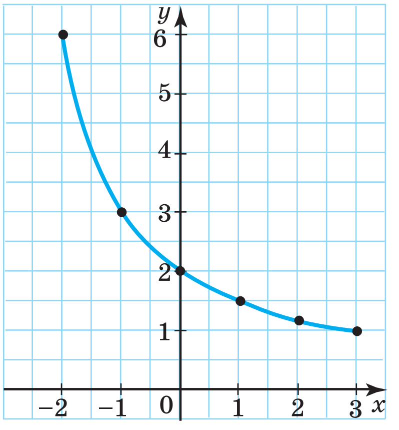
x	–2	–1	0	1	2	3
y	6	3	2	1,5	1,2	1

Oznaczymy na płaszczyźnie współrzędnych punkty (x; y), współrzędne których weźmiemy z tabeli. To punkty (–2; 6), (–1; 3), (0; 2), (1; 1,5), (2; 1,2), (3; 1) (rys. 23.1). Jeżeli wziąć inne wartości x z przedziału od –2 do 3 i według wzoru $y = \dfrac{6}{x+3}$ obliczyć odpowiednie do nich wartości y, to otrzymamy inne pary wartości x i y. Każdej z tych par odpowiada określony punkt na płaszczyźnie współrzędnych.

Wszystkie takie punkty tworzą figurę, którą nazywamy *wykresem funcji* $y = \dfrac{6}{x+3}$, gdzie $-2 \leqslant x \leqslant 3$ (rys. 23.2).



Rys. 23.1



Rys. 23.2

Wykresem funkcji nazywamy figurę, która składa się ze wszystkich punktów na płaszczyźnie współrzędnych, odcięte których to wartości argumentu, a rzędne – odpowiednie wartości funkcji.

Przykład 2. Narysuj wykres funkcji $y = x^2 - 1$, jeżeli $-3 \leqslant x \leqslant 2$.

Rozwiązanie. Ułożymy tabelę wartości funkcji dla wartości całkowitych argumentu:

x	–3	–2	–1	0	1	2
y	8	3	0	–1	0	3

Punkty, współrzędne których podano w tabeli, oznaczymy na płaszczyźnie współrzędnych oznaczymy i połączymy je linią (rys. 23.3). Otrzymamy wykres funkcji $y = x^2 - 1$ dla $-3 \leqslant x \leqslant 2$.

Uwaga: im mniejszy będzie odstęp między wartościami argumentu, tym bliżej znajdą się punktu na płaszczyźnie współrzędnych, więc, bardziej dokładniej będzie narysowany wykres.

Określenie pewnych cech funkcji na podstawie jej wykresu

Na podstawie wykresu można od razu wskazać, dla jakich wartości argumentu wartości funkcji będą dodatnie, dla jakich – ujemne, dla jakich są równe zero. Na podstawie wykresu można również określić dziedzinę i zakres funkcji.

Zerem funkcji nazywamy taką wartość argumentu, dla którego wartość funkcji równa się zero.

Wiadomo, że zera funkcji są odciętymi puntków przecięcia wykresu funkcji z osią odciętych, ponieważ rzędna jest wartością funkcji i właśnie w tych punktach ona równa się zero.

Przykład 3. Wykorzystując wykres funkcji $y = x^2 - 1$, gdzie $-3 \leqslant x \leqslant 2$, znajdź: 1) zera funkcji; 2) zakres funkcji; 3) wartości argumentu, dla których funkcja przybiera wartości dodatnich; 4) wartości argumentu, dla których funkcja przybiera wartości ujemnych.

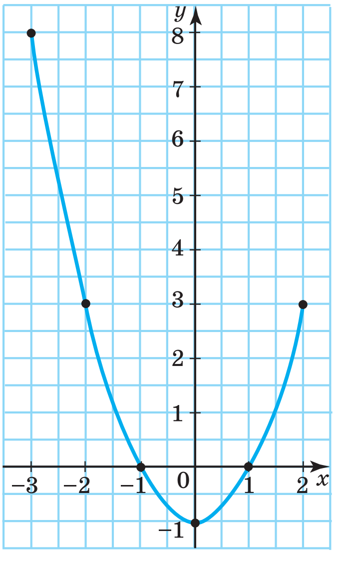
Rozwiązanie. Wykres funkcjiї $y = x^2 - 1$ przedstawiono na rysunku 23.3.

1) Zera funkcji to odcięte punktów przecięcia wykresu funkcji z osią x. Dlatego, $x = -1$ i $x = 1$ – są zerami funkcji. Zauważ, że zera funkcji można znaleźć również bez wykorzystania wykresu danej funkcji. Na przykład, wystarczy rozwiązać równanie $x^2 - 1 = 0$.

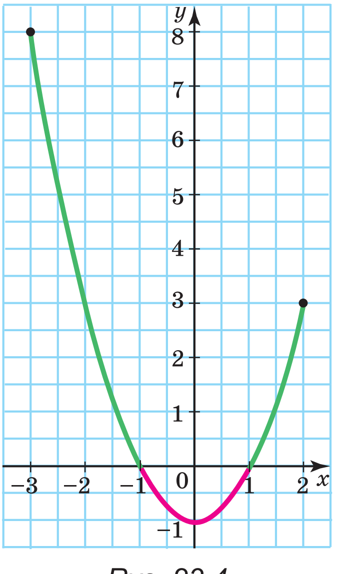
2) Funckja może przybierać dowolne wartości od –1 do 8. Dlatego dziedziną funkcji są wszystkie takie wartości y, które $-1 \leqslant y \leqslant 8$.

3) Dla wartości x takich, które $-3 \leqslant x < -1$, punkty wykresu położone są wyżej osi odciętych. Dlatego funkcja przybiera dodatnie wartości dla $-3 \leqslant x < -1$. Na rys. 23.4 tą część wykresu oznaczono na zielono.

Tak samo powyżej osi odciętych znajdują się punkty wykresu dla $1 < x \leqslant 2$. Dlatego dla $1 < x \leqslant 2$ funkcja ponownie przybiera wartości dodatkowe (na rys. 23.4 tą część wykresu również oznaczono na zielono). Dlatego, dla $-3 \leqslant x < -1$ i $1 < x \leqslant 2$ unkcja przybiera wartości dodatnie.



Rys. 23.3



Rys. 23.4

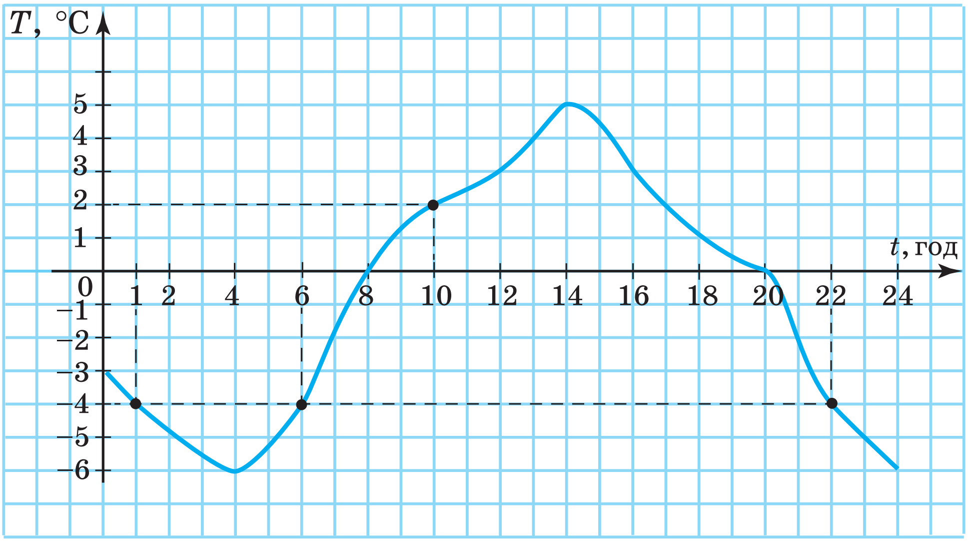
4) Dla wartości x takich, które $-1 < x < 1$, punkty wykresu są położone niżej osi odciętych (na rys. 23.4 tą część wykresu oznaczono na czerwono). Dlatego dla $-1 < x < 1$ ffunkcja przybiera wartości ujemne.

Graficzna metoda przedstawienia funkcji

Korzystając z wykresu funkcji, dla dowolnej wartości argumentu z dziedziny funkcji można znaleźć odpowiedającą jej wartość funkcji. Również na podstawie wykresu można utworzyć tabelę wartości funkcji.

Dochodzimy więc do wniosku, że *funkcję można przedstawić za pomocą wykresu*. Daną metodę przedstawienia funkcji nazywamy graficzną. Jest ona wygodną swoją prostotą, dlatego często wykorzystuje się ją do zilustrowania zjawisk, które towarzyszą praktycznym działaniom człowieka lub mają miejsce w otaczającym świecie.

Przykład 4. Na rysunku 23.5 zilustrowano wykres zmiany temperatury powietrza w ciągu doby, uzyskany dzięki specjalnemu urządzeniu – termografowi. Wykorzystując dany wykres znajdź:
1) jaka była temperatura o 10 godzinie;
2) o której godzinie temperatura była –4 °C.



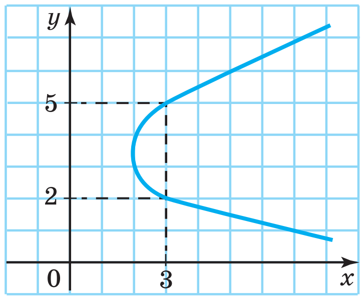
Rys. 23.5

Rozwiązanie. 1) Przez punkt osi t o współrzędnych (10; 0) rysujemy prostopadłą do tej osi (rys. 23.5). Punkt przecięcia tej prostopadłej z wykresem temperatury ma współrzędne (10; 2). Dlatego, o 10 godzinie temperatura powietrza była 2 °C.

2) Przez punkt osi T o współrzędnych (0; –4) rysujemy prostopadłą do tej osi (rys. 23.5). Dana prostopadła przecina wykres w punktach (1; –4), (6; –4) i (22; –4). Dlatego, temperatura powietrza –4 °C była o 1 godzinie, o 6 godzinie i o 22 godzinie.

Należy pamiętać, że nie każda figura na płaszczyźnie współrzędnych jest wykresem pewnej funkcji. Na przykład, figura na rysunku 23.6 nie jest wykresem żadnej z funkcji, ponieważ są takie wartości x, którym odpowiadają dwie wartości y. Na przykład, wartości $x = 3$ odpowiadają wartości $y = 2$ i $y = 5$.

To oznacza, że zależność między x i y, wykres której zilustrowano na rysunku 23.6, nie jest funkcjonalna, ponieważ istnieje co najmniej jedna wartość x, której odpowiada więcej niż jedna wartość y. Graficznie oznacza to, że istnieje co najmniej jedna prosta, prostopadła do osi odciętych, która przecina daną figurę więcej niż w jednym punkcie. Biorąc pod uwagę, że przy zależności funkcjonalnej każdej wartości argumentu odpowiada jedna wartość funkcji, wówczas każda prosta prostopadła do osi odciętych, powinna przecinać wykres funkcji nie więcej niż w jednym punkcie.



Rys. 23.6

Więc,

> żeby figura, którą zilustrowano na płaszczyźnie współrzędnych, była wykresem określonej funkcji, trzeba, żeby każda prosta prostopadła do osi odciętych, przecinała daną figurę nie więcej niż w jednym punkcie.

Czym jest wykres funkcji? ○ Jak narysować wykres funkcji? ○ Wyjaśnij, jak za pomocą wykresu znaleźć wartość funkcji, która odpowiada danej wartości argumentu, oraz wartość argumentu, której odpowiada dana wartość funkcji (na przykładzie jednego z wykresów na rys. 23.2, 23.3 i 23.5). ○ Jak dowiedzieć się, że figura na płaszczyźnie współrzędnych , jest wykresem funkcji?

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

2

1012. Na rysunku 23.7 zilustrowano wykres funkcji. Według wykresu:

1) wypełnij tabelę w zeszycie:

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–0,5	0	1	2	3
y									

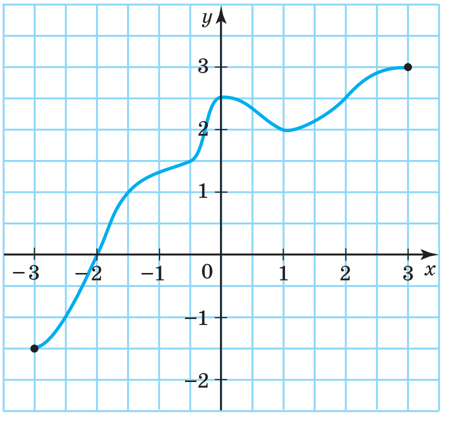
2) znajdź dziedzinę i zakres funkcji.

1013. Na rysunku 23.8 zilustrowano wykres funkcji. Według wykresu:

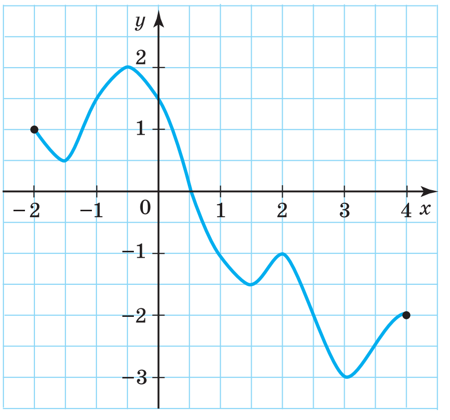
1) wypełnij tabelę w zeszycie:

x	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y													

2) znajdź dziedzinę i zakres funkcji.



Rys. 23.7



Rys. 23.8

1014. Narysuj wykres funkcji $y = x - 3$, де $-2 \leqslant x \leqslant 5$, tworząc tabelę dla całkowitych wartości argumentu.

1) Czy należy do wykresu funkcji punkt $A(3; 0)$; punkt $B(-1; 2)$?
2) Znajdź według wykresu wartość argumentu, jeżeli $x = 2$; $x = 4$.
3) Znajdź według wykresu wartość argumentu, któremu odpowiada wartość funkcji $y = -3$; $y = 2$.

1015. Narysuj wykres funkcji $y = x + 2$, gdzie $-4 \leqslant \mathrm{x} \leqslant 3$, tworząc tabelę dla całkowitych wartości argumentu.

1) Czy należy do wykresu funkcji punkt $C(2; 5)$; punkt $D(-2; 0)$?
2) Znajdź według wykresu wartość funkcji dla $x = -3$; $x = 1$.
3) Znajdź według wykresu wartość argumentu, któremu odpowiada wartość funkcji $y = 1$; $y = 5$.

1016. Znajdź zera funkcji bez rysowania wykresu:

1) $y = 5x$; 2) $y = 3x - 6$; 3) $y = -\dfrac{x}{10}$; 4) $y = \dfrac{5 - x}{8}$.

1017. Znajdź zera funkcji bez rysowania wykresu:

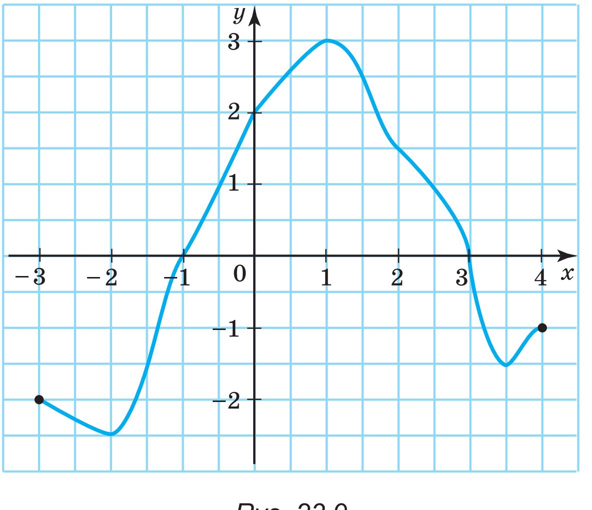
1) $y = -3x$; 2) $y = 12 - 4x$; 3) $y = \dfrac{x}{3}$; 4) $y = \dfrac{x + 2}{4}$.

1018. Według wykresu zilustrowanego na rysunku 23.5, znajdź:

1) jaką była temperatura powietrza o 3 godzinie; o 5 godzinie; o 7 godzinie; o 21 godzinie;
2) o której godzinie temperatura powietrza była –5 °C; 0 °C; 5 °C.

3 **1019.** Według wykresu zilustrowanego na rysunku 23.5, znajdź:
1) jaką była temperatura powietrza o godzinie 00:00; o 2 godzinie; o 9 godzinie; o 12 godzinie; o 18 godzinie;
2) o której godzinie temperatura powietrza wynosiła –6 °C; –2 °C; 1 °C; 3 °C;
3) jaką była najniższa temperatura i o której godzinie;
4) jaką była najwyższa temperatura i o której godzinie;
5) w ciągu jakiego okresu czasu temperatura zwiększała się;
6) w ciągu jakiego okresu czasu temperatura zmniejszała się;
7) w ciągu jakiego okresu czasu temperatura powietrza była niższa niż 0 °C;
8) w ciągu jakiego okresu czasu temperatura powietrza była wyższa niż 0 °C.

1020. Według wykresu zilustrowanego na rysunku 23.9, znajdź:
1) wartość y, jeżeli $x = -3; -2; -0{,}5; 1{,}5; 4$;

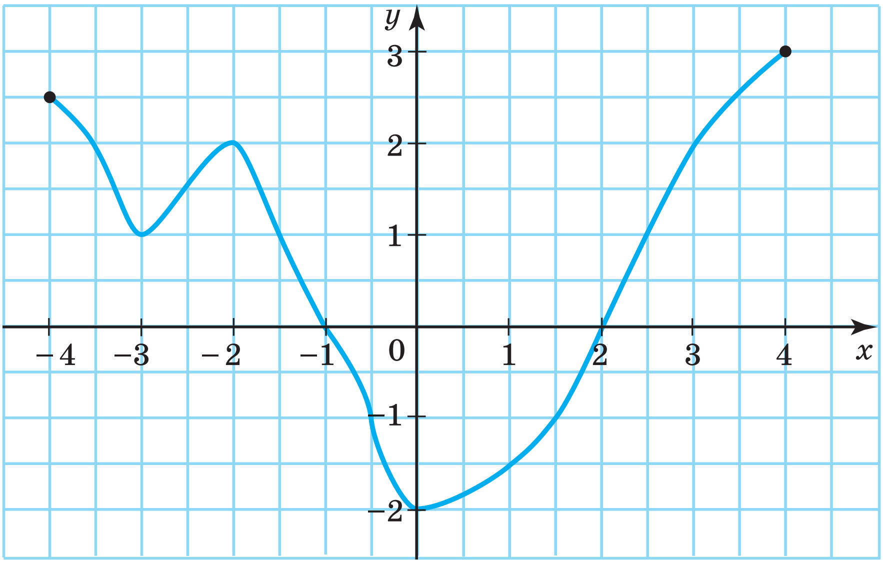


Rys. 23.9

2) wartość x, którym odpowiada $y = -2{,}5; -1{,}5; 1$;
3) zera funkcji;
4) wartości argumentu, dla których funkcja przybiera wartości dodatnich;
5) wartości argumentu, dla których funkcja przybiera wartości ujemnych.

1021. Według wykresy funkcji (rys. 23.10) znajdź:

1) wartość y, jeżeli $x = –3,5; –2; –1,5; 0; 1; 2,5$;
2) wartość x, którym odpowiada $y = –1; 1; 2; 3$;
3) zera funkcji;
4) wartości argumentu, dla których funkcja przybiera wartości ujemne;
5) wartości argumentu, dla których funkcja przybiera wartości dodatnie.



Rys. 23.10

1022. Wyjaśnij, bez rysowania wykresu, czy należy do wykresu funkcji $y = x^2 – 3x$ punkt:

1) $(1; –2)$; 2) $(–2; –2)$; 3) $(0; –3)$; 4) $(–1; 4)$.

1023. Wyjaśnij, bez rysowania wykresu funkcji $y = 2x + x^2$, czy należy do niego punkt:

1) $(1; 3)$; 2) $(–1; 3)$; 3) $(0; 0)$; 4) $(–2; 4)$.

1024. Łamana ABC jest wykresem pewnej funkcji, gdzie $A(–3; 2)$, $B(1; 6)$, $C(4; 0)$. Narysuj dany wykres i według niego znajdź:

1) wartości funkcji odpowiadające wartościom $x = –2; 0; 1$;
2) wartości argumentu odpowiadające wartościom $y = 2; 4; 6$.

1025. Łamana MNL jest wykresem pewnej funkcji, gdzie $M(–2; –1)$, $N(2; 3)$, $L(6; –1)$. Narysuj dany wykres i według niego znajdź:

1) wartości funkcji odpowiadające wartościom $x = –2; 0; 2; 5$;
2) wartości argumentu odpowiadające wartościom $y = –1; 1; 3$.

1026. Znajdź zera funkcji bez rysowania wykresu:

1) $y = x^2 - 4x$; 2) $y = 16 - x^2$; 3) $y = 2x^2 + 10x$.

1027. Znajdź zera funkcji bez rysowania wykresu:

1) $y = x^2 + 2x$; 2) $y = x^2 - 25$; 3) $y = 12x - 3x^2$.

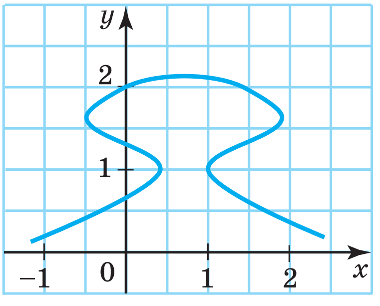
1028. Narysuj wykres funkcji:

1) $y = \dfrac{8 - x}{2}$, де $-2 \leqslant x \leqslant 10$; 2) $y = x(4 + x)$, де $-5 \leqslant x \leqslant 1$.

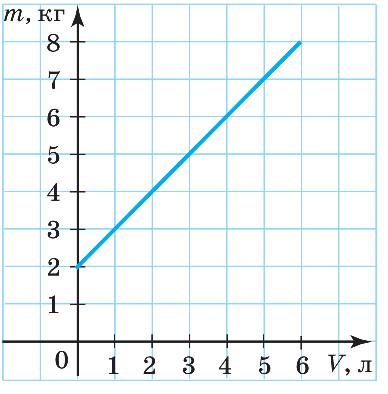
1029. Narysuj wykres funkcji:

1) $y = \dfrac{x + 3}{2}$, де $-5 \leqslant x \leqslant 7$; 2) $y = x\,(4 - x)$, де $-1 \leqslant x \leqslant 5$.

1030. Czy figura zilustrowana na rysunku 23.11 jest wykresem pewnej funkcji?



Rys. 23.11



Rys. 23.12

4

1031. Na rysunku 23.12 zilustrowano wykres zależności masy m (w kg) wiadra z wodą od objętości V (w l) wody w nim. Znajdź na podstawie wykresu:

1) masę pustego wiadra;
2) masę wiadra, w którym jest 4 l wody;
3) masę 1 l wody;
4) objętość wody w wiadrze, jeżeli masa wiadra z wodą wynosi 8 kg.

Ćwiczenia powtórzeniowe

1032. Uprość wyrażenie:

1) $(a - 5)(a + 5) - a(a + 7)$; 2) $m(m - 4) + (9 - m)(m + 9)$;
3) $2a(a - b) - (a - b)^2$;
4) $(q + 5p)(5p - q) - (p - 5q)^2 - 10pq$.

1033. Udowodnij, że różnica między dowolną trzycyfrową liczbą naturalną i sumą jego cyfr jest wielokrotnością liczby 9.

Matematyka życia

1034. 1) Używanie bieżącej wody do mycia naczynia lub prania pościeli powoduje bezużyteczne zużycie wody średnio do 15 l na minutę. Ile wody można zaoszczędzić w ciągu pół godziny prania, jeżeli prawidłowo odnieść się zużycia wody?
2) *Działania praktyczne.* Dowiedz się, jaka jest taryfa na wodę (cena za 1 m3 wody) w twojej miejscowości i oblicz, ile pieniędzy można zaoszczędzić w ciągu jednej godziny, jeżeli prawidłowo odnosić się do zużycia wody.

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

1035. Udowodnij, że jeżeli n – jest liczbą naturalną (n > 1), to liczba $4^n - 3$ nie może być kwadratem liczby naturalnej.

§ 24. Funkcja liniowa, jej wykres i cechy

Pojęcie o funkcji liniowej

Przykład 1. Niech masa jednego gwoździa wynosi 4 g, a masa pustej skrzynki 600 g. Wtedy zależność między masą m (w g) skrzynki z gwoździami i ilością x gwoździ w nim (x jest liczbą naturalną) można przedstawić według wzoru $m = 4x + 600$.

Przykład 2. Niech miesięczna pensja ekspedientki składa się ze stawki w wysokości 1500 UAH i premi w wysokości 1 % od wartości sprzedanego towaru. Wtedy zależność między pensją y (w UAH) i wartością x (w UAH) sprzedanego towaru można przedstawić według wzoru $y = 0{,}01x + 1500$, де $x > 0$.

W obu wyżej przedstawionych przykładach funkcje przedstawiono według wzoru w postaci $y = kx + l$, де k i l – określone liczby.

Liniową nazywana jest funkcja w postaci $y = kx + l$,
gdzie x jest niezależną niewiadomą, k i l są określonymi liczbami.

Liczba k i l nazywają się ***współczynnikami funkcji liniowej***.

Wykres funkcji liniowej

Dowiemy się, jaką postać ma wykres funkcji liniowje.

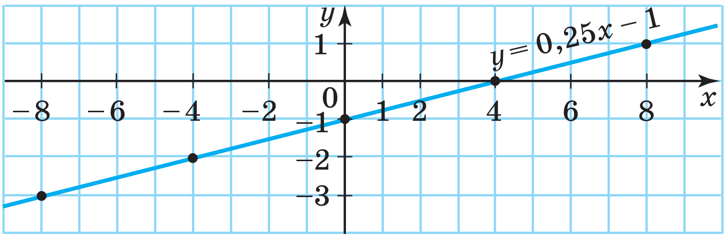
We wzorze $y = kx + l$ niewiadomej niezależnej x można przypisać dowolną wartość, dlatego dziedziną funkcji liniowej są wszystkie liczby. Dlatego dla narysowania wykresu funkcji liniowej można wybrać dowolne wartości x, najlepiej te, które będą wygodne do obliczenia wartości y.

Przykład 3. Narysować wykres funkcji $y = 0{,}25x - 1$.

Rozwiązanie. Funkcja jest liniową. Utworzymy dla niej tabelę z kilkoma wartościami niezależnej niewiadomej x i odpowiednich jej wartości funkcji y:

x	–8	–4	0	4	8
y	–3	–2	–1	0	1

Oznaczymy na płaszczyźnie współrzędnych punkty, współrzędne których otrzymano w tabeli. Za pomocą linijki lekko przekonać się, że wszystkie oznaczone punkty leżą na jednej prostej. Ta prosta jest wykresem funkcji liniowej $y = 0{,}25x - 1$ (rys. 24.1).



Rys. 24.1

Wykresem dowolnej funkcji liniowej jest *prosta*.

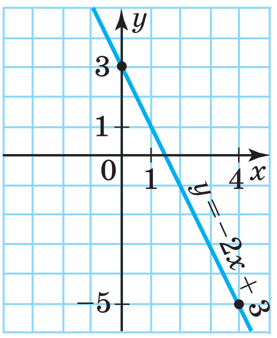
Ponieważ prosta jest jednoznacznie przedstawiana dwoma swoimi punktami, to dla narysowania prostej, która jest wykresem funkcji liniowej, wystarczy znaleźć współrzędne dwóch punktów wykresu, oznaczyć je na płaszczyźnie współrzędnych i narysować przechodzącą przez nie prostą.

Przykład 4. Narysować wykres funkcji $y = -2x + 3$.

Rozwiązanie. Utworzymy tabelę dla dwóch dowolnych wartości argumentów. Otrzymane punkty oznaczymy na płaszczyźnie współrzędnych i narysujemy przechodzącą przez nie prostą.

x	0	4
y	3	–5

Wykres funkcji $y = -2x + 3$ zilustrowano na rysunku 24.2.



Rys. 24.2

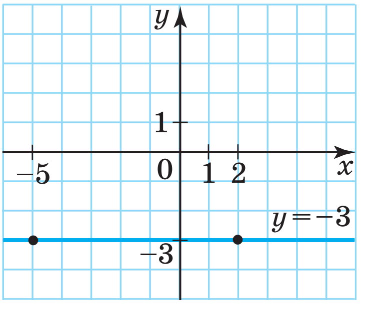
Jeżeli współczynniki funkcji liniowej są ułamkami, to dla znalezienia dwóch punktów jej wykresu stosowne jest wybranie takich wartości całkowitych argumentu, żeby otrzymać wskaźniki całkowite funkcji. Na przykład, wartości funkcji $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ *będą całkowite dla* $x = -1$ *i* $x = 5$, i *dla narysowania wykresu otrzymamy punkty* $(-1; -1)$ *i* $(5; 1)$.

Funkcja rodzaju y = l

Jeżeli $k = 0$, wzór $y = kx + l$ będzie w postaci $y = 0x + l$, czyli $y = l$. Funkcja liniowa w postaci $y = l$ przybiera jednakowe wartości dla dowolnych wartości x.

Przykład 5. *Narysować wykres funkcji* $y = -3$.

Rozwiązanie. Dowolnej wartości x odpowiada taka sam wartość y, która wynosi -3. Wykresem funkcji jest prosta, która przechodzi przesz punkty w postaci $(x; -3)$, gdzie x – dowolna liczba. Wybierzemy dwie dowolne z nich, na przykład, $(-5; -3)$ i $(2; -3)$, i przeprowadzimy przez nie prostą (rys. 24.3). Dana prosta i jest wykresem funkcji $y = -3$. Ona jest równoległa do osi x.



Rys. 24.3

Prosta w postaci y = l jest równoległa do osi x.

Żeby narysować wykres funkcji $y = l$, wystarczy oznaczyć na osi y punkty ze współrzędnymi $(0; l)$ i przeprowadzić przez nie prostoą, równoległą do osi x.

Proporcjonalność prosta

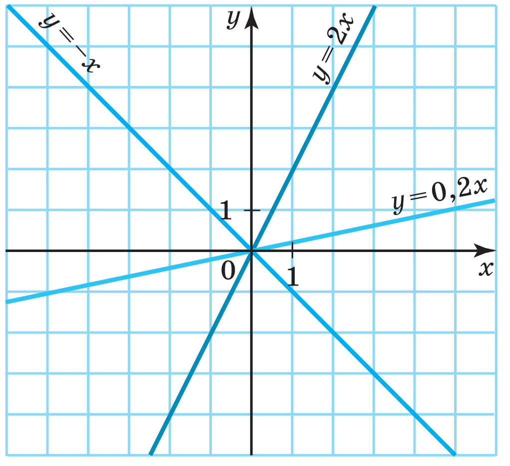
Dla $l = 0$, $k \neq 0$, wzór $y = kx + l$ przybiera postać $y = kx$.

Funkcję w postaci $y = kx$, gdzie x – niezależna niewiadoma, k – odmienna od zera liczba, nazywamy *prostą proporcjonalnością.*

Ponieważ proporcjonalność prosta jest oddzielnym przypadkiem funkcji liniowej i $y = 0$ dla $x = 0$, dlatego

wykresem proporcjonalności prostej jest prosta przechodząca przez początek współrzędnych.

Na rysunku 24.4 zilustrowano wykresy proporcjonalności prostych $y = -x$; $y = 2x$ i $y = 0,2x$.



Rys. 24.4

Cechy funkcji liniowej

Podsumujmy cechy *funkcji liniowej* $y = kx + l$.

1. Dziedzina funckji składa się ze wszystkich liczb.
2. Zakres funkcji dla $k \neq 0$ składa się ze wszystkich liczb,; dla $k = 0$ – tylko z jednej wartości – liczby l.
3. Wykresem funkcji jest prosta.

Przecięcie wykresu funkcji osiami współrzędnych

Jedną z najważniejszych cech funkcji jest występowanie *punktów przecięcia jej wykresu z osiami współrzędnych*.

Jeżeli wykres funkcji już jest przedstawiony na płaszczyźnie współrzędnych, to takie punkty można znaleźć bezpośrednio z rysunku. Na przykład. Na rysunku 24.1 punktem przecięcia wykresu funkcji $y = 0,25x - 1$ z osią odciętych jest punkt (4; 0), a z osią rzędnych jest punkt (0; –1). W takim przypadku mówimy, że punkty przecięcia znaleziono graficznie.

Ale metoda graficzna nie zawsze daje możliwość znaleźć dokładne współrzędne tych punktów. Na przykład, na rysunku 24.2 określić odciętą punktu przecięcia można jedynie w przybliżeniu, na przykład, w takim sposób: $x \approx 1,5$.

Dlatego, przy pomocy wykresu funkcji znaleźć dokładne wartości odciętej punktu przecięcia z osią odciętych lub rzędne punktu przecięcia z osią rzędnych nie zawsze jest możliwe.

Dla wielu funkcji znaleźć współrzędne punktów przecięcia wykresu z osiami współrzędnych można również bez rysowania wykresu, zwłaszcza, jeżeli funkcję przedstawiono według wzoru. W takim przypadku mówimy, że współrzędne punktów przecięcia znaleziono analitycznie, a znalezione wartości będą dokładne, a nie przybliżone.

Przykład 6. Znajdź współrzędne punktów przecięcia wykresu funkcji $y = 2x - 6$ z osiami współrzędnych bez rysowania wykresu.

Rozwiązanie. Punkt przecięcia wykresu z osią odciętych należy do tej osi, dlatego jej rzędna musi wynosićzero. Dlatego dla znalezienia punktu (lub punktów) przecięcia wykresu funkcji z osią odciętych wystarczy do wzoru, za pomocą którego przedstawiono funkcję, podstawić wartość $y = 0$ i rozwiązać otrzymane równanie.

Podstawimy 0 zamiast y w równaniu $y = 2x - 6$. Otrzymamy równanie $2x - 6 = 0$. Otrzymujemy $x = 3$. Więc, (3; 0) – jest punktem przecięcia wykresu funkcji z osią odciętych.

Punkt przecięcia z osią rzędnych należy do tej osi, dlatego odcięta takiego punktu musi wynosić zero. Dlatego dla znalezienia punktu przecięcia wykresu funkcji z osią rzędnych wystarczy do wzoru, za pomocą którego przedstawiono funkcję, podstawić wartość $x = 0$ i wykonać obliczenie.

Podstawimy 0 zamiast x w równaniu $y = 2x - 6$. Otrzymujemy: $y = 2 \cdot 0 - 6 = -6$. Więc, (0; –6) – jest punktem przecięcia wykresu funkcji $y = 2x - 6$ z osią rzędnych.

Odpowiedź: (3; 0); (0; –6).

Należy pamiętać, że istnieją funkcje, wykresy których nie przecinają osie współrzędnych lub co najmniej jedną z nich.

Jaką funckję nazywamy liniową? ○ Co jest wykresem funkcji liniowej? Jak ją narysować? ○ Jakie cechy ma funkcja liniowa? ○ Jak znaleźć współrzędne wykresu funkcji z osiami współrzędnych? ○ Jak narysować wykres funkcji $y = l$, gdzie l jest liczbą? ○ Jaką funkcję nazywamy proporcjonalnością prostą?

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

1

1036. (*Ustnie.*) Czy funkcja jest liniową:

1) $y = 2x - 3$; 2) $y = 4x - x^2$; 3) $y = 3$;

4) $y = \dfrac{4}{x}$; 5) $y = \dfrac{x}{3} - 1$; 6) $y = x - 1 - x^6$?

1037. Jakie z danych funkcji są liniowe:

1) $y = 2x^2 - 7$; 2) $y = 3x - 1$; 3) $y = \dfrac{10}{x}$;

4) $y = \frac{x}{2} + 3$;   5) $y = -4$;   6) $y = 7x - x^3$?

1038. (*Ustnie.*) Które z funkcji przedstawiają proporcjonalność prostą?

1) $y = 2x$;   2) $y = \frac{2}{x}$;   3) $y = x + 2$;

4) $y = 2$;   5) $y = -\frac{x}{2}$;   6) $y = \frac{x}{2}$?

1039. Czy jest proporcjonalnością prostą funckja, którą przedstawiono za pomocą wzoru:

1) $y = -3x$;   2) $y = -3x + 1$;   3) $y = -\frac{3}{x}$;

4) $y = -3$;   5) $y = \frac{x}{3}$;   6) $y = -\frac{x}{3}$?

1040. (*Ustnie.*) Nazwij współczynniki k i l dla każdej z danych funkcji liniowych:

1) $y = -0{,}8x + 7$;   2) $y = 6 - x$;   3) $y = \frac{x}{3}$;

4) $y = 2{,}4x$;   5) $y = -15$;   6) $y = 0$.

2

1041. Szerokość prostokąta wynosi x cm, a jego długość jest o 3 cm większa niż szerokość. Przedstaw zależność za pomocą wzoru:
1) obwodu prostokąta od jego szerokości;
2) pola prostokąta od jego szerokości.
Która z tych zależności jest funkcją liniową?

1042. Uczennica kupiła dziennik w cenie 15 UAH i kilka zeszytów po 4 UAH. Przedstaw za pomocą wzoru zależność ceny zakupu y (w UAH) od ilości kupionych zeszytów x. Czy dana zależność jest funkcją liniową? Jaką jest dziedzina danej funkcji?

1043. Uczeń miał 30 UAH. Za tą kwotę kupił x ołówków w cenie 1,5 UAH każdy, zatem u niego zostało y UAH. Przedstaw za pomocą wzoru zależność y od x. Czy dana zależność jest funkcją liniową?

1044. Funkcję liniową przedstawiono za pomocą wzoru $y = 0{,}5x + 3$. Znajdź:
1) wartość y, jeżeli $x = -12$; 0; 18;
2) wartość x, dla której $y = -4$; 8; 2,5.

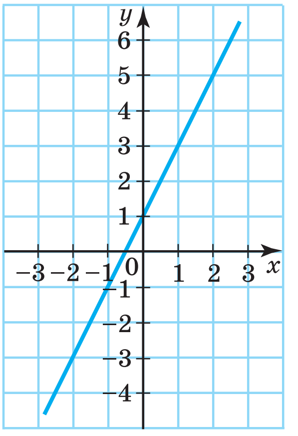
1045. Podano funkcję liniową $y = -2x + 3$. Znajdź wartość:
1) y, jeżeli $x = 1{,}5$; -4; $-6{,}5$;
2) x, dla której $y = 5$; 0; -8.

1046. Korzystają z wykresu funkcji na rysunku 24.5, wypełnij w zeszycie tabelę:

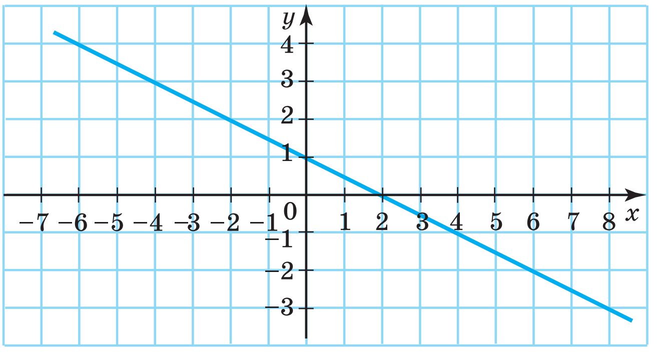
x	–2	0	1	3			
y					–5	–1	5

1047. Korzystają z wykresu funkcji na rysunku 24.6, wypełnij w zeszycie tabelę:

x	–6	–2	2			
y				–3	–1	3



Rys. 24.5



Rys. 24.6

1048. Zapisz współrzędne dla dowolnych dwóch punktów należących do wykresu funkcji y = 5x – 2.

1049. Wypełnij w zeszycie tabelę wartości funkcji liniowej i narysuj jej wykres:

1) $y = -x + 2$;

x	0	4
y		

2) $y = 2x - 3$.

x		
y		

1050. Wypełnij w zeszycie tabelę wartości funkcji liniowej i narysuj jej wykres:

1) $y = x - 3$;

x	0	3
y		

2) $y = -3x + 1$.

x		
y		

1051. Narysuj wykres funkcji liniowej:

1) $y = x + 2$; 2) $y = -3x + 4$; 3) $y = 0{,}5x - 3$;

4) $y = \frac{2}{3}x - 1$; 5) $y = -1$; 6) $y = -x + 2{,}5$.

1052. Narysuj wykres funkcji liniowej:

1) $y = x - 1$; 2) $y = -2x + 5$; 3) $y = -0,5x + 3$;

4) $y = \frac{3}{4}x + 1$; 5) $y = 4$; 6) $y = x - 1,5$.

1053. Motocyklista poruszała się z prędkością 65 km/h. Przedstaw za pomocą wzoru zależność odległości s (w kilometrach) od czasu t (w godzinach), za który ona pokona daną odległość. Czy dana zależność jest proporcjonalnością prostą?

1054. Przedstaw za pomocą wzoru zależność:

1) długości C koła od jego promienia r;
2) pola S koła, ograniczonego tym kołem, od promienia r.

Która z tych zależności jest proporcjonalnością prostą?

1055. Napisz wzory dowolnych dwóch funkcji liniowych, wykresy których przechodzą przez punkt $P(1; -5)$.

1056. Wśród podanych funkcji znajdź te, wykresy których przechodzą przez punkt $(1; -4)$:

1) $y = 4x$; 2) $y = 2x - 2$; 3) $y = 1$;

4) $y = -4$; 5) $y = -4x$; 6) $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$.

1057. Wyjaśnij bez rysowania wykresu funkcji $y = 1,8x - 7$, czy przechodzi ten wykres przez punkt:

1) $A(0; 7)$; 2) $B(-5; -16)$; 3) $C(5; -2)$; 4) $D(10; 11)$.

1058. Wyjaśnij bez rysowania wykresu funkcji $y = -3x + 7$, czy należy do niego punkt:

1) $A(1; -4)$; 2) $B(0; 7)$; 3) $C(-1; 10)$; 4) $D(10; -37)$.

1059. Znajdź zera funkcji bez rysowania wykresu:

1) $y = 2x - 6$; 2) $y = -\frac{1}{2}x + 8$; 3) $y = 7x$; 4) $y = -5x$.

1060. Znajdź zera funkcji bez rysowania wykresu:

1) $y = 4x + 12$; 2) $y = -8x$.

1061. Narysuj wykres proporcjonalności prostej:

1) $y = x$; 2) $y = -2,5x$; 3) $y = -x$; 4) $y = \frac{1}{2}x$.

1062. Narysuj wykres proporcjonalności prostej:

1) $y = 1,5x$; 2) $y = -2x$.

3 **1063.** Narysuj wykres funkcji $y = 5 - 2{,}5x$. Na podstawie wykresu znajdź:
1) wartości funkcji, jeżeli wartość argumentu wynosi 0; 2;
2) wartości argumentu, jeżeli wartość funkcji wynosi -5; 0; 10;
3) zera funkcji;
4) wartości argumentu, dla których funkcja przybiera wartości dodatnich;
5) wartości argumentu, dla których funckja przybiera wartości ujemnych;
6) punkty przecięcia wykresu z osiami współrzędnych.

1064. Narysuj wykres funkcji $y = 1{,}5x - 3$. Na podstawie wykresu znajdź:
1) wartość y, odpowiadającą wartościom $x = -2$; 0; 4;
2) 2) dla jakich wartości x wartości y wynosi -3; 0; 6;
3) zera funkcji;
4) wartości argumentu, dla których funkcja przybiera wartości dodatnich;
5) wartości argumentu, dla których funckja przybiera wartości ujemnych;
6) punkty przecięcia wykresu z osiami współrzędnych.

1065. Grafik wykresu $y = kx - 2$ przechodzi przez punkt $(6; -11)$. Znajdź wartość k.

1066. Znajdź wartość l, jeżeli wykres funkcji $y = -\frac{1}{5}x + l$ przechodzi przez punkt M(10; –5).

1067. Znajdź współrzędne punktów przecięcia wykresu z osiami współrzędnych bez rysowania wykresu:

1) $y = 1{,}5x - 20$; 2) $y = 5 - \frac{x}{4}$.

1068. W jakich punktach osi współrzędna przecina wykres funkcji:

1) $y = 0{,}2x - 40$; 2) $y = 18 - \frac{1}{3}x$?

1069. Punkt $A(0{,}7; 70)$ należy do wykresy proporcjonalności prostej. Znajdź daną funkcję za pomocą wzoru.

1070. Przedstaw proporcjonalność prostą za pomocą wzoru, jeżeli jej wykres przechodzi przez punkt $B(-2; 18)$.

1071. Narysuj wykres funkcji:

1) $y = \frac{1}{2}(6 - x)$; 2) $y = \frac{x - 5}{5}$.

1072. Narysuj wykresy funkcji w jednym układzie współrzędnych i znajdź współrzędne punktu jego przecięcia:
1) $y = -0{,}5x - 1$ i $y = x - 4$;
2) $y = -2$ i $y = 3x - 5$.

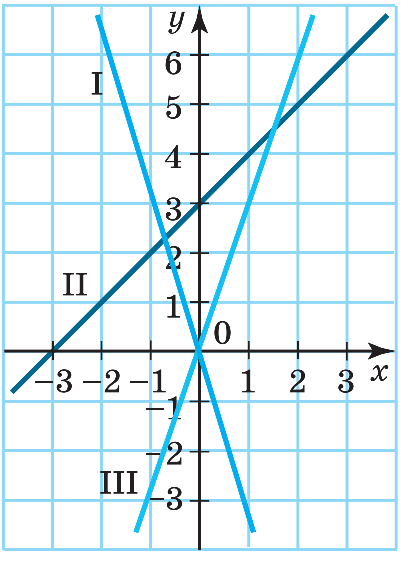
1073. Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy fukcji $y = 1{,}5x - 4$ i $y = 2$ i znajdź współrzędnę punktu ich przecięcia.

1074. Wszystkie punkty wykresu funkcji $y = kx + l$ mają taką samą rzędną, która wynosi 5. Znajdź k i l.

1075. Grafik wykresu $y = kx + l$ równoległy osi odciętych i przechodzi przez punkt $M(0; -5)$. Znajdź k i l.

4

1076. Dopasuj zgodność między funkcjami $y = 3x$, $y = -3x$ i $y = x + 3$ oraz ich wykresami I–III, zilustrowanymi na rysunku 24.7



Rys. 24.7

1077. Funkcję $y = 2x + 1$ przedstawiono dla $-3 \leqslant x \leqslant 4$. Znajdź dziedzinę danej funkcji.

1078. Bez rysowania wykresu funkcji $y = 4x - 6$, znajdź taki jego punkt, w którym:
1) odcięta jest równa rzędnej;
2) odcięta i rzędna są przeciwnymi liczbami;
3) odcięta jest dwa razy mniejsza niż rzędna.

1079. Narysuj wykres funkcji:

1) $y = \begin{cases} x + 1, & \text{jeżeli} \quad x \leqslant 0, \\ 1, & \text{jeżeli} \quad x > 0; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 2x, & \text{jeżeli} \quad x < -2, \\ 3x + 2, & \text{jeżeli} \quad x \geqslant -2. \end{cases}$

1080. Narysuj wykres funkcji $y = \begin{cases} 2 - 3x, & \text{jeżeli} \quad x < 1, \\ 2x - 3, & \text{jeżeli} \quad x \geqslant 1. \end{cases}$

*

1081. Narysuj wykres funkcji.
1) $y = |x|$; 2) $y = |x| + x$;
3) $y = 4x - |x|$; 4) $y = |2x| + 3x + 1$.

1082. Narysuj wykres funkcji.

1) $y = -|x|$; 2) $y = |x| - x$;

3) $y = 2x + |x|$; 4) $y = |3x| - x - 1$.

Ćwiczenia powtórzeniowe

1083. Rozwiąż równania:

1) $(2x + 5)^2 - (2x - 3)^2 = 16$;

2) $(7x + 1)^2 - (49x - 2)(x - 1) = -66$.

1084. Uprość wyrażenie:

1) $(5m - 2)(5m + 2) - m(10m - 1) + \left(m - \frac{1}{2}\right)^2$;

2) $(a + 4y)^2 - (a - 2y)(a + 2y) - y(4a - 5y)$.

1085. Na stole leży 73 zeszytów, a w opakowaniu jest 17 zeszytów. Ile zeszytów należy przełożyć ze stołu do opakowania, żeby w opakowaniu ich stało się dwa razy mniej niż na stole?

1086. Podaj wyrażenie w postaci kwadratu dwumianu, jeżeli jest to możliwe:

1) $\frac{1}{9}p^2 + pq + 9p^2$; 2) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{15}xy + \frac{1}{25}y^2$;

3) $4x^2 - 20xy - 25y^2$; 4) $-36ab + 9a^2 + 36b^2$.

Matematyka życia

1087. Deponentka otworzyła w banku „Szczęśliwy" lokatę w wysokości 20 000 UAH. Za rok jej naliczono odsetki w wysokości 3200 UAH.

1) Jaki procent nalicza bank w skali roku?

2) Po opłaceniu podatku dochodowego dla osób fizycznych deponentka otrzymała pieniądze odsetkowe w wysokości 2624 UAH. Ile procent wynosi podatek dochodowy dla osób fizycznych?

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

1088. *Starożytne zadanie arabskie.* W Arabii Saudyjskiej umarł człowiek w podeszłym wieku. Całe swoje mienie, 17 wielbłądów, on przekazał swoim synom, przy czym najstarszy miał otrzymać połowę, średni – jedną trzecią, a najmłodszy dziewiątą część tego mienia. Po śmierci ojca synowie nie mogli wypełnić testamentu, ponieważ 17 nie dzieli się bez reszty ani na 2, ani na 3, ani na 9. Bracia sprzeczali się długo, aż na wielbłądzie podjechał mędrzec. Dowiedział się o sprzeczkach i dał braciom słuszą radę, która właśnie pomogła podzielić mienie zgodnie z testamentem ojca. Co właściwie doradził mędrzec?

SAMODZIELNA PRACA DOMOWA NR 5

Zadania 1–12 mają po cztery warianty odpowiedzi (A–D), wśród których tych jeden jest prawidłowy. Wybierz prawidłowy wariant odpowiedzi.

1 **1.** Wskaż wzór przedstawiający funkcję.

A. $x^2 + y^2 = xy$

B. $y = \dfrac{4}{x-3}$

C. $x^2 + x + y = zy$

D. $y = \dfrac{x-1}{y+2}$

2. Która z funkcji jest liniowa?

A. $y = x - 2$

B. $y = \dfrac{1}{x-2}$

C. $y = x^2 - 2$

D. $y = x^3 - 2$

3. Wskaż funkcję przedstawiającą proporcjonalność prostą.

A. $y = x - 3$

B. $y = \dfrac{2}{x}$

C. $y = 2x$

D. $y = 2 + x$

2 **4.** Oblicz wartość funkcji $y = -\dfrac{20}{x}$, dla wartości argumentu, który wynosi –4.

A. 4 **B.** –4

C. –5 **D.** 5

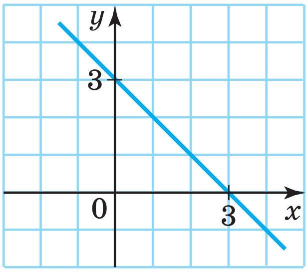
5. Znajdź zero funkcji $y = \dfrac{1}{3}x - 2.$ bez rysowania wykresu.

A. 2 **B.** 4

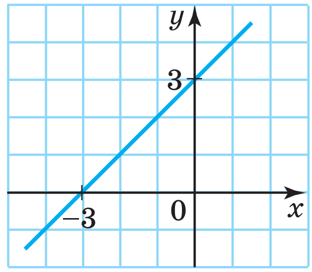
C. 6 **D.** –6

6. Na którym z rysunków zilustrowano wykres funkcji $y = 3 - x$?

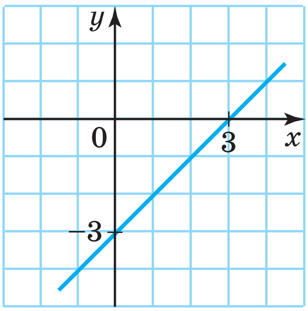
A.



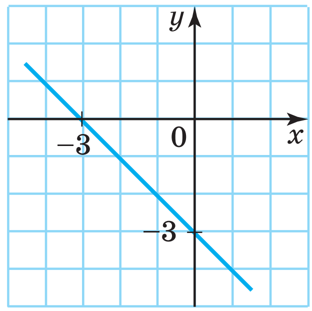
B.



C.



D.



3 **7.** Znajdź dziedzinę funkcji $y = \dfrac{3}{x^2 + x}$.

A. Wszystkie liczby
B. Wszystkie liczby oprócz 0
C. Wszystkie liczby oprócz 0 i 1
D. Wszystkie liczby oprócz 0 i –1

8. Wskaż punkt należący do wykresu funkcji $y = x^2 - 2x$.

A. (0; –2)
B. (1; –1)
C. (–2; 0)
D. (–1; –1)

9. Określ punkt, w którym wykres funkcji $y = 0{,}1x + 15$ przecina oś odciętych.

A. (0; 15)
B. (150; 0)
C. (–150; 0)
D. Taki punkt nie istnieje

4 **10.** Znajdź wartość funkcji dla $x = 2$

$$y = \begin{cases} 7, & \text{jeżeli } x < 0, \\ x^2, & \text{jeżeli } 0 \leqslant x < 3, \\ 5x, & \text{jeżeli } x \geqslant 3. \end{cases}$$

A. 4
B. 7
C. 10
D. Niemożliwie znaleźć

11. Wykres proporcjonalności prostej przechodzi przez punkt $P(2; -4)$. Wskaż punkt, przez który przechodzi również dany wykres.

A. (0; –2)
B. (3; 6)
C. (–3; –6)
D. (3; –6)

12. Bez rysownia wykresu funkcji $y = 3x - 8$, znajdź taki jego punkt, odcięta i rzędna którego są liczbami przeciwnymi.

A. (–2; 2) **B.** (2; –2) **C.** (4; –4) **D.** (–4; 4)

Zadania 1–12 można wykonać również pod linkiem *https://cutt.ly/cwKdQvpw* lub QR kodem.

W zadaniu 13 trzeba dopasować zgodność między informacjami oznaczonymi cyframi i literami. Jedna odpowiedź jest zbędna.

13. Dopasuj zgodność między funkcjami (1–3) i punktami, w których wykres przecina osie współrzędnych (A–D).

Funkcja	*Punkty, w których wykres przecina osie współrzędnych*
1. $y = 4 - 2x$	**A.** (0; 4)
2. $y = 4$	**B.** (0; 4), (4; 0)
3. $y = x - 4$	**C.** (0; 4), (2; 0)
	D. (0; –4), (4; 0)

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE WIEDZĘ DO §§ 22–24

1. Które z danych wzorów przedstawiają funkcję:

1) $y = x^2 + x$; 2) $y = \dfrac{x-1}{y+2}$;

3) $y = \dfrac{1}{x-8}$; 4) $xy = (x-y)^2$?

2. Czy funkcja przedstawiona za pomocą wzoru jest liniową:

1) $y = 3x - 7$; 2) $y = x^2 - 5$; 3) $y = 4$; 4) $y = \dfrac{1}{2x-4}$?

3. Wskaż wartości współczynników k i l dla funkcji liniowej, przedstawionej za pomocą wzoru:

1) $y = -2x + 6$; 2) $y = 7{,}4x$.

4. Funkcję przedstawiono według wzoru $y = -2x + 7$. Znajdź:

1) wartości funkcji, jeżeli wartość argumentu wynosi 5;

2) b. wartość argumentu, jeżeli wartość funkcji wynosi 3.

5. Narysuj wykres funkcji $y = 2x - 5$. Na podstawie wykresu znajdź:

1) wartość funkcji dla $x = 4$;

2) wartość argumentu, dla którego $y = -3$.

6. Funkcję przedstawiono za pomocą wzoru $y = 0{,}8x - 7{,}2$. Bez rysowania wykresu:

1) znajdź zera funkcji;

2) dowiedz się, czy wykres funkcji przechodzi przez punkt (10; 1).

3 **7.** Znajdź dziedzinę funkcji $y = \dfrac{7}{x^2 - 5x}$.

8. Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $y = -2{,}5x$ i $y = -5$ i znajdź współrzędne punktu ich przecięcia.

4 **9.** Znajdź najmniejszą wartość funkcji $y = x^2 - 6x + 11$.

Dodatkowe ćwiczenia

4 **10.** Funkcję $y = 3x - 7$ przedstawiono dla $-2 \leqslant x \leqslant 5$. Znajdź dziedzinę danej funkcji.

11. Narysuj wykres funkcji $y = \begin{cases} 2x + 6, & \text{jeżeli } x < 0, \\ 6 - x, & \text{jeżeli } x \geqslant 0. \end{cases}$

Na podstawie wykresu znajdź:
1) zera funkcji;
2) wartości argumentu, dla których funkcja przybiera wartości dodatnie;
3) wartości argumentu, dla których funkcja przybiera wartości ujemnych.

ĆWICZENIA POWTÓRZENIOWE DO ROZDZIAŁU 3

Do § 22

1 **1089.** Czy zależy pole kwadratu od długości jego boku? Czy pole kwadratu jest funkcją od długości boku kwadratu? Jeżeli tak, to przedstaw daną funkcję za pomocą wzoru przy warunku, że bok kwadratu wynosi a.

2 **1090.** Funkcje przedstawiono za pomocą wzoru $y = \dfrac{x+2}{x-3}$ i $g = \dfrac{x-4}{5}$. Wypełnij w zeszycie tabelę, obliczając odpowiednie wartości funkcji:

x	–4	–2	0	2	4
y					
g					

3 **1091.** Z wioski do miasta, między którymi odległość wynosi 48 km, wyruszył rowerzysta z prędkością 14 km/h. Przedstaw za pomocą wzoru zależność niewiadomej s od niewiadomej t, gdzie s – odległość, którą zostało pokonać rowerzyście

do miasta (w km), a t jest czasem jego ruchu (w h). Na podstawie wzoru znajdź:

1) s, *jeżeli* $t = 1{,}5$; 2) t, *jeżeli* $s = 13$.

4 **1092.** Znajdź dziedzinę funkcji:

1) $y = \dfrac{12}{9x^2 - 17x}$; 2) $y = \dfrac{x}{|x| - 1}$; 3) $y = \dfrac{2}{|x| + 5}$;

4) $y = \dfrac{9}{3 - |x - 1|}$; 5) $y = \dfrac{15}{|2x - 3| - 5}$; 6) $y = \dfrac{2}{1 - \dfrac{1}{x}}$.

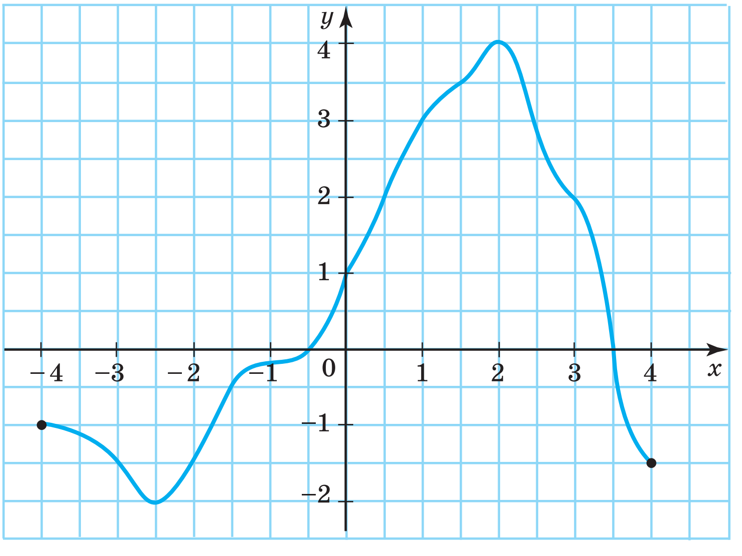
Do § 23

2 **1093.** Funkcję przedstawiono według wzoru y = 2x – 3, gdzie $-2 \leqslant x \leqslant 3$. Wypełnij w zeszycie tabelę i narysuj jej wykres:

x	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y											

3 **1094.** Na rysunku 1 zilustrowano wykres funkcji. Na podstawie wykresu znajdź:

1) wartości y, jeżeli $x = -3; -1{,}5; 0; 1{,}5; 3$;
2) wartości x, dla których $y = -1{,}5; 2; 3$;
3) dziedzinę funkcji;
4) zakres funkcji;
5) zera funkcji;



Rys. 1

6) wartości argumentu, dla których funkcja przybiera wartości dodatnie;
7) wartości argumentu, dla których funkcja przybiera wartości ujemne.

4 **1095.** Narysuj wykres funkcji:
1) $y = |x|$, де $-2 \leqslant x \leqslant 4$; 2) $y = |x + 3|$, де $-5 \leqslant x \leqslant 3$.

Do § 24

1 **1096.** Które z podanych funkcji są liniowe? Które z nich są proporcjonalnością prostą:
1) $y = -3x$; 2) $y = -3x + 4$; 3) $y = -3x + 4x^2$;
4) $y = -3$; 5) $y = -\dfrac{3}{x}$; 6) $y = -\dfrac{1}{3}x$?

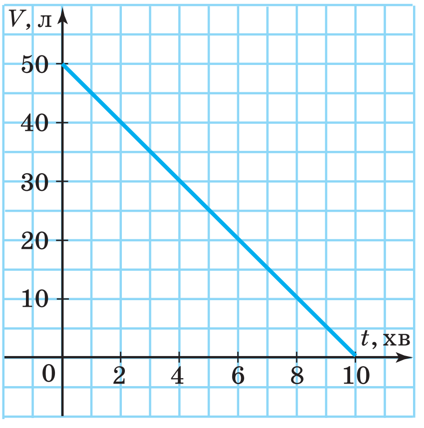
2 **1097.** Narysuj wykres funkcji:
1) $y = 2x$; 2) $y = 1 - x$; 3) $y = 2$;
4) $y = 4x - 1$; 5) $y = -3x$; 6) $y = 0{,}5x + 2$.

3 **1098.** Narysuj wykres proporcjonalności prostej $y = -\dfrac{3}{4}x$.
Znajdź na podstawie wykresu:
1) wartość funkcji, jeżeli wartości argumentu wynoszą -4; 0; 8;
2) wartość argumentu, dla którego wartości funkcji wynoszą -6; 3; 6;
3) zera funkcji;
4) wartości argumentu, dla których funkcja przybiera wartości dodatnie;
5) wartości argumentu, dla których funkcja przybiera wartości ujemne.

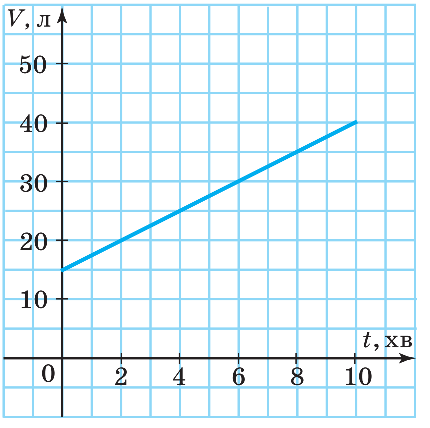
1099. Wykresy funkcji $y = kx$ i $y = 2x + l$ przecinają się w punkcie $A(-2; 6)$. Znajdź k i l.

4 **1100.** Na rysunkach 2 i 3 zilustrowano wykresy dwóch procesów. Jeden z nich opisuje proces wypełnienia zbiornika wodą, a drugi proces opróżniania zbiornika z wody. Który z wykresów odpowiada każdemu z wyżej wspomnianych procesów? Na podstawie każdego z wykresów znajdź:
1) ile litrów wody było w zbiorniku w początkowym momencie;
2) ile litrów wody będzie w zbiorniku po 1 min; po 6 min; po 8 min od rozpoczęcia procesu;

3) za ile minut od rozpoczęcia procesu w zbiorniku będzie 25 l wody;
4) ile litrów wody wpływa w ciągu każdej minuty? Przedstaw za pomocą wzoru zależność objętości V wody w zbiorniku od czasu t dla każdego z tych dwóch procesów.



Rys. 2



Rys. 3

1101. Narysuj wykres funkcji.

1) $y = 2|x|$;
2) $y = 5|x| + x$;
3) $y = \dfrac{|x| - 3x}{2}$;
4) $y = |x| + |-2x|$.

Najważniejsze w rozdziale 3

FUNCKJA

Jeżeli każdej wartości niezależnej niewiadomej odpowiada jedyna wartość zależnej niewiadomej, wtedy taką zależność nazywamy ***funkcjonalną zależnością*** lub ***funkcją***.

DZIEDZINA FUNKCJI

Wszystkie wartości, które przybiera niezależna niewiadoma (argument), tworzą ***dziedzinę funkcji.***

ZAKRES FUNKCJI

Wszystkie wartości, które przybiera zależna niewiadoma (funkcja), tworzą ***zakres funkcj***i.

WYKRES FUNKCJI

Wykresem funkcji nazywamy figurę, która składa się ze wszystkich punktów płaszczyzny współrzędnych, odcięte których są równe wartościom argumentu, a rzędne – opdowiednim wartościom funkcji.

FUNKCJA LINIOWA

Liniową nazywami funkcję w postaci $y = kx + l$, gdzie x – niezależna niewiadoma, k i l – określone liczby.

Wykresem dowolnej funkcji liniowej jest ***prosta***.

Do narysowania wykresu funkcji liniowej wystarczy znaleźć współrzędne dwóch punktów wykresu.

Prosta w postaci $y = l$ jest równoległa osi x.

RYSOWANIE WYKRESU FUNKCJI

Żeby narysować wykres funkcji $y = l$, wystarczy oznaczyć na osi y punkt ze współrzędnymi $(0; l)$ i przeprowadzić przez niego prostą, równoległą do osi x.

PROPORCJONALNOŚĆ PROSTA

Proporcjonalnością prostą nazywamy funkcję w postaci $y = kx$, gdzie x – niezależna niewiadoma, k – liczba inna niż zero.

Wykresem proporcjonalności prostej jest prosta, która przechodzi przez początek współrzędnych.

ROZDZIAŁ 4

$ax + by = c$

UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH Z DWIEMA NIEWIADOMYMI

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 6x - 3y = 12 \end{cases}$$

W DANYM ROZDZIALE:

- **zapoznasz się** z równaniami liniowymi z dwiema zmiennymi, układami dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi;
- **nauczysz się** rozwiązywać układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi, zadania tekstowe za pomocą układów równań liniowych; rysować wykresy równań liniowych z dwiema zmiennymi.

§ 25. Równanie liniowe z dwiema niewiadomymi

Równanie z dwiema niewiadomymi i jego rozwiązanie

W poprzednich paragrafach rozpatrzyliśmy równanie z jedną niewiadomą. Ale w algebrze rozpatrują również równania z kilkoma niewiadomymi. Zwłaszcza, rozpatrzymy równanie z dwiema niewiadomymi.

Przykład 1. Suma jednej liczby i kwadratu drugiej równa się 17. Jeżeli pierwszą liczbę oznaczyć symbolem x, a drugą symbolem y, wtedy stosunek między nimi można zapisać w postaci równości $x + y^2 = 17$, która zawiera dwie niewiadome x i y. Takie równości nazywamy ***równaniem z dwiema niewiadomymi*** (*lub równaniem z dwiemia niewiadomymi*).

Jeżeli $x = 1$; $y = 4$, wtedy równanie $x + y^2 = 17$ przekształca się na prawidłową równość liczbową. W takim przypadku mówimy, że para wartości niewiadomych $x = 1$; $y = 4$ jest rozwiązaniem równania $x + y^2 = 17$. Lub w formie skróconej: para liczb (1; 4) jest rozwiązaniem równania.

Rozwiązaniem równania z dwiema niewiadomymi **nazywamy parę wartości niewiadomych, które przekształcają równanie w prawidłową równość liczbową.**

Rozwiązaniami równania $x + y^2 = 17$ są również pary (–8; 5); (8; 3); (16; –1). Dla takiego skróconego zapisu rozwiązań ważne jest, aby wiedzieć, że para liczb musi być uporządkowana.

Jeżeli równanie zawiera niewiadome x i y, → Wtedy jako pierwszą zapisujemy wartość niewiadomej x, a jako drugą wartość niewiadomej y.

Żeby znaleźć rozwiązanie równania z dwiemia niewiadomymi, można podstawić dowolną wartość jednej niewiadomej w równaniu i po rozwiązaniu otrzymanego równania, znaleźć odpowiednią jej wartość drugiej niewiadomej.

W taki sposób znajdziemy jeszcze kilka rozwiązań równania $x + y^2 = 17$. Niech $y = -2$, wtedy $x + (-2)^2 = 17$, otrzymujemy $x = 13$; niech $y = 6$, wtedy $x + 6^2 = 17$, otrzymujemy $x = -19$.

Mamy jeszcze dwa rozwiązania równania: (13; –2) i (–19; 6).

Równanie liniowe z dwiema niewiadomymi

Równaniem liniowym z dwiema niewiadomymi **nazywamy równanie w postaci** $ax + by = c$, **gdzie** x **i** y **są niewiadomymi. Liczby** a, b, c **nazywamy** ***współczynnikami*** **równania.**

Równanie z dwiema niewiadomymi, które mają takie same rozwiązania, nazywamy ***równoważnymi***. Równania, które nie mają rozwiązań, również są równoważne.

Równanie z dwiema niewiadomymi mają takie same *cechy*, co równania z jedną niewiadomą:
1) jeżeli w równaniu otworzyć nawiasy lub zredukować wyrazy podobne, wtedy otrzymamy równanie, równoważne do danego.
2) w równaniu przenieść wyraz z jednej strony do drugiej, zmieniając jego znak na przeciwny, to otrzymamy równanie, równoważne do danego
3)strony równania pomnożyć lub podzielić przez taką samą, odmienną od zera, liczbę wtedy otrzymamy równanie, równoważne do danego.

Przykład 2. Rozpatrzymy równanie $7x + 3y + 2 = 5(y - 1)$. Jeżeli otworzyć w nim nawiasy, zatem przenieść wyrazy zawierające niewiadome w jedną stronę równania, a te, które je nie zawierają na drugą stronę, zatem zredukować wyrazy podobne, otrzymamy równanie $7x - 2y = -7$, równoważne do równania $7x + 3y + 2 = 5(y - 1)$.

Korzystając z cech równań z dwiema zmiennymi, można znajdować ich rozwiązania również inną metodą.

Przykład 3. Rozpatrzymy równanie $3x + 5y = 2$. Korzystając z cechy równoważności równań, przedstawimy *jedną niewiadomą jako inną* w danym równaniu. Na przykład, niewiadomą y jako niewiadomą x. W tym celu najpierw $3x$ przeniesiemy w prawą stronę równania: $5y = -3x + 2$, zatem obie strony podzielimy przez 5 i otrzymamy $y = -0{,}6x + 0{,}4$. Dane równanie jest równoważne do równania $3x + 5y = 2$. Teraz mając wzór $y = -0{,}6x + 0{,}4$, można znaleźć dowolną ilośc rozwiązań równania $3x + 5y = 2$. W tym celu wystarczy wziąć dowolną wartość niewiadomej x i obliczyć odpowiadającą jej wartość niewiadomej y. Pary takich wartości niewiadomych x i y zapiszemy w tabeli:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	3,4	2,8	2,2	1,6	1	0,4	–0,2	–0,8	–1,4	–2	–2,6

Pary liczb, zapisanych w słupkach tabeli, są rozwiązaniami równania $3x + 5y = 2$. Dane równanie ma dowolną ilość rozwiązań.

Podaj przykład równania z dwiema niewiadomymi. ○ Co nazywamy rozwiązaniem równania z dwiema niewiadomymi? ○ Sformułuj określenie równania z dwiema niewiadomymi. ○ Podaj przykład równania liniowego z dwiema niewiadomymi. ○ Jakie równania z dwiema niewiadomymi nazywamy równoważnymi? ○ Jakie cechy mają równania z dwiema niewiadomymi?

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

1

1102. (*Ustnie.*) Wskaż równania z dwiema niewiadomymi, które są równoważne:
1) $x^2 - 3xy = 5$; 2) $4x^2 - 5x - 1 = 0$;
3) $3x + 2y = 5$; 4) $x + y + z = 8$;
5) $x + 2x^2 = y - 3y^2$; 6) $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 3$.

1103. (*Ustnie.*) Czy równanie z dwiema niewiadomymi jest liniowym
1) $4x - 5y = 9$; 2) $3x^2 - 4y = 5$; 3) $2x + 11y = 0$;
4) $\frac{x+2}{y-1} = 7$; 5) $0x + 3y = 12$; 6) $13x + 2y^2 = 3$?

1104. Wskaż równanie z dwiema niewiadomymi. Które z nich są liniowe:
1) $3x - 2y = 5$; 2) $2x^2 - 3y^2 = 1$; 3) $(x - 2)(y + 1) = 5$;
4) $4x - 0y = 8$; 5) $xyz = 12$; 6) $\frac{1}{7}x + \frac{1}{8}y = \frac{1}{9}$?

1105. (*Ustnie.*) Czy para liczb jest rozwiązaniem równania $x - y = 0$:
1) (4; 4); 2) (–1; 1); 3) (0; 0)?

1106. Czy jest para liczb $x = 2$; $y = 3$ rozwiązaniem równania $x + y = 5$? Znajdź jeszcze trzy rozwiązania danego równania.

1107. Która z par liczb (10; 1), (1; 10), (7; 2), (7; –2), (9; 0) jest rozwiązaniem równania $x - y = 9$?

1108. Która z par liczb (2; 1), (2; –1), (0; 5), (1; 3), (–1; 5) jest rozwiązaniem równania $2x + y = 5$?

2

1109. Rozwiązaniem których równań jest para liczb (–1; 3):
1) $2x - 17y = 53$; 2) $3x^2 + y^2 = 12$;
3) $(x - 3)(y + 2) = -20$; 4) $0x + 4y = -12$;
5) $0x + 0y = 0$; 6) $x^2 + 1 = y^2 - 7$?

1110. Rozwiązaniem których równań jest para liczb $x = 2$; $y = -1$:
1) $3x + y = 5$; 2) $x^2 + y^2 = 3$;
3) $2x + 0y = 4$; 4) $x(y + 3) = 14$;
5) $0x + 0y = 7$; 6) $\frac{1}{2}x + y = 0$?

1111. Znajdź trzy dowolne rozwiązania równania:
1) $x + y = -3$; 2) $x - 2y = 5$.

1112. Znajdź trzy dowolne rozwiązania równania:
1) $x - y = 2$; 2) $x + 3y = 0$.

1113. Ułóż równanie liniowe z dwiema niewiadomymi, rozwiązaniem którego jest para liczb $x = 3$; $y = -2$.

1114. Ułóż równanie liniowe z dwiema niewiadomymi, rozwiązaniem którego jest para liczb (–2; 0).

1115. Z równania $5x + y = 7$ przedstaw niewiadomą y jako niewiadomą x.

1116. Z równania $x - 3y = 9$ przedstaw niewiadomą x jako niewiadomą y.

3

1117. Z równania liniowego $3x - 2y = 12$ przedstaw:
1) niewiadomą y jako niewiadomą x;
2) niewiadomą x jako niewiadomą y.

1118. Przedstawiając niewiadomą y jako niewiadomą x, znajdź dwa dowolne rozwiązania równania:
1) $x + y = 29$; 2) $5x + y = 7$;
3) $3x - 2y = 15$; 4) $6y - x = 5$.

1119. Przedstawiając w równaniu niewiadomą y jako niewiadomą x lub niewiadomą x jako niewiadomą y, znajdź trzy dowolne rozwiązania równania:
1) $x - 2y = -8$; 2) $7x - y = 9$;
3) $3x + 2y = 6$; 4) $5x - 7y = 12$.

1120. Para liczb $(-5; p)$ jest rozwiązaniem równania $2x - y = -13$. Znajdź p.

1121. Para liczb $(n; -1)$ jest rozwiązaniem równania $3x + 5y = 4$. Znajdź n.

1122. Znajdź m, jeżeli para liczb $(-1; -3)$ jest rozwiązaniem równania:
1) $8x + 9y = m$;
2) $mx - 2y = -9$.

1123. Dla jakiej wartości d para liczb $(2; -1)$ jest rozwiązaniem równania:
1) $7x - 5y = d$; 2) $3x + dy = 8$?

1124. Znajdź dwa dowolne rozwiązania równania
$$2(x - y) = 3(x + y) + 4.$$

1125. Wśród rozwiązań równania $x + 3y = 20$ znajdź parę równych sobie liczb.

1126. Znajdź p, jeżeli:
1) para $(p; p)$ jest rozwiązaniem równania $4x - 9y = -10$;
2) para $(p; -p)$ jest rozwiązaniem równania $17x + 12y = 105$.

4 **1127.** Znajdź wszystkie pary liczb naturalnych, które są rozwiązaniem równania:
1) $2x + y = -7$;
2) $3x + 2y = 5$;
3) $x + 7y = 15$;
4) $xy = 7$.

Ćwiczenia powtórzeniowe

1128. Funkcję przedstawiono za pomocą wzoru $y = \frac{2x+1}{x-6}$. Wypełnij w zeszycie tabelę, obliczając odpowiednie wartości funkcji:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y								

1129. Uprość wyrażenie i znajdź jego wartość:
1) $(x - 10)^2 - x(x + 80)$, jeżeli $x = -0{,}83$;
2) $(5m + 3)^2 - (5m - 3)^2$, jeżeli $m = -\frac{17}{60}$.

1130. Wiadomo, że $a + b = -1$, $ab = -6$. Znajdź wartość wyrażeń:
1) $a^2b + ab^2$; 2) $a^2 + b^2$;
3) $(a - b)^2$; 4) $a^3 + b^3$.

Matematyka życia

1131. Cena detaliczna podręcznika dla 7 klasy wynosi 360 UAH, co jest o 20 % wyższa niż cena hurtowa. Ile będzie kosztować 28 takich podręczników kupionych dla 7 klasy w cenie hurtowej?

Przygotuj się do przyswojenia nowego materiału

1132. Narysuj wykres funkcji liniowej:

1) $y = x + 3$; 2) $y = -2x + 1$;
3) $y = 0{,}6x + 2$; 4) $y = -2$.

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

1133. Podano dwie trzycyfrowe liczby, suma których jest podzielna przez 37. Dane liczby zapisano w rzędzie jedna za drugą. Udowodnij, że otrzymana w taki sposób sześciocyfrowa liczba jest podzielna przez 37.

§ 26. Wykres równania z dwiema niewiadomymi

Wykres równania z dwiema niewiadomymi

Każdą parę liczb, która *jest rozwiązaniem równania* z dwiema niewiadomymi x i y, można oznaczyć na płaszczyźnie współrzędnych punktem, odcięta której będzie wartością x, a rzędna będzie wartością y. Wszystkie takie punktu tworzą *wykres równania z dwiema niewiadomymi*.

Wykresem równania z dwiema niewiadomymi **x i y nazywamy figurę, która składa się ze wszystkich punktów na płaszczyźnie współrzędnych, współrzędne których są rozwiązaniem tego równania.**

Wykres równania ax + by = c, w którym chociażby jeden ze współczynników a lub b jest odmienny od zera

Wyjaśnimy, jak wygląda wykres równania liniowego z dwiema niewiadomymi.

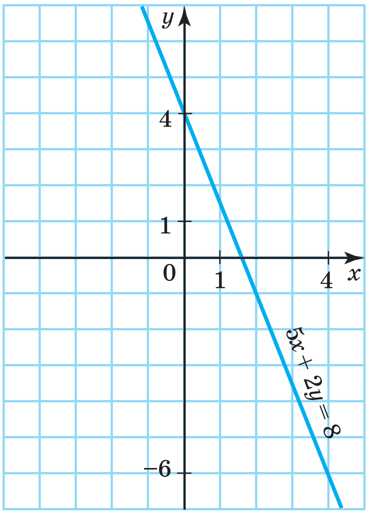
Przykład 1. Narysować wykres równania liniowego z dwiema niewiadomymi $5x + 2y = 8$.

Rozwiązanie. Przedstawimy niewiadomą y jako niewiadomą x, otrzymamy: $2y = -5x + 8$. Więc, $y = -2{,}5x + 4$.

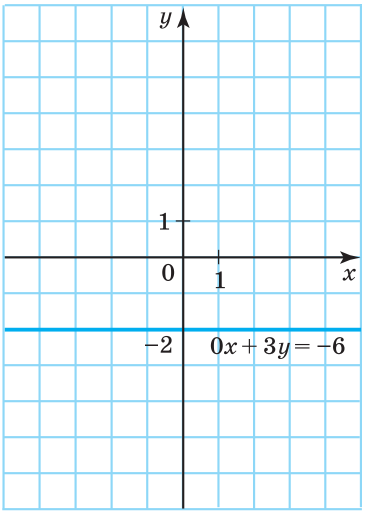
Wzór $y = -2{,}5x + 4$ przedstawia funkcję liniową, wykresem której jest prosta. Dla utworzenia wykresu sporządzimy tabelę wartości x i y dla dwóch jego punktów:

x	0	4
y	4	–6

Wykres funkcji $y = –2{,}5x + 4$ zilustrowano na rysunku 26.1. Ponieważ równania $5x + 2y = 8$ i $y = –2{,}5x + 4$ są równoważne, to narysowana prosta jest również wykresem równania $5x + 2y = 8$.



Rys. 26.1



Rys. 26.2

Przykład 2. Narysować wykres równania liniowego z dwiema niewiadomymi $0x + 3y = –6$.

Rozwiązanie. Równanie $0x + 3y = –6$ jest równoważne z równaniem $y = –2$. To jest funkcja liniowa, wykresem której jest prosta, równoległa do osi x, która przechodzi przez punkt (0; –2). Daną prostą zilustrowano na rysunku 26.2 Ona również jest wykresem równania $0x + 3y = –6$.

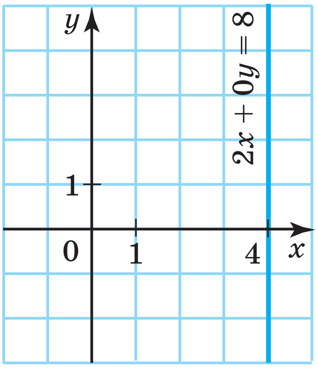
Za pomocą analogicznych przemyśleń można pokazać, że wykresem dowolnego równania liniowego z dwiema niewiadomymi $ax + by = c$, де $b \neq 0$, jest prosta.

Rozpatrzymy przypadek, kiedy $b = 0$.

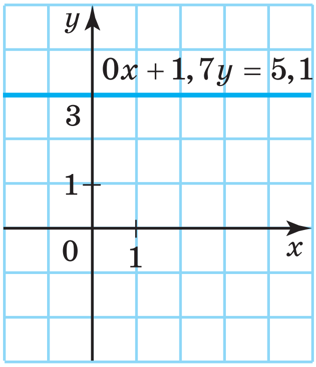
Przykład 3. Narysować wykres równania $2x + 0y = 8$.

Rozwiązanie. Rozwiązaniem danego równania jest każda para liczb w postaci (4; y), gdzie y jest liczbą dowolną. Na przykład, (4; –2), (4; 0), (4; 3), (4; 7,5) również są rozwiązaniami danego równania. Wykres równania składa się ze wszystkich punktów, odcięte których wynoszą 4, a rzędne są dowolnymi liczbami. Takie punkty tworzą prostą, która przechodzi przez punkt (4; 0) równolegle do osi y. Daną prostą zilustrowano na rysunku 26.3.

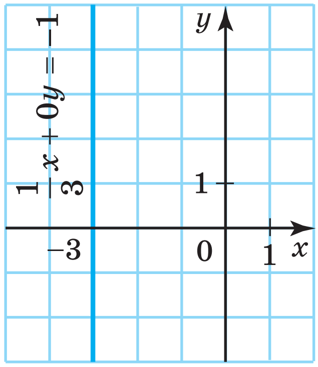
Wykresem równania $ax + by = c$, w którym przynajmniej jeden ze współczynników a lub b jest odmienny od zera, jest prosta.



Rys. 26.3



Rys. 26.4



Rys. 26.5

Przykład 4. Na rysunku 26.4 zilustrowano wykres równania $0x + 1,7y = 5,1$, czyli to jest wykres równania $y = 3$, a na rysunku 26.5 jest wykres równania $\frac{1}{3}x + 0y = -1$, czyli $x = -3$.

1) Żeby narysować wykres równania $y = m$, wystarczy oznaczyć na osi y punkt (0; m) i przeprowadzić przez nią prostą równoległą do osi x.
2) Żeby narysować wykres równania $x = n$, wystarczy oznaczyć na osi x punkt (n; 0) i przeprowadzić przez nią prostą równoległą do osi y.

Wykres równania $0x + 0y = c$

Rozważmy przypadek, gdy w równaniu liniowym $ax + by = c$ oba współczynniki a i b wynoszą zero.

Przykład 5. Niech $a = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$. Wtedy otrzymujemy równanie $0x + 0y = c$, na przykład $0x + 0y = 2$. Dane równanie nie ma rozwiązania, więc, jego wykres nie mieści żadnego punktu, a dlatego nie istnieje.

Przykład 6. Niech a = 0, $b = 0$, $c = 0$. Wtedy otrzymujemy równanie $0x + 0y = 0$. Dowolna liczba jest rozwiązanie danego równania, a jego wykresem są wszystkie punkty na płaszczyźnie współrzędnych.

Co nazywamy wykresem równania z dwiema niewiadomymi x i y? Jaka figura równania $ax + by = c$, w którym co najmniej jeden ze współczynników a lub b jest odmienne od zera? Jak narysować wykres równania $y = m$, gdzie m jest liczbą; wykres równania $x = n$, gdzie n – liczba?

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

1

1134. (*Ustnie.*) Czy należy do wykresu równania $x + y = 6$ punkt:
1) (5; 1); 2) (4; –2); 3) (1; 6); 4) (6; 0)?

1135. Które z punktów A(4; 0), B(1; 3), C(3; –1), D(0; 4), E(5; 1) należą do wykresu równania $x - y = 4$?

2

1136. Czy przechodzie wykres równania $7x + 5y = 25$ przez punkt:
1) (7; –4); 2) (5; –2); 3) (–1,4; 7); 4) (35; –44)?

1137. Wykresy którego z równań przechodzą przez punkt P(–2; 3):
1) $7x + 9y = 15$; 2) $17y - 4x = 59$;
3) $0x + 5y = 15$; 4) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}y = -1$;
5) $0x + 0y = 5$; 6) $1{,}7x + 1{,}2y = 0{,}2$?

1138. Udowodnij, że wykresy równań $5x - 8y = -66$, $0x + 3y = 21$ i $7y - 4x = 57$ przechodzą przez punkt M(–2; 7).

1139. Nazwij dwa dowolne punkty, które należą do wykresu równania $2x - 5y = 20$.

1140. Znajdź dwa punkty, które należą do wykresu równania $3x + 2y = 12$, i dwa punkty, które do niego nie należą.

1141. Narysuj wykres równania:
1) $x - y = 5$; 2) $0{,}5x + y = 3$;
3) $x + 3y = 0$; 4) $0{,}2x - 0{,}4y = 2$.

1142. Narysuj wykres równania:
1) $x + y = 6$; 2) $y - 2x = 0$;
3) $x - 0{,}5y = 4$; 4) $2x + 3y = 5$.

1143. Zapisz dowolne równanie liniowe z dwiema zmiennymi, wykres którego przechodzi przez punkt P(1; –3).

3

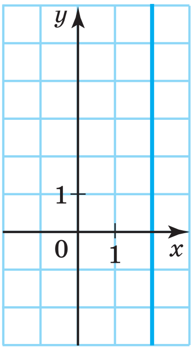
1144. Na wykresie równania $2x + 3y = 7$ wybrano punkt z odciętą –4. Znajdź rzędną danego punktu.

1145. Na wykresie równania $5x - 7y = 16$ wybrano punkt z rzędną –2. Jaka jest odcięta u tego punktu?

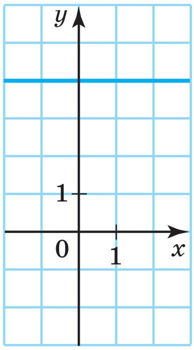
1146. Narysuj wykres równania:
1) $0x + 2{,}5y = 12{,}5$; 2) $7x + 0y = -14$;
3) $1{,}9x = 5{,}7$; 4) $3y = -7{,}5$.

1147. Narysuj wykres równania:
1) $3x + 0y = -12$; 2) $0x - 1{,}2y = 3{,}6$;
3) $1{,}8y = 7{,}2$; 4) $4x = 6$.

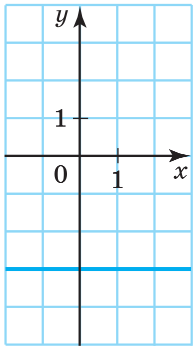
1148. Zapisz równania, wykresy których zilustrowano na rysunkach 26.6–26.9.



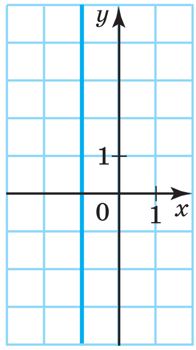
Rys. 26.6



Rys. 26.7



Rys. 26.8



Rys. 26.9

1149. Przy jakiej wartości m wykres równania:
1) $5x + 7y = m$ przechodzi przez początek współrzędnych;
2) $mx + 2y = 14$ przechodzi przez punkt $(2; -3)$;
3) $3x - 4y = m + 2$ przechodzi przez punkt $(-1; 5)$?

1150. Bez rysowania wykresu, znajdź współrzędne punktów przecięcia wykresów równań z osiami współrzędnych:
1) $x + 7y = -21$; 2) $5x - 3y = 15$.

1151. Bez rysowania wykresu, znajdź współrzędne punktów przecięcia wykresów równań z osiami współrzędnych:
1) $3x + y = 18$; 2) $-7x - 2y = 28$.

1152. Narysuj wykres równania:
1) $2(x + y) - 3y = 1$; 2) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = \frac{1}{6}$.

1153. Narysuj wykres równania:
1) $5(x - y) - 4(x + y) = -7$; 2) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$.

1154. Bez tworzenia wykresu określ, przez które kąty współrzędnych przechodzi wykres równania:
1) $2x - 6y = 0$; 2) $3x + y = 0$;
3) $1{,}9x = 190$; 4) $-8y = 720$.

1155. Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy $2x + 3y = 6$ i $4x + 6y = 8$. Czy wykresy przecinają się?

1156. Narysuj wykres równania $\frac{x-3}{5}+\frac{y+4}{3}=\frac{7}{15}$.

Ćwiczenia powtórzeniowe

1157. Proporcjonalność prostą przedstawiono za pomocą wzoru $y=-\frac{1}{4}x$. Znajdź:
1) wartość y, jeżeli $x=-8; 0; 12; 20$;
2) wartość x, jeżeli $y=-2; 3; 10$.

1158. Podaj w postaci wielomianu wyrażenie:
1) $64a^2-(8a-1)^2+14a$;
2) $m^2+4n^2-(m+2n)^2-12mn$;
3) $2m(m-5)-(m-5)^2$;
4) $(x-3)(x+5)-(x+1)^2$.

1159. Samochód i autobus jednocześnie wyjechały sobie na spotkanie z punktów A i B, odległość między nimi wynosi 240 km. Prędkość samochodu jest o 20 km/h większa niż prędkość autobusu. Znajdź prędkość autobusu i prędkość samochodu, jeżeli oni spotkali się za 2 godziny po wyjeździe, podczas gdy samochód zrobił po drodze przystanek na pół godziny.

Matematyka życia

1160. Średnia masa noworodka powinna wynosić 3 kg 300 g. Jeżeli ojciec dziecka jest palaczem, to jego masa będzie o 125 g mniejsza od średnije, ale jeżeli pali matka, to będzie mniejsza o 300 g. Określ, ile procent masy straci noworodek przy urodzeniu, jeżeli:
1) pali jego ojciec 2) pali jego mama.
Odpowiedź zaokrąglij do procentów całościowych.

Przygotuj się do przyswojenia nowego materiału

1161. Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funckji $y=0{,}5x+2$ i $y=5-x$. Na podstawie wykresu znajdź współrzędne punktu ich przecięcia.

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

1162. Udowodnij, że dla dowolnej wartości x wartość wyrażenia $x^8-x^5+x^2-x+1$ jest liczbą dodatnią.

§ 27. Układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi i jej rozwiązanie. Rozwiązywanie układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi metodą graficzną

Pojęcie o układzie równań z dwiema niewiadomymi i jej rozwiązanie

Przykład 1. Za zestaw farb i zestaw pędzelków razem zapłacono 96 UAH. Podczas gdy zestaw farb był o 16 UAH droższy niż zestaw pędzelków. Ile kosztuje zestaw farb i ile kosztuje zestaw pędzelków?

Rozwiązanie. Dane zadanie można rozwiązać metodą arytmetyczną (według działań) lub za pomocą równania z jedną niewiadomą. *A* jeszcze można je rozwiązać za pomocą równań liniowych z dwiema niewiadomymi.

Jeżeli cenę zestawu farb oznaczyć przez x UAH, a zestaw pędzelków przez y UAH, to biorąc pod uwagę fakt, że razem kosztują 96 UAH, otrzymamy równanie: $x + y = 96$.

Ponieważ zestaw farb jest droższy niż zestaw pędzelków o 16 UAH, to otrzymujemy jeszcze jedno równanie: $x - y = 16$.

Otrzymaliśmy dwa równania z dwiema niewiadomymi, które są modelem matematycznym zadania.

Żeby rozwiązać równanie, należy znaleźć takie wartości niewiadomych x i y, które jednocześnie przekształcałaby w równość prawidłową każde z otrzymanych równań, żeby znaleźć wspólne rozwiązanie dla tych równań.

Jeżeli jest kilka równań, dla których trzeba znaleźć wspólne rozwiązanie, to mówimy, że te równania tworzą ***system równań.***

Zapisują układ równań za pomocą klamerki. Utworzony za pomocą danego zadania ***układu równań z dwiema niewiadomymi*** zapisujemy następująco:

$$\begin{cases} x + y = 96, \\ x - y = 16. \end{cases}$$

Rozwiązaniem każdego z równań układu jest para wartości niewiadomych $x = 56$, $y = 40$. Nazywamy je rozwiązaniem układu równań.

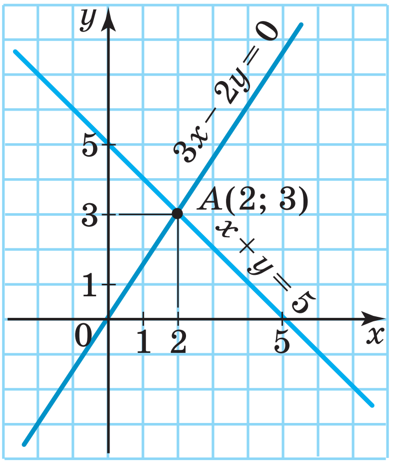
Rozwiązaniem układu równań z dwiema niewiadomymi **nazywamy parę wartości niewiadomych, które są rozwiązaniem każdego z równań układu.**
Rozwiązać układ równań **oznacza znaleźć jego wszystkie rozwiązania lub udowodnić, że nie ma rozwiązania.**

Graficzna metoda rozwiązywania układu równań liniowych z dwiema zmiennymi

Do rozwiązywania równań liniowych z dwiema niewiadomymi można stosować wykresy równań. Taki sposób rozwiązywania układu równań nazywamy ***graficznym***. Rozpatrzmy jego na przykładzie.

Przykład 2. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} x + y = 5, \\ 3x - 2y = 0. \end{cases}$

Rozwiązanie. Narysujmy na jednej płaszczyźnie współrzędnych wykresy obu równań (rys. 27.1). Współrzędne każdego punktu prostej, która jest wykresem równania $x + y = 5$, jest rozwiązaniem pierwszego równania układu. Analogicznie współrzędne każdego punktu prostej $3x - 2y = 0$ jest rozwiązaniem drugiego równania układu. Współrzędne punktu przecięcia tych prostych są rozwiązaniem i pierwszego i drugiego równania, czyli jest rozwiązaniem każdego z równań, więc są również rozwiązaniem danego układu równań. Ponieważ wykresy przecinają się tylko w punkcie (2; 3), to układ ma jedyne rozwiązanie $x = 2$; $y = 3$. Sprawdzając (podstawiając w każde z równań układu) upewniamy się, dana para liczb faktycznie jest rozwiązaniem danego układu. To rozwiązanie można zapisać jeszcze w taki sposób: (2; 3), gdzie na pierwszym miejscu jest wartość niewiadomej x, a na drugi jest wartość niewiadomej y.



Rys. 27.1

Odpowiedź: (2; 3).

Należy pamiętać, że metoda graficzna zwykle pozwala znajdować rozwiązania tylko w przybliżeniu. W przykładzie 2. sprawdzianem przekonaliśmy się, że para (2; 3) jest dokładnym rozwiązaniem.

Rozpatrzymy układy dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi, w każdym z których jest przynajmniej jeden ze współczynników przy niewiadomych x i y odmienna od zera. Wykresami obu równań układu są proste. Dlatego jeżeli te proste przecinają się, to układ ma jedyne rozwiązanie, jeżeli proste nie przecinają się (są równoległe), to układ nie ma rozwiązań, jeżeli proste pokrywają się, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Więc:

żeby rozwiązać układ równań metodą graficzną, należy przestrzegać taką sekwencję działań:

1) Narysować wykresy równań układu na jednej płaszczyźnie współrzędnych;

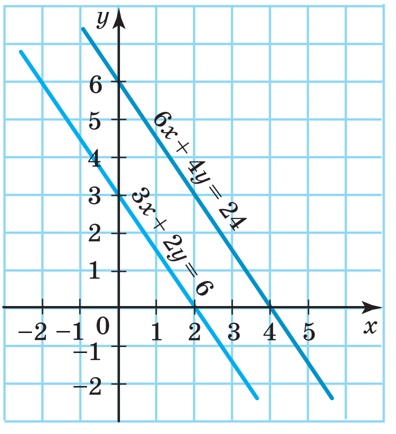
2) znaleźć współrzędne punktu przecięcia wykresów lub upewnić się, że one nie przecinają się (są równoległe) lub pokrywają się;

3) jeżeli współrzędne punktu przecięcia są liczbami całkowitymi, to sprawdzić; jeżeli nie, to rozwiązanie układu określić w przybliżeniu;

4) zapisać rozwiązanie w miejsce odpowiedzi

Przykład 3. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ 6x + 4y = 24. \end{cases}$

Rozwiązanie. Pierwszy sposób. Narysujmy wykresy równań na płaszczyźnie współrzędnych (rys. 27.2). Wykresy równań są równoległymi prostymi, więc, nie mają wspólnego punktu, dlatego układ nie ma rozwiązań.



Rys. 27.2

Ponieważ rysunek nie daje niezbędnej dokładności, upewnić się, że układ nie ma rozwiązań, można również w inny sposób.

Drugi sposób. Dzieląc obydwie strony strony drugiego równania przez 2, otrzymamy: $\begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ 3x + 2y = 12. \end{cases}$

Najwyraźniej nie istnieją takie wartości niewiadomych x i y, dla których jednocześnie byłyby wykonane równości $3x + 2y = 6$ i $3x + 2y = 12$.

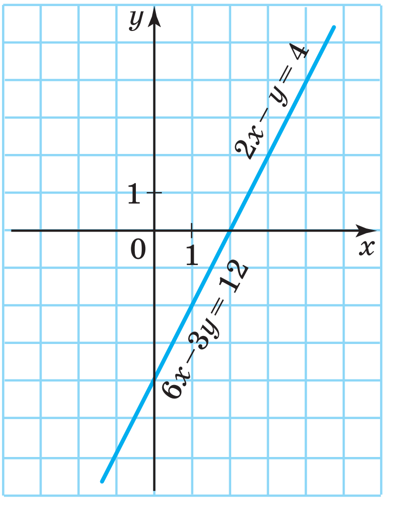
Więc, układ równań nie ma rozwiązań.

Odpowiedź: nie ma rozwiązań.

Przykład 4. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ 6x - 3y = 12. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Pierwszy sposób. Narysujmy wykresy równań na płaszczyźnie współrzędnych (rys. 27.3). Wykresy równań pokrywają się, dlatego dany układ ma nieskończenie wiele rozwiązań. Dowolna para liczb, która jest rozwiązaniem pierwszego równania, jest rozwiązaniem również drugiego. Żeby zapisać w układzie odpowiedź, przedstawimy y przez x z pierwszego równania: $y = 2x - 4$. Zatem dowolna para liczb układu (x; 2x – 4), gdzie x jest dowolną liczbą, jest rozwiązaniem danego układu.



Rys. 27.3

Drugi sposób. Dzieląc obydwie strony strony drugiego równania przez 3, otrzymamy:

$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ 2x - y = 4. \end{cases}$$

Najwyraźniej mamy dwa jednakowe równania, dlatego ich wykresy pokrywają się. Kolejno myślimy tak samo, jak w pierwszym przypadku.

Odpowiedź: $(x;\ 2x - 4)$, gdzie x jest dowolną liczbą.

Dawno, dawno temu...

Chińscy matematycy umieli rozwiązywać układy równań liniowych jeszcze dwa tysiące lat temu. Oni wymyślili ogólną metodę rozwiązywania takich Układów i to nie tylko z dwiema, ale i z większą ilością równań i niewiadomych.

Starożytny matematyk Diofantos (około III w. p. n. e.) rozwiązywał niektóre układy nieliniowych równań z dwiema niewiadomymi. Dlatego później równania z kilkoma niewiadomymi, dla których trzeba znaleźć rozwiązania w liczbach naturalnych (naturalne rozwiązania równania), zaczęli nazywać równaniami diofantycznymi.

Co nazywamy rozwiązaniem układu równań z dwiema niewiadomymi? ○ *Co znaczy rozwiązać układ równań?* ○ *Ile rozwiązań może mieć układ dwóch równań liniowych z dwiema zmiennymi?* ○ *Jak rozwiązać układ dwóch równań liniowych z dwiema zmiennymi metodą graficzną?*

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

1

1163. (*Ustnie.*) Który z danych układów jest układem dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi:

1) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y^2 = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 7x - 4y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - y = 9, \\ xy = 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 2, \\ x - y = -9? \end{cases}$

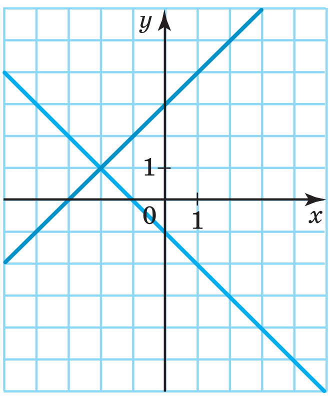
1164. (*Ustnie.*) Czy jest rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 1 \end{cases}$ para liczb:

1) (3; 4); 2) (4; 3); 3) (6; 1)?

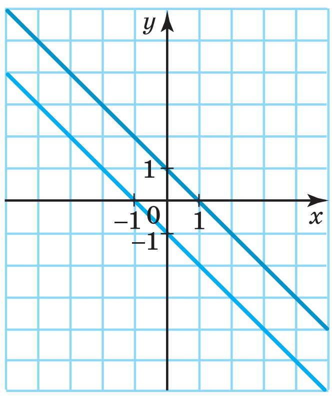
1165. Która z danych par liczb jest rozwiązaniem układu $\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1 \end{cases}$

1) (5; 0); 2) (2; 3); 3) (3; 2)?

1166. (*Ustnie.*) Ile rozwiązań ma układ, którego wykresy równań zilustrowano na rysunku 27.4? Na rysunku 27.5?



Rys. 27.4



Rys. 27.5

2

1167. (*Ustnie.*) Czy para liczb (–2; 1) jest rozwiązaniem układu:

1) $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 3x - 7y = -13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + 7y = -3, \\ 9x - 11y = 29; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x = 5 - 9y, \\ 7y - 12x = 31? \end{cases}$

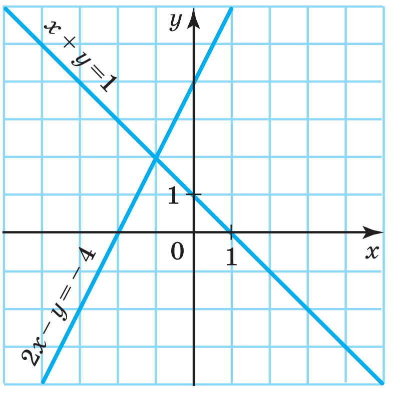
1168. Która z par (3; –4), (7; 2), (4; –3) jest rozwiązaniem układu:

1) $\begin{cases} 2x - 3y = 17, \\ 5x + 2y = 14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 7y = 0, \\ 3x + 5y = 31? \end{cases}$

1169. Utwórz układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi, rozwiązaniem którego jest para liczb:

1) (1; –3); 2) (4; 5).

1170. Znajdź współrzędne punktu przecięcia prostych, które zilustrowano na rysunku 27.6. Napisz odpowiedni do danych porstych układ równań. Sprawdź rozwiązanie, podstawiając współrzędne znalezionego punktu w każde z równań.



Rys. 27.6

1171. Rozwiąż układ równań graficznie:

1) $\begin{cases} y = -x, \\ y = 4 + x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 2x, \\ y = 3 + x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x + 2y = -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ x - y = 4. \end{cases}$

1172. Rozwiąż układ równań graficznie:

1) $\begin{cases} y = x, \\ y = 6 - x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = -2x, \\ y = 4 - x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x - 2y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x + y = 7, \\ x + y = 3. \end{cases}$

3

1173. Para (2; –5) jest rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 2x + by = 5, \\ ax - 6y = 13. \end{cases}$ Znajdź a i b.

1174. Znajdź a i b, jeżeli para (10; –2) jest rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} ax - 5y = 17, \\ 3x + by = 9. \end{cases}$

1175. Rozwiąż układ równań metodą graficzną:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ 3x - y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 7y = 12, \\ 3x - 2y = -7. \end{cases}$

1176. Rozwiąż układ równań metodą graficzną:

1) $\begin{cases} 2x - 3y = -10, \\ 6x - y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 5y = -4, \\ 7x - 2y = 25. \end{cases}$

1177. Wyjaśnij, czy układ ma rozwiązania i w jakiej ilości:

1) $\begin{cases} 2x - y = 5, \\ 3x + y = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0,5x - y = 4, \\ -x + 2y = -8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 5y = 7, \\ y = -0,2x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$

1178. Czy układ ma rozwiązania i w jakiej ilości:

1) $\begin{cases} x + y = 7, \\ 3x - y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 2x - 4y = 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 2y, \\ 1,5x - 3y = 0? \end{cases}$

1179. Rozwiąż układ równań metodą graficzną $\begin{cases} 2x + y = -3, \\ x + 5y = 4. \end{cases}$ Sprawdź, czy otrzymane rozwiązanie jest dokładne. Czy jest rozwiązaniem danego układu para liczb $\left(-2\frac{1}{9};\ 1\frac{2}{9}\right)$?

1180. Rozwiąż układ równań metodą graficzną $\begin{cases} x + 3y = 7, \\ 3x - y = 4. \end{cases}$ Sprawdź, czy otrzymane rozwiązanie jest dokładne. Czy jest rozwiązaniem danego układu para liczb (1,9; 1,7)?

4 **1181.** Udowodnij, że układ równań $\begin{cases} x - 7y = 8, \\ -4x + 28y = -31 \end{cases}$ nie ma rozwiązań bez rysowania wykresu równań.

1182. Udowodnij, że układ równań $\begin{cases} 2x + 5y = 18, \\ -3x - 7,5y = -27 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań bez rysowania wykresu równań.

1183. Znajdź dowolne rozwiązania układu $\begin{cases} 3x + y = 5, \\ -9x - 3y = -15. \end{cases}$ Ile ogółem rozwiązań on ma? Rozwiąż go.

1184. Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ -6x + 4y = -10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 3y = -4, \\ 3x + 9y = 12. \end{cases}$

1185. Do równania $x + 3y = 5$ dopasuj tak drugie równanie, żeby otrzymany układ równań miał:
1) tylko jedno rozwiązanie;
2) nieskończenie wiele rozwiązań.

1186. Do równania 2x – y = 7 dopasuj drugie równanie tak, żeby otrzymany układ równań nie miał rozwiązań.

Ćwiczenia powtórzeniowe

1187. Które z punktów A(4; –2); B(0; 0); C(–1; –5); D(1; 2) należą do wykresu proporcjonalności prostej:
1) $y = -0{,}5x$; 2) $y = 5x$?

1188. Uprość wurażenie:
1) $7m(m - 3) - 3(m - 2)(m + 2)$;
2) $(1 - 2x)(2x + 1) - (3x - 1)^2$;
3) $(2x + 3y)^2 - (x + 3y)(2x - y)$;
4) $(4a - 5b)(5b + 4a) - (2a - 5b)^2$.

1189. Udowodnij, że wyrażenie $-x^2 + 8x - 17$ dla dowolnej wartości x przybiera tylko wartości ujemne. Jaką nawiększą wartość przybiera dane wyrażenie i dla jakiej wartości x?

Matematyka życia

1190. Cena na usługę taxi w jednej z firm przewozowych kształtuje się następująco: pasażera opłaca 6 UAH za każdy przejechany kilometr i dodatkowo 30 UAH za przyjazd samochodu. Przedstaw za pomocą wzoru zależność kosztów p (w UAH) jednego przejazdu od długości przejazdu s (w km).

Przygotuj się do przyswojenia nowego materiału

1191. Wyraź niewiadomą y przez x lub x przez y w równaniu:
1) $x - 4y = -5$; 2) $8x - y = 1$;
3) $2x - 3y = 5$; 4) $3x + 5y = -10$.

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

1192. Załóżmy, że wyrażenie $(4 - 3x)^{2025}$ zapisano w postaci wielomianu. Znajdź sumę współczynników danego wielomianu.

§ 28. Rozwiązywanie układów dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi metodą podstawiania

Pojęcie o metodzie podstawiania

Graficzna metoda rozwiązywania układu równań jest dosyć kłopotliwa i do tego wszystkiego nie zawsze pomaga znaleźć dokładne rozwiązania. Rozpatrzymy inne (niegraficzne) metody rozwiązywania układów równań liniowych z dwiema niewiadomymi, nazywamy je *analitycznymi*. Zaczniemy od ***metody podstawiania.***

Przykład 1. Rozwiązać układ równań: $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ -3x + 4y = -10. \end{cases}$ (1)

Rozwiązanie. Z pierwszego równania wyznaczymy niewiadomą y przez niewiadomą x: $y = 3 - 2x$.
Podstawimy wyrażenie $3 - 2x$ w drugim równaniu zamiast y.
Otrzymamy:

$$\begin{cases} y = 3 - 2x, \\ -3x + 4(3 - 2x) = -10. \end{cases} \quad (2)$$

Teraz drugie równanie układu (2) ma tylko niewiadomą x. Rozwiążemy go: $-3x + 12 - 8x = -10$;
$-11x = -22$;
$x = 2$.
Podstawimy liczbę 2 zamiast x w równości $y = 3 - 2x$. Otrzymamy odpowiednią wartość y: $y = 3 - 2 \cdot 2$;
$y = -1$.
Para $(2; -1)$ jest rozwiązaniem każdego z równań układu (2), dlatego jest rozwiązaniem układu (2). Ta para jest rozwiązaniem każdego z równań układu (1) i dlatego jest rozwiązaniem układu (1).
Odpowiedź: $(2; -1)$.

Równoważne układy równań

Układy równań z dwiema niewiadomymi, które mają takie same rozwiązania, nazywamy *równoważnymi*. Układy, które nie mają rozwiązań również są uważane za równoważne.

Rozwiązując układ (1) metodą podstawiania, zamieniliśmy go równoważnym do niego układem (2), drugie równanie którego miało tylko jedną niewiadomą.

Algortym rozwiązywania układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi metodą podstawiania

Kolejność działań, jakie należy przestrzegać podczas rozwiązywania układu równań z dwiema niewiadomymi metodą podstawiania, rozpatrzymy na przykładzie $\begin{cases} 3x - 7y = 1, \\ 4x + 9y = 38. \end{cases}$

	Działanie	Wynik
1	Wyznaczyć z dowolnego równania układu jedną niewiadomą przez drugą (na przykład, z pierwszego)	$3x = 1 + 7y$, $x = \dfrac{1+7y}{3}$
2	Otrzymane dla tej niewiadomej wyrażenie podstawiamy do drugiego równania układu	$4 \cdot \dfrac{1+7y}{3} + 9y = 38$
3	Rozwiązać otrzymane równanie z jedną niewiadomą, czyli znaleźć wartość danej niewiadomej	$4(1 + 7y) + 3 \cdot 9y = 3 \cdot 38$, $4 + 28y + 27y = 114$, $55y = 110$, $y = 2$
4	Znaleźć odpowiednią do niego wartość drugiej niewiadomej	$x = \dfrac{1 + 7 \cdot 2}{3}$, $x = 5$
5	Zapisać odpowiedź	Odpowiedź: (5; 2)

Metodę podstawiania wygodnie stosować wtedy, kiedy przynajmniej jeden ze współczynników przy niewiadomych x lub y wynosi 1 lub –1. Właśnie niewiadomą z takim współczynnikiem należy wyznaczyć przez inną.

Metodą podstawiania można rozwiązać również inne układy.

Przykład 2. Rozwiązać układ $\begin{cases} 4(y+3) - 3(x-1) = 40, \\ \dfrac{x+2}{3} + \dfrac{y-4}{2} = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

Rozwiązać. W pierwszym równaniu układu otwieramy nawiasy, a obie strony drugiego równania pomnożymy przez 6. Otrzymamy:

$$\begin{cases} 4y + 12 - 3x + 3 = 40, \\ 2(x+2) + 3(y-4) = -2. \end{cases}$$

Po uproszczeniu każde z równań układu zredukujemy do postaci:

$$\begin{cases} -3x + 4y = 25, \\ 2x + 3y = 6. \end{cases}$$

Kolejno wykorzystamy metodę podstawiania. Wyznaczymy z pierwszego równania y przez x: $y = \dfrac{25+3x}{4}$. podstawiając dane wyrażenie w drugim równaniu i rozwiązując go, otrzymamy $x = -3$.

Kolejno znajdziemy odpwiednią do niego wartość y: $y = \dfrac{25 + 3 \cdot (-3)}{4}$, czyli $y = 4$.

Odpowiedź: (–3; 4).

Jaką kolejność działań należy przestrzegać przy rozwiązywaniu układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi metodą podstawiania?

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

1

1193. (*Ustnie.*) W jakie z nierówności 1–3 prawidłowo wykorzystano podstawianie dla rozwiązania układu równań $\begin{cases} x = 7y - 5, \\ 2x + 3y = 9? \end{cases}$

1) $2x + 3(7y - 5) = 9$;
2) $2 + (7y - 5) + 3y = 9$;
3) $2(7y - 5) + 3y = 9$.

1194. Jaka z równości jest prawidłowo wykorzystana podstawianiem dla rozwiązania układu równań $\begin{cases} y = 4x + 3, \\ 7x + 2y = 9? \end{cases}$

1) $7(4x + 3) + 2y = 9$;
2) $7x + 2 - (4x + 3) = 9$;
3) $7x + 2(4x + 3) = 9$.

2

1195. Rozwiąż równość za pomocą metody podstawiania:

1) $\begin{cases} 7x = 21, \\ 2x - 3y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x - y = 17, \\ -2y = 10. \end{cases}$

1196. Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} x = y + 2, \\ 4x - 8y = 20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x - 3, \\ 5x + 2y = 29. \end{cases}$

1197. Znajdź rozwiązanie układu równań:

1) $\begin{cases} -4x = 8, \\ 5x - 2y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x + 5, \\ 7x + 3y = -5. \end{cases}$

1198. Znajdź rozwiązanie układu równań:

1) $\begin{cases} x + y = 7, \\ 2x + y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = -2, \\ x - 2y = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x = 0, \\ 4x + y = 15; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5x + 2y = 2, \\ x - 2y = 10; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x - 3y = 7, \\ 2x - 3y = -3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 5x - 3y = -19, \\ 2x + y = -1. \end{cases}$

1199. Rozwiąż układ równań za pomocą metody podstawiania:

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ 3x + y = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 0, \\ x - 2y = 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y - x = -5, \\ 2x + y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ x + 2y = 2. \end{cases}$

1200. Znajdź współrzędne punktu przecięcia wykresów równań $x + y = 4$ i $2x + 3y = 9$ bez rysowania wykresu.

1201. Znajdź współrzędne punktu przecięcia wykresów równań $x - y = 3$ i $3x + 2y = 14$ bez rysowania wykresu..

3 **1202.** Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ 2x - 7y = 29; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8x - 5y = 41, \\ 4x + 3y = -7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2a - 5b = 0, \\ -7a + 4b = 27; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 10m - 2n = 39, \\ 9m + 4n = 38. \end{cases}$

1203. Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} 4x + 3y = 0, \\ 5x - 7y = -43; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 9y = -59, \\ 5x - 4y = 38; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3p - 7q = 0, \\ 2p + 9q = 41; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6a - 7b = 51, \\ 2a + 3b = -15. \end{cases}$

1204. Znajdź rozwiązanie układu równań:

1) $\begin{cases} 7(x - 3) + 8 = 4 + 5x, \\ 4(x - y) - 7y = 6,5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4(x + y) - 3y = 2, \\ 9(x - 2y) - 6x = -11. \end{cases}$

1205. Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} 4(x + y) - 8y = -4, \\ 7(y + 1) - (y + 3) = 19; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8(x + y) - 12y = 6, \\ 6(3x - y) + 18x = 13. \end{cases}$

1206. Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} \frac{1}{8}(x - y) = 9, \\ \frac{1}{3}(x + y) = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0,2(2x + y) = 3, \\ 0,7(x - 4y) = -1,05. \end{cases}$

1207. Znajdź rozwiązania układu równań:

1) $\begin{cases} 0,4(x + y) = 12, \\ 0,6(x - y) = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{1}{7}(2x + y) = 13, \\ \frac{1}{3}(x - 3y) = 14. \end{cases}$

4 **1208.** Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} \dfrac{x+1}{5} + \dfrac{y-1}{3} = 1, \\ \dfrac{x+2}{6} + \dfrac{y+2}{3} = 2. \end{cases}$

1209. Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} \dfrac{x-4}{2} + \dfrac{y+11}{4} = 1, \\ \dfrac{x+7}{3} + \dfrac{y-4}{7} = 2. \end{cases}$

1210. Udowodnij, że wykresy równań $2x - 3y = 4$ i $4x - 6y = 9$ są równoległymi prostymi.

1211. Wykres funkcji $y = kx + l$ przechodzi przez punkty $M(9; 1)$ i $N(-6; -4)$. Znajdź k i l.

1212. Wykresem funkcji $y = kx + l$ jest prosta przechodząca przez punkty $A(-2; -4)$ i $B(4; 11)$. Przedstaw daną funkcję za pomocą wzoru.

1213. Dla jakich wartości m układ równań:

1) $\begin{cases} 2x + y = 8, \\ 4x + my = 10 \end{cases}$ nie ma rozwiązań;

2) $\begin{cases} x - 3y = 5, \\ mx - 12y = 20 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań?

Ćwiczenia powtórzeniowe

1214. Narysuj wykres funkcji, przedstawionej za pomocą wzoru $y = \dfrac{2}{3}x$. Na podstawie wykresu znajdź:

1) wartość y, jeżeli $x = -6; 0; 3$.
2) wartość x, dla których $y = -2; 0; 4$.

1215. Rozłóż wielomian na czynniki:

1) $9m^2 + 12m^5 - 18m^3$; 2) $3x^4y^2 - 9x^2y^3 + 12x^3y$;
3) $a^6 - 6 - 2a^2 + 3a^4$; 4) $pq - 6p + p^2 - 6q$.

1216. Udowodnij, że równanie nie ma rozwiązań:

1) $x^2 + 4 = 0$; 2) $x^2 - 6x + 13 = 0$;
3) $4x^2 - 12x + 16 = 0$; 4) $x^2 + x + 2 = 0$.

Matematyka życia

1217. Podczas czyszczenia zębów mama używa wodę oszczędnie (póki myje, zakręca kran), a tato tego nie robi. Na podstawie

wskaźników licznika na wodę dzieci określili, że mama każdego poranka zużywa 1,5 l wody, a tato dwa razy więcej.
1) O ile litrów wody co miesiąc więcej zużywa tato niż mama?
2) *Działalność praktyczna.* Dowiedz się, ile kosztuje 1 m^3 wody w twojej miejscowości i określ, ile pieniędzy może zaoszczędzić dana rodzina w skali miesiąca (30 dni), jeżeli ojciec podczas czyszczenia również będzie oszczędnie zużywać wodę.

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

1218. Jeśli iloczyn czterech kolejnych liczb naturalnych powiększyć o 1, to on będzie równy kwadratowi określonej liczby naturalnej. Udowodnij to.

§ 29. Rozwiązywanie układów dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi metodą dodawania

Pojęcie o metodzie dodawania

Obecnie rozpatrzymy jeszcze jedną analityczną metodę rozwiązywania układów dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi¬ – metodą dodawania. Rozwiązując układ metodą dodawania, przechodzimy do równoważnej do niego układu, jedno z równań którego zawiera tylko jedną niewiadomą.

Przykład 1. *Rozwiązać układ równań:* $\begin{cases} 3x + 5y = 1, \\ 4x - 5y = -22. \end{cases}$ (1)

Rozwiązanie. W danym układzie współczynniki przy niewiadomej y są liczbami przeciwnymi. Znajdziemy sumę lewych stron równań układu i sumę prawych ich stron. Oczywistym jest to, że te sumy będą sobie równe. Suma lewych stron zawiera wyrazy podobne, dlatego w wyniku dodawania otrzymamy równanie z jedną niewiadomą: $7x = -21$.
Dodawanie równań układu, które zastosowaliśmy, nazywamy *dodawaniem według wyrazów*. Zamienimy jedno z równań ukadu (1), na przykład, pierwsze, równaniem $7x = -21$. Otrzymamy układ:

$$\begin{cases} 7x = -21, \\ 4x - 5y = -22. \end{cases} \qquad (2)$$

Z pierwszego równania układu (2) otrzymamy: $x = -3$. Podstawiając daną wartość w drugie równanie układu (2), otrzymamy $y = 2$. Więc, para liczb (–3; 2) jest rozwiązaniem układu (2).

Upewnijmy się, że dana para liczb jest nie tylko rozwiązaniem układu (2), a również rozwiązaniem układu (1). W tym celu do każdego z równań układu (1) podstawimy zamiast x liczbę –3, a zamiast y liczbę 2. Wtedy w lewej stronie pierwszego równania otrzymamy $3 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = 1$, więc wartość lewej i prawej stron spełniają się dlatego para (–3; 2) jest rozwiązaniem pierwszego równania. W lewej stronie drugiego równania otrzymamy $4 \cdot (-3) - 5 \cdot 2 = -22$, czyli wartość lewej strony równania jest równa wartości jego prawej strony. Więc para (–3; 2) jest również rozwiązaniem drugiego równania układu.

Ponieważ para liczb (–3; 2) jest rozwiązaniem każdego z równań układu (1) i (2) mają takie same rozwiązanie, dlatego są równoważne.

Odpowiedź: (–3; 2).

Algorytm rozwiązywania układu równań liniowych z dwiema niewiadomymi metodą dodawania

Metodą dodawania wygodnie rozwiązywać układy, w równaniach których współczynniki przy tej samej niewiadomej są liczbami przeciwnymi.

Należy pamiętać, że dowolny układ równań liniowych z dwiema niewiadomymi można zredukować do postaci, wygodnej dla stosowania metody dodawania. Rozpatrzymy to na przykładzie.

Przykład 2. Rozwiązać układ $\begin{cases} 5x + 2y = 10, \\ 7x + 4y = 8. \end{cases}$

Rozwiązanie. Równanie tego układu nie zawiera przeciwnych współczynników przy jednakowych niewiadomych, co jest niewygodne dla metody dodawania. Ale jeżeli pomnożyć obie strony pierwszego równania przez liczbę –2, to współczynnik przy niewiadomej y w obu równaniach staną się przeciwne. Zatem można dodawać według wyrazów równania układu. Zapiszemy to rozwiązanie:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 10, \\ 7x + 4y = 8; \end{cases} \left| \cdot(-2) \right.$$

$$\begin{cases} -10x - 4y = -20, \\ 7x + 4y = 8; \end{cases} \Big| +$$

$$-3x = -12,$$

$$x = 4.$$

Podstawimy znalezioną wartość x do drugiego równania układu, żeby znaleźć y. Otrzymamy:: $7 \cdot 4 + 4y = 8$, skąd $y = -5$.

Ostatecznie otrzymujemy: $\begin{cases} x = 4, \\ y = -5. \end{cases}$

Odpowiedź: (4; –5).

Kolejność działań jakie należy przestrzegać podczas rozwiązywania układu równań z dwiema niewiadomymi metodą dodawania, rozpatrzymy na przykładzie układu

$$\begin{cases} 7x - 4y = 2, \\ 5x + 3y = 19. \end{cases}$$

	Działanie	Wynik
1	W razie potrzeby pomnożyć obie strony jednego lub dwóch równań układu przez takie liczby, żeby współczynniki przy takich samych niewiadomych stały się liczbami przeciwnymi	$\begin{cases} 7x - 4y = 2, & \vert \cdot 3 \\ 5x + 3y = 19; & \vert \cdot 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 21x - 12y = 6, \\ 20x + 12y = 76 \end{cases}$
2	Dodać według wyrazów równania układu	$41x = 82$
3	Rozwiązać otrzymane równanie z jedną niewiadomą	$x = 2$
4	Podstawić znalezioną wartość w jednym z równań początkowego układu i znaleźć opdowiednią do niej wartość innej niewiadomej	$7 \cdot 2 - 4y = 2$, $-4y = -12$, $y = 3$
5	Zapisz swoją odpowiedź	*Odpowiedź*: (2; 3).

Jaką kolejność działań należy przestrzegać przy rozwiązywaniu układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi metodą dodawania?

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

1

1219. (*Ustnie.*) Jakie równanie otrzymamy, jeżeli według wyrazów dodamy równania układu:

1) $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ 3x - y = 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x + 3y = 9, \\ -4x + y = 1? \end{cases}$

1220. (*Ustnie.*) Przez jaką liczbę trzeba pomnożyć obie strony pierwszego równania, żeby w równaniach współczynniki przy niewiadomej y stały się przeciwne:

1) $\begin{cases} 2x + y = 8, \\ 3x - 2y = 10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + 7y = 5, \\ 3x + 21y = 7? \end{cases}$

1221. Przez jaką liczbę trzeba pomnożyć obie strony pierwszego równania, żeby w równaniach współczynniki przy niewiadomej x stały się przeciwne:

1) $\begin{cases} x - 4y = 9, \\ -2x + 7y = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 7y = 19, \\ 12x - 8y = 4? \end{cases}$

2

1222. (*Ustnie.*) Nazwij metodę (podstawiania lub dodawania), którą wygodniej rozwiązać układ:

1) $\begin{cases} 3x + y = 9, \\ 17x + 19y = 15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + 7y = 8, \\ 10x - 7y = 17; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x + 15y = 27, \\ 12x + 17y = 49; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 10, \\ 2015x + 2016y = 2017. \end{cases}$

1223. Rozwiąż układ równań za pomocą metody dodawania:

1) $\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 2x - y = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x + 3y = 7, \\ -4x - y = -5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - 8y = 7, \\ -2x + 7y = 5. \end{cases}$

1224. Rozwiąż układ równań za pomocą metody dodawania:

1) $\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 2y = 8, \\ -3x + 5y = -1. \end{cases}$

1225. Rozwiąż układ równań metodą dodawania:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 4x + 3y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x + 2y = 5, \\ 7x - 3y = 45. \end{cases}$

1226. Rozwiąż układ równań za pomocą metody dodawania:

1) $\begin{cases} 4x + y = 7, \\ 5x + y = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 2x - 4y = -9. \end{cases}$

1227. Znajdź rozwiązanie układu równań za pomocą metody dodawania:

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ 3x - 5y = 20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - y = 5, \\ 2x + 7y = 11. \end{cases}$

1228. Rozwiąż układ równań za pomocą metody dodawania:

1) $\begin{cases} x - y = 3, \\ 2x + 3y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x + y = 2, \\ 5x - 4y = 25. \end{cases}$

1229. Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} 7x + 2y = -3, \\ -14x + 3y = 20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 5y = 19, \\ 7x - 10y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x + 5y = 7, \\ 2x - 3y = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + 9y = -1, \\ 7x + 36y = -8. \end{cases}$

1230. Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ -9x + 7y = 23; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + 2y = 2, \\ 5x - 4y = 9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x + 3y = 1, \\ 15x - 7y = 51; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4m + 5b = 5, \\ 7m + 20b = 11. \end{cases}$

3

1231. Znajdź rozwiązanie układu za pomocą metody dodawania:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 3x + 5y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2a - 3b = 7, \\ 3a + 4b = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 10m - 6n = 18, \\ 15m + 7n = 59; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 14x - 8y = -6, \\ 21x + 10y = 2. \end{cases}$

1232. Znajdź rozwiązanie układu za pomocą metody dodawania:

1) $\begin{cases} 3x + 4y = 10, \\ 5x - 7y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 15x - 3y = -15, \\ 20x - 7y = -41. \end{cases}$

1233. Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} 5(x - 2) = 2y - 1, \\ 3(x + 3) = 12(y + 3); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4(a + 2b) - 5a = 0,4, \\ 7(3a - 4b) + 3b = 5,9. \end{cases}$

1234. Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} 7(x + 3) = 3y + 1, \\ 4(2 - x) = 5(y + 1) + 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4(m - 2n) - 7m = 9,6, \\ 5(4m + 3n) + 8n = -18,5. \end{cases}$

4

1235. Utwórz równanie prostej, wykres której przechodzi przez punkty:
1) $A(4; -4)$ i $B(12; -1)$;
2) $M(-3; 6)$ i $N(9; -2)$.

1236. Wykres funkcji liniowej przechodzi przez punkty $(-4; 5)$ i $(12; 1)$. Przedstaw daną funkcję za pomocą wzoru.

1237. Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} \dfrac{2-x}{6} + \dfrac{y+4}{3} = 2\dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{x+4}{12} - \dfrac{2-y}{6} = \dfrac{5}{12}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-1)^2 + y = (x+2)^2 - 23, \\ (x+2)^2 + (y-1)^2 = x^2 + (y+7)^2. \end{cases}$

1238. Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{4} - \dfrac{y-4}{8} = 1\dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{x-4}{6} + \dfrac{y+2}{9} = -\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-1)(y+2) = x(y-1), \\ x(y+3) = (x+1)(y-2). \end{cases}$

1239. Wyjaśnij, czy układ równań ma rozwiązania i w jakiej ilości:

1) $\begin{cases} 3x - y = 2, \\ -6x + 2y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -4x + 3y = 7, \\ -8x + 6y = 14. \end{cases}$

Ćwiczenia powtórzeniowe

1240. Czy należą do wykresu funkcji $y = -4{,}5x + 1$ punkty:
$A(-2;\ 10)$, $B(0;\ -1)$, $C(4;\ 17)$, $D(10;\ -44)$?

1241. Para liczb $(-2;\ -3)$ jest rozwiązaniem układu równań
$\begin{cases} ax - 2y = 8, \\ bx - ay = 7. \end{cases}$

Znajdź a i b.

1242. Jakie jednomiany należy wpisać w komórkach, żeby utworzyła się tożsamość:
1) $(7m - \square)^2 = \square - \square + 25a^8$;
2) $(\square + \square)^2 = 36p^4 + \square + 121b^2$;
3) $(3p + \square)^2 = \square + 24p^2m^7 + \square$;
4) $(\square - \square)^2 = \square - 32mn^2 + 16n^4$?

Matematyka życia

1243. 1) Określ masę składników w sałatce „Witaminowej” masa które wynosi 400 g, jeśli marchewki tam jest 4 razy mniej od ogólnej masy sałatki, selery tyle samo co marchewki, jabłek o 60 g więcej niż selery, orzechów 5 razy mniej niż marchewki, soku cytrynowego 2 razy mniej niż orzechów i na dodatek sałatka zawiera jedną główkę czosnku.
2) Zadanie praktyczne. Poznaj przepisy na inne pożyteczne i proste w przygotowaniu sałatki, spróbuj je zrobić i włacz w swoją dietę.

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

1244. Czy istnieją takie liczby całkowite x i y, dla których spełnia się równość $x^2 + 2018 = y^2$?

§ 30. Rozwiązywanie zadań za pomocą układu równań liniowych

Zadanie, której modelem matematycznym jest układ równań

Już rozpatrywaliśmy zadania, które można rozwiązać za pomocą równań. Modelem matematycznym zadania może być nie tylko równanie, ale również układ równań. Zwykle to dotyczy tych zadań, gdzie niewiadome są wartości dwóch lub więcej wielkości.

Przykład 1. Za 7 batoników czekoladowych i 2 płytki czekolady zapłacono 85 UAH. Ile kosztuje batonik i ile kosztuje płytka czekolady, jeżeli wiadomo, że trzy batoniki są droższe niż jedna płytka o 3 UAH?

Rozwiązanie. Niech batonik kosztuje x UAH, a płytka czekolady w UAH. Wtedy siedem batonów kosztowało 7 UAH, a dwie płytki czekolady 2y UAH. Ponieważ razem za taką ilość batoników o płytek czekolady zapłacono 85 UAH, otrzymujemy równanie: $7x + 2y = 85$.

Wartość trzech batoników wynosiła 3x UAH, i droższe niż płytka czekolady o 3 UAH. Dlatego otrzymamy jeszcze jedno równanie: $3x - y = 3$.

Żeby odpowiedzieć na pytanie w zadaniu, musimy znaleźć takie wartości x i y, żeby spełnić obie strony równania, czyli spełniać układ równań:

$$\begin{cases} 7x + 2y = 85, \\ 3x - y = 3. \end{cases}$$

Więc cena batonika czekoladowego wynosi 7 UAH, a cena płytki czekolady wynosi 18 UAH.

Odpowiedź: 7 UAH; 18 UAH.

Należy pamiętać, że to zadanie, zarówno jak i niektóre inne z tego paragrafu, można rozwiązać za pomocą równania z jedną niewiadomą. Ale często ułożyć układ równań do zadania jest prościej, aniżeli utworzyć do niego równanie z jedną niewiadomą.

Algorytm rozwiązywania zadań tekstowych za pomocą układu równań

Rozwiązując zadanie za pomocą układu równań, należy dotrzymywać się takiej kolejności działań:

1) oznaczyć określone dwie nieznane wielkości niewiadomymi (na przykład, x i y);
2) zadania ułożyć układ równań według warunku;
3) rozwiązać otrzymany układ;
4) przeanalizować znalezione wartości niewiadomych odpowiedno do warunku zadania, odpowiedzieć na pytanie w zadaniu;
5) zapisać odpowiedź.

Przykład 2. W ciągu 2 h pod prąd i 5 h z prądem motorówka pokonuje 120 km. W ciągu 2 h z prądem i 1 h pod prąd ta sama motorówka pokonuje 51 km. Znaleźć prędkość własną motorówki i prędkość nurtu rzeki.

Rozwiązanie. Niech własna prędkość motorówki wynosi x km/h, a prędkość nurtu – y km/h. Wtedy prędkość motorówki z prądem rzeki wynosi $(x + y)$ km/h, a prędkość motorówki pod prąd – (x – y) km/h. W ciągu 5 h ruchu z prądem motorówka pokonuje 5(x + y) km, w ciągu 2 h pod prąd – 2(x – y) km, razem to wynosi 120 km. Otrzymujemy równanie: $5(x + y) + 2(x - y) = 120$.

Rozumując tak samo, według warunku w zadaniu można ułożyć jeszcze jedno równanie: $2(x + y) + (x - y) = 51$.

Otrzymujemy układ równań: $\begin{cases} 5(x+y)+2(x-y)=120, \\ 2(x+y)+(x-y)=51. \end{cases}$

Rozwiązując go, otrzymujemy: $\begin{cases} x = 16{,}5, \\ y = 1{,}5. \end{cases}$

Więc, własna prędkość motorówki wynosi 16,5 km/h, a prędkość nurtu – 1,5 km/h.

Odpowiedź: 16,5 km/h; 1,5 km/h.

Jaką kolejność działań należy przestrzegać przy rozwiązywaniu zadanie za pomocą układu równań?

Rozwiąż zadania i wykonaj ćwiczenia

2 **1245.** W sekcji lekkoatletycznej trenuje 32 sportowców, ponadto jest wśród nich o 4 więcej dziewczyn niż chłopców. Ile dziewczyn i ile chłopców trenuje w danej sekcji?

1246. Za 2 godziny kucharz ulepił 260 pierogów, a w pierwszą godzinę o 20 pierogów mniej niż w drugą. Ile pierogów ulepił kucharz w pierwszej godzinie i ile w drugie?

1247. Za ołówek i trzy zeszyty zapłacili 32 UAH, a za trzy ołówki i zeszyt 24 UAH. Ile kosztuje jeden ołówek i ile jeden zeszyt?

1248. W ciągu 2 h na pieszo i 1 godziny rowerem turystka pokonała18 km, a w ciągu 1 h pieszo i 2 h rowerem pokonała 27 km. Z jaką prędkością poruszała się turystka na pieszo i z jaką na rowerze?

1249. Po przeliczeniu w sklepie w kasie zostało 12 monet po 50 kop i po 1 UAH, razem na kwotę 8 UAH. Ile monet po 50 kop. i ile po 1 UAH zostało w kasie?

1250. Kupiono 16 zeszytów w kratkę i linijkę, razem na kwotę 328 UAH. Zeszyt w kratkę kosztuje 22 UAH, a w linijkę 18 UAH. Ile zeszytów kupiono w kratkę i ile w linijkę?

1251. Za 3 piłki nożne i 2 piłki do siatkówki zapłacono 1088 UAH. Ile kosztuje piłka nożna i ile do siatkówki, jeśli dwie piłki do siatkówki są o 192 UAH droższe niż jedna piłkarska?

1252. 2 akumulatory i 3 baterie razem kosztowały 252 UAH. Ile kosztuje jeden akumulator i ile jedna bateria, jeżeli akumulator kosztuje tyle samo, jak 3 baterie?

1253. Podstawa trójkąta równoramiennego jest o 2 cm większa niż jego bok. Znajdź boki trójkąta, jeżeli jego obwód wynosi 26 cm.

1254. Długość prostokąta jest o 8 cm większa niż długość. Znajdź długość i szerokość prostokąta, jeżeli jego obwód wynosi 56 cm.

3 **1255.** Łódź w ciągu 3 h z prądem i 2 h pod prąd pokonuje 92 km. W ciągu 9 h ruchu z prądem łódź pokonuje odległość 5 razy większą niż w ciągu 2 h ruchu na jeziorze. Znajdź własną prędkość łodzi i prędkość nurtu.

1256. Łódź poruszała się 2 h z prądem 5 pod prąd rzeki, pokonując w tym czasie 110 km. Prędkość łodzi pod prąd wynosiła 70 % od prędkości łodzi z prądem. Znajdź własną prędkość łodzi i prędkość nurtu.

1257. Z punktów A i B, odległość między którymi wynosi 168 km, jednocześnie wyruszyli rowerzystka i motocyklista. Jeżeli oni będą zmierzać sobie na spotkanie, to spotkają się za 3 h. A jeżeli będą przemieszczać się w jednym kierunku, to motocyklista dogoni rowerzystkę za 6 h. Znajdź prędkość każdego z nich.

1258. Suma dwóch liczb wynosi 62. Znajdź każdą z liczb, jeżeli 70 % od jednej i 60 % od drugiej razem wynosi 39,6.

1259. 20 % pierwszej liczby jest 2,4 większa niż 10 % drugiej liczby. Znajdź te liczby, jeżeli ich suma wynosi 72.

1260. Mama razem z córką mają 42 lata. Za rok mama będzie trzy razy starsza niż córka. Ile lat ma każda z nich obecnie?

1261. Rozwiąż układ równań. Ułóż zadanie, które można będzie rozwiązać za pomocą danego układu:

1) $\begin{cases} x + y = 17, \\ x - y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 3y = 15, \\ x - y = 1. \end{cases}$

1262. Rozwiąż układ równań. Ułóż zadanie, które można będzie rozwiązać za pomocą danego układu:

1) $\begin{cases} x - y = 8, \\ x + y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y = 18, \\ 3x - y = 2. \end{cases}$

1263. W skrzynce i w koszyku razem jest 95 jabłek. Jeżeli ilość jabłek w skrzynce zmniejszyć dwa razy, a ilość jabłek w koszyku zwiększyć o 25, to jabłek w skrzynce i w koszyku będzie po równo. Ile jabłek jest w skrzynce i ile w koszyku?

1264. Suma dwóch liczb wynosi 45. Znajdź te liczby, jeżeli 60 % pierwszej z nich równa się 75 % drugiej.

1265. Znajdź dwie liczby, jeżeli ich suma wynosi 200 i $\frac{11}{24}$ pierwszej z nich równa się $\frac{3}{8}$ drugiej.

1266. Zmieszano dwa rodzaje cukierków o wartości 60 UAH i 75 UAH za kilogram. Zatem powstało 20 kg mieszanki o wartości 66 UAH za kilogram. Po ile kilogramów cukierków każdego rodzaju wzięto do mieszanki?

1267. Z dwóch rodzajów ciastek o wartości 40 UAH i 55 UAH za kilogram powstało 25 kg mieszanki o wartości 49 UAH za kilogram. Po ile kilogramów ciastek każdego rodzaju wzięto?

4 **1268.** W dwóch kanistrach łącznie znajdowało się 75 l oleju. Po wlaniu połowy oleju z pierwszej kanistry do drugiej, oleju zrobiło się 4 razy więcej niż w pierwszym. Po ile litrów oleju było w każdej kanistrze początkowo?

1269. Na dwóch półkach łącznie było 57 książek. Po przeniesieniu z pierwszej półki 5 książek na drugą, było ich dwa razy więcej niż na pierwszej. Po ile książek było na każdej półce początkowo?

1270. Za 5 lamp 4 latarki zapłacono 896 UAH. Po tym jak lampy staniały o 15 %, a latarki podrożały o 10 % jedna lampa i jedna latarka razem kosztowały 196 UAH. Jaką była początkowa cena lampy i cena latarki?

1271. Dwie cukiernie musiały wyprodukować łącznie 300 tortów w ciągu dnia. Kiedy pierwsza cukiernia wykonała 55 % swoich zadań, a druga 60 % swoich, okazało się, że pierwsza cukiernia wyprodukowała o 27 tortów więcej niż druga. Po ile tortów musiała wyprodukować każda cukiernia?

1272. Jeżeli licznik danego ułamka zwiększyć o 7, to ułamek będzie wynosił $\frac{2}{3}$. Jeżeli mianownik danego ułamka zwiększyć o 2, to ułamek będzie wynosił. Znajdź ten ułamek.

1273. Jeżeli licznik danego ułamka zmniejszyć o 2, to ułamek będzie wynosił 0,5. Natomiast, jeżeli mianownik ułamka zwiększyć o 11, to ułamek będzie wynosić $\frac{1}{3}$. Znajdź dany ułamek.

1274. Ile gramów z każdego z 2-procentowego i 6- procentowego rozworów soli należy wziąć, żeby otrzymać 200 g 5-rpocentowego roztworu?

1275. Jeden stop zawiera 9 % cynku, a drugi – 24 %. Po ile gramów każdego stopu trzeba wziąć, żeby otrzymać sztabkę o masie 260 g zawierający 15 % cynku?

1276. Cztery lata temu ojciec był 8 razy starszy niż syn, a za 20 lat ojciec będzie dwa razy starszy niż syn. Ile lat ma obecnie każdy z nich?

1277. Jaką sumę cyfr dwucyfrowej liczby zwiększyć 5 razy, to one będą równe sobie. A jeżeli jego cyfry zamienić miejscami, to ona zwiększy się 9 razy. Znajdź tą liczbę.

Ćwiczenia powtórzeniowe

1278. Rozłóż wielomian na czynniki:
1) $m^2 + 10m + 25$; 2) $c^2 - 8c + 16$;
3) $p^2 - 0{,}36$; 4) $-49a^2 + b^2$.

1279. Uprość wurażenie:
1) $2x(3x - 4x^3) - (x + 3x^2)^2$;
2) $2p^2(2p^2 - 6pm) - (2p^2 - 3mp)^2$.

1280. Narysuj wykres funkcji $y = \begin{cases} -3x, & \text{якщо } x < -1, \\ 3, & \text{якщо } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x + 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$

Matematyka życia

1281. Dzieci w wieku 11-15 lat powinne spożywać 2,6 g białek, 2,3 g tłuszczów, 10,4 g węglowodanów codziennie na każdy kilogram własnej masy ciała. Sprawdź własną masę ciała i określ, ile tłuszczów, białek i węglowodanów powinieneś spożywać codziennie.

Ciekawe zadania – jednak zastanów się

1282. Zadanie Newtona. Trawa na polanie rośnie równomiernie, gęsto i szybko. Wiadomo, że 70 krów zjadłoby ją w ciągu 24 dni, a 30 krów w ciągu 60 dni. Ile krów zjadłoby całą trawę w ciągu 96 dni?

SAMODZIELNA PRACA DOMOWA NR 6

Zadania 1–12 mają po cztery warianty odpowiedzi (A–D), wśród których jest tylko jeden prawidłowy, Wybierz prawidłowy wariant odpowiedzi.

1

1. Które z równań jest równaniem liniowym z dwiema niewiadomymi?
A. $2x^2 - 3x = 7$ **B.** $2x^2 - 3y = 7$
C. $2x - 3y = 7$ **D.** $2x - 3y^3 = 7$

2. Wskaż punkt, który należy do wykresu równań $x + y = 6$.
A. (2; 3) **B.** (2; 4)
C. (3; 4) **D.** (–2; –4)

3. Wskaż parę liczbową, która jest rozwiązaniem układu równań
$$\begin{cases} x - y = 7, \\ x + y = 1. \end{cases}$$
A. (4; 3) **B.** (–4; 3) **C.** (–4; –3) **D.** (4; –3)

2

4. Rozwiązaniem jakiego równania jest para liczb (2; –1)?

A. $x + 3y = 5$ **B.** $3x + y = 5$

C. $2x + y = 5$ **D.** $x + y = 3$

5. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania $\begin{cases} 3x - y = 5, \\ 4x + 3y = 11. \end{cases}$

A. (2; 1) **B.** (1; 2)

C. (3; 1) **D.** (1; 3)

6. Rozwiąż układ równań metodą dodawania $\begin{cases} 4x - 7y = 11, \\ 3x + 7y = -4. \end{cases}$

A. (1; 1) **B.** (–1; 1)

C. (–1; –1) **D.** (1; –1)

3

7. Wśród rozwiązań równania $x + 2y = -18$ znajdź parę równych sobie liczb.

A. (6; 6) **B.** (–6; –6)

C. (0; 0) **D.** (–9; –9)

8. Dla jakiej wartości m wykres równania $mx + 3y = 5$ przechodzi przez punkt (–2; 3)?

A. 2 **B. –2** **C. 7** **D. –7**

9. Z punktów *A* i *B*, odległość między którymi wynosi 60 km, pieszy i rowerzystka wyruszyli jednocześnie. Jeśli będą zmierzać sobie na spotkanie, to spotkają się za 3 godziny, a jeśli wyruszą w jednym kierunku, to rowerzystka dogoni pieszego po 5 godzinach. Znajdź prędkość pieszego.

A. 3 *km/h* **B.** 4 *km/h*

C. 4,5 *km/h* **D.** 5 *km/h*

4

10. Ile jest par liczb naturalnych, które są rozwiązaniem równania $2x + y = 9$?

A. trzy **B.** cztery

C. pięć **D.** nieskończenie wiele

11. Wykres funkcji $y = kx + b$ przechodzi przez punkty (1; 4) i (–2; 13). Znajdź k.

A. 7 **B.** 3

C. –3 **D.** –5

12. Dla jakiej wartości a układ równań $\begin{cases} 2x - 3y = 8, \\ ax - 6y = 16 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań?

A. 4 **B.** 2 **C.** 0 **D.** –4

Zadania 1–12 można również rozwiązać online pod linkiem *https://cutt.ly/6wKdQXlK* lub kodem QR.

W zadaniu 13 należy dopasować zgodność między informacją, oznaczoną cyframi i literami. Jedna odpowiedź jest zbędna.

3 **13.** Dopasuj zgodność między wykresem równania (1–3) i punktami przecięcia z osiami współrzędnych (A–D).

Wykres równania	*Punkty przecięcia wykresu z osiami współrzędnych*
1. $2x - 5y = 10$	**A.** (–4; 0), (0; 3)
2. 5x + 3y = 15	B. (5; 0), (0; 3)
3. –3x + 4y = 12	C. (5; 0), (0; –2)
	D. (3; 0), (0; 5)

ZADANIA SPRAWDZAJĄCE WIEDZĘ Z §§ 25–30

1 **1.** Które z równań jest równaniem liniowym z dwiema niewiadomymi:

1) $2x + 3y = 9$;

2) $2x + 3y^2 = 9$?

2. Czy jest rozwiązaniem równania 2x + y = 7 para liczb:

1) (3; –5); 2) (4; –1)?

3. Czy jest rozwiązaniem układu $\begin{cases} x + y = 11, \\ x - y = 3 \end{cases}$ para liczb:

1) (6; 5); 2) (7; 4)?

2 **4.** Rozwiąż układ równań metodą graficzną:

$$\begin{cases} y = 3x, \\ 2x + y = -5. \end{cases}$$

5. Rozwiąż układ równań metodą podstawiania $\begin{cases} x - 3y = 5, \\ 2x + y = 3. \end{cases}$

6. Rozwiąż układ równań metodą dodawania $\begin{cases} 5x + 3y = 3, \\ 4x - 3y = 24. \end{cases}$

3 **7.** Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 2(x + 3) = 7y - 5, \\ 6(x - 3) - 5(y + 1) = -24. \end{cases}$

4 **8.** Za 8 zeszytów i 3 notesy zapłacono 93 UAH. Po tym jak zeszyty podrożały o 15 %, a notes staniał o 10 %, za jeden zeszyt i za jeden notes zapłacono 20,4 UAH. Jakie były początkowe ceny zeszytu i notesu?

Ćwiczenia dodatkowe

4 **9.** Narysuj wykres równania $\frac{x+2}{4} + \frac{y-3}{6} = -\frac{1}{12}$.

10. Wykres funkcji y = kx + b przechodzi przez punkty (3; –4) i (–12; –9). Znajdź k i b.

11. Dla jakiej wartości a układ równań $\begin{cases} 7x - ay = 5, \\ 21x + 6y = 15 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań?

Ćwiczenia powtórzeniowe do rozdziału 4

Do § 25

1 **1283.** Czy jest para liczb (7; 1) rozwiązaniem równania $x - y = 6$? Znajdź jeszcze cztery rozwiązania danego równania.

2 **1284.** Znajdź jeszcze cztery rozwiązania danego równania:
1) $2x + y = 4$; 2) $x - 3y = 7$.

3 **1285.** Przedstaw:
1) niewiadomą y przez niewiadomą x z równania $7x - y = 18$;
2) niewiadomą x przez niewiadomą y z równania $3x + 9y = 0$;
3) niewiadomą y przez niewiadomą x z równania $13x - 2y = 6$;
4) niewiadomą x przez niewiadomą y z równania $8x + 15y = 24$.

1286. Zamień „gwiazdki” liczbami tak, żeby każda z par (*; 3); (6; *); (*; –3); (15; *) była rozwiązaniem równania $x - 3y = 9$.

4 **1287.** Udowodnij, że równanie z dwiema niewiadomymi nie ma rozwiązań:
1) $x^2 + y^2 = -4$;
2) $|x| + y^2 + 1 = 0$;
3) $-|x| - |y| = 5$;
4) $2x^4 + 3|y| = -2$.

1288. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych, które są rozwiązaniem równania $|x| + |y| = 2$.

Do § 26

2 **1289.** Narysuj wykres równania:
1) $x - y = 1$;
2) $1{,}5x + y = 7$;
3) $x - 4y = 5$;
4) $0{,}1x + 0{,}2y = 0{,}8$.

3 **1290.** Narysuj na jednej płaszczyźnie współrzędnych wykresy $x + y = 5$ i $7x - 4y = 2$. Znajdź współrzędne punktu ich przecięcia. Upewnij się, że znaleziona para jest rozwiązaniem każdego z równań.

1291. Rzędna określonego punktu prostej, która jest wykresem równania $-9x + 5y = 27$, wynosi zero. Znajdź odciętą tego punktu.

4 **1292.** Narysuj wykres równania:

1) $|x| + y = 0$; 2) $|x| + x - y = 0$.

1293. Narysuj tą część wykresu równania $2x + y = 6$, która znajduje się w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych.

Do § 27

1 **1294.** Czy jest rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x - y = 0, \\ x + y = 8 \end{cases}$ para liczb:

1) $x = 5$; $y = 5$; 2) $x = 4$; $y = 4$?

2 **1295.** Rozwiąż układ równań metodą graficzną:

1) $\begin{cases} y = -4x, \\ 2x - y = -6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + y = 3, \\ x + 2y = -3. \end{cases}$

3 **1296.** Rozwiąż układ równań metodą graficzną:

1) $\begin{cases} 0x + 3y = 6, \\ 3x - 2y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7{,}1x = -14{,}2, \\ 2x + 7y = 17. \end{cases}$

4 **1297.** Dla jakiej wartości a układ równań:

1) $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ 6x + ay = 15 \end{cases}$ ma nieskończenie wiele rozwiązań;

2) $\begin{cases} 3x - 2y = 7, \\ -6x + 4y = a \end{cases}$ nie ma rozwiązań?

Do § 28

2 **1298.** Rozwiąż układ równańmetodą podstawiania:

1) $\begin{cases} x = y - 7, \\ 2x - y = -6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 3x - 5y = 21; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - 4y = -19, \\ x + 7y = 27; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x + 7y = -3, \\ 8x - y = -17. \end{cases}$

3 **1299.** Znajdź współprzędne punktu przecięcia wykresów równań bez rysowania wykresu:

1) $2x + 3y = 0$ i $4x - 5y = -22$;
2) $4x - 7y = 34$ i $2x + 7y = -4$.

1300. Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} 3(y - x) - 4 = -7y, \\ 5(x + y) + 9 = 8x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + y = 5, \\ x - \dfrac{y}{3} = 3. \end{cases}$

4 **1301.** Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3} + \dfrac{y+7}{2} = 5, \\ \dfrac{3x-1}{5} + \dfrac{2y+1}{3} = \dfrac{6x+8y}{15}. \end{cases}$

1302. Rozwiąż układ równań z dwoma niewiadomymi:

1) $|x - y| + (x + 2y - 1)^2 = 0$;
2) $|x + y - 6| + x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$.

Do § 29

2 **1303.** Rozwiąż układ równań metodą dodawania:

1) $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 3x - y = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + y = 6, \\ 5x + 9y = 14; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 9y = -7, \\ 3x - 7y = 13; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x - 5y = 2, \\ 7x + 15y = 51. \end{cases}$

3 **1304.** Rozwiąż układ równań metodą dodawania:

1) $\begin{cases} 7x + 2y = 3, \\ 4x + 3y = -2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x + 12y = 53, \\ 5x - 18y = -2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x + 7y = -5, \\ 6x + 9y = -6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5(a - 3b) + 6a = 7, \\ 0,5(a + 6b) - 1,5b = 2,5. \end{cases}$

4 **1305.** Wyjaśnij ilość rozwiązań układu równań $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 4x + ay = 6 \end{cases}$ w zależności od współczynnjika a.

Do § 27–29

2

1306. Rozwiąż układ równań za pomocą 3 metod (graficznej, podstawiania, dodawania

1) $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ x + y = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ -x + 3y = 0. \end{cases}$

3

1307. Znajdź rozwiązanie układu równań:

1) $\begin{cases} 2 - 5x = 3(1 - y), \\ 2(x + y) = 0,5x + 5,5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4(x + 7) - 9(y - 13) = 139, \\ 5(x - 1) + 4(3 - y) = -15. \end{cases}$

1308. Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3} - \dfrac{4y}{5} = 2\dfrac{4}{15}, \\ \dfrac{3x}{7} + \dfrac{2y}{5} = -\dfrac{13}{35}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{2x}{5} - \dfrac{y}{4} = \dfrac{23}{40}, \\ \dfrac{4x}{15} - \dfrac{3y}{5} = 1\dfrac{1}{30}. \end{cases}$

4

1309. Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{3} + \dfrac{y-5}{3} = 2, \\ \dfrac{x+2}{2} - \dfrac{y-5}{6} = \dfrac{5}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{7} + \dfrac{2y+2}{5} = \dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{3x-2}{2} + \dfrac{y+4}{4} = 4. \end{cases}$

1310. Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} 2x + y = -2, \\ -6x - 3y = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 3y = 5, \\ 2x - 6y = 7. \end{cases}$

1311. Czy ma rozwiązanie układ równań:

1) $\begin{cases} 4x + 3y = 1, \\ 7x + 5y = 2, \\ 3x + 2y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 4y = 10, \\ 4x + 7y = 1, \\ 5x + 6y = 4? \end{cases}$

1312. Wykres funkcji y = kx + 1 rzecina oś x w punkcie z odciętą 4, a oś y – w punkcie z rzędną –5.
1) Przedstaw funkcję za pomocą wzoru.
2) Wyjaśnij, czy jej wykres przechodzi przez punkt (–80; –105).

1313. Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} 3(x-2y)+x(7-2y)=2y(1-x), \\ 4(x-y-1)+5(x+y-1)=32; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x+2)^2+(y-1)^2=(x+3)^2+(y+1)^2, \\ (y-2)^2-(y+2)^2=(x+6)^2-(x-1)^2. \end{cases}$

1314. Dla jakiej wartości a układ równań $\begin{cases} 5x+4y=2, \\ 10x+8y=a \end{cases}$

1) ma nieskończenie wiele rozwiązań;
2) nie ma rozwiązań?
3) Czy istnieje taka wartość a, dla której układ ma jedyne rozwiązanie?

1315. Dla jakiej wartości b układ równań $\begin{cases} 12x-9y=15, \\ 4x+by=5 \end{cases}$

1) ma nieskończenie wiele rozwiązań;
2) ma jedyne rozwiązanie? Znajdź to rozwiązanie.

Do § 30

2 **1316.** W 3 h autobusem i 5 h pociągiem turystka pokonała 450 km. Znajdź prędkość autobusu i prędkość pociągu, jeżeli prędkość pociągu jest o 10 km/h większa niż prędkość autobusu.

1317. Za 7 porcji naleśników i 2 sałatki zapłacili 468 UAH. Ile kosztuje jedna porcja naleśników i ile jedna porcja sałatki, jeżeli dwie porcje naleśników są o 27 UAH tańsze niż trzy sałatki?

3 **1318.** Parowiec pokonuje 142 km płynąc 3 h z prądem i 2 godziny pod prąd. Ten sam parowiec za 4 h pod prąd pokonuje o 14 km więcej niż za 3 h z prądem. Znajdź prędkość własną parowca i prędkość nurtu.

1319. Mistrz i jego uczeń musieli wyprodukować 114 części. Gdy uczeń przepracował 2 h, do pracy dołączył mistrz, i oni razem zakończyli pracę w 3 h. Ile części zrobił mistrz w ciągu godziny i ile uczeń, jeżeli mistrz w ciągu 2 h produkuje tyle części, ile uczeń w 3 h?

4 **1320.** Dwie skrzynie wypełniono gruszkami. Jeżeli z drugiej skrzyni przełożyć do pierwszej 10 gruszek, to w obu skrzyniach gruszek będzie po równo. Jeżeli z pierwszej skrzyni przełożyć do drugiej 44 gruszki, to gruszek w pierwszej skrzyni zostanie 4 razy mniej niż w drugiej. Ile gruszek jest w każdej skrzyni?

1321. Różnica między połową jednej liczby i 0,75 drugiej wynosi 8. Jeżeli pierwszą liczbę zmniejszyć o jego siódmą część, a drugą zwiększyć o jego dziewiątą część, to ich suma będzie wynosić 100. Znajdź te liczby.

1322. Suma trzech liczb, z których druga jest 5 razy większa niż pierwsza wynosi 140. Jeżeli drugą liczbę zwiększyć o 15 %, trzecią zmniejszyć o 10 %, a pierwszą liczbę nie zmieniać, to suma tych liczb będzie wynosić 139,5. Znajdź te liczby.

1323. Obwód prostokąta jest o 154 cm większy od jednego z jego boków i o 140 cm większy od drugiego. Znajdź pole prostokąta.

1324. Suma cyfr określonej liczby dwucyfrowej wynosi 8. Jeżeli jej cyfry zamienić miejscami, to otrzymamy liczbę, która jest o 18 większa od danej. Znajdź tą liczbę.

* **1325.** W dwóch kanistrach o pojemności 20 l i 15 l jest już określona ilość mleka. Jeżeli do większej kanistry z mniejszej dolejemy mleka do pełna, to w mniejszej kanistrze zostanie połowa początkowej ilości. Jeżeli do mniejszej kanistry dolać do pełna mleko z większej, to w większej zostanie $\frac{2}{3}$ od początkowej ilości. Ile litrów mleka jest w każdej kanistrze?

Najważniejsze w rozdziale 4

RÓWNANIE Z DWIEMA NIEWIADOMYMI

Równaniem liniowym z dwiema niewiadomymi nazywamy równanie w postaci $ax + by = c$, gdzie x i y – niewiadome. Liczby a, b i c nazywamy współczynnikami równania.

Rozwiązaniem równania z dwiema niewiadomymi nazywamy parę wartości niewiadomych, która przekształca równanie w prawidłową równość liczbową.

Równania z dwiema niewiadomymi mają te same ***cechy***, co równania z jedną niewiadomą:

1) jeżeli w równaniu otworzymy nawiasy lub zredukujemy wyrazy podobne, to orzymamy równanie równoważne podanemu;
2) jeżeli w równaniu przeniesiemy wyraz z jednej strony do drugiej, zmieniając jego znak na przeciwny, to trzymamy równanie równoważne podanemu;
3) jeżeli obie strony równania pomnożyć lub podzielić przez jedną i tę samą liczbę odmienną od zera, to otrzymamy równanie równoważne podanemu.

WYKRES RÓWNANIA LINIOWEGO Z DWOMA NIEWIADOMYMI

Wykresem równania z dwiema niewiadomymi x i y nazywamy figurę, która składa się ze wszystkich punktów płaszczyzny współrzędne których są rozwiązaniem danego równania.

Wykresem równania $ax + by = c$, w którym przynajmniej jeden ze współczynników a lub b odmienny od zera, jest prosta.

Żeby narysować wykres równania $y = m$, ystarczy oznaczyć na osi y punkt (0; m) i przeprowadzić przez niego prostą równoległą do osi x.

Żeby narysować układ równań $x = n$, wystarczy oznaczyć na osi x punkt (n; 0) i przeprowadzić przez niego prostą równoległą do osi y.

UKŁAD DWÓCH RÓWNAŃ LINIOWYCH Z DWIEMA NIEWIADOMYMI

Rozwiązaniem układu równań z dwiema niewiadomymi nazywamy parę wartości niewiadomych, która jest rozwiązaniem każdego z równań układu.

Rozwiązać układ równań oznacza znaleźć wszystkie jego rozwiązania lub udowodnić, że nie ma rozwiązań.

ROZWIĄZYWANIE UKŁADÓW DWÓCH RÓWNAŃ LINIOWYCH Z DWIEMA NIEWIADOMYMI METODĄ PODSTAWIANIA

1) Wyznaczyć z dowolnego równania układu jedną niewiadomą przez drugą.
2) Otrzymane dla tej niewiadomej wyrażenie podstawiamy do drugiego równania układu.
3) Rozwiązać otrzymane równanie z jedną niewiadomą, czyli znaleźć wartość danej niewiadomej.
4) Znaleźć odpowiednią do niej wartość drugiej niewiadomej.
5) Zapisać odpowiedź.

ROZWIĄZYWANIE UKŁADÓW DWÓCH RÓWNAŃ LINIOWYCH Z DWIEMA NIEWIADOMYMI METODĄ DODAWANIA

1) W razie potrzeby pomnożyć obie strony jednego lub dwóch równań układu przez takie liczby, żeby współczynniki przy jednej z niewiadomych stały się liczbami przeciwnymi.
2) Dodać według wyrazów równania układu.
3) Rozwiązać otrzymane równanie z jedną niewiadomą.
4) Podstawić znalezioną wartość niewiadomej w jedno z równań danego układu i znaleźć odpowiednia do niej wartość innej niewiadomej.
5) Zapisać odpowiedź.

ROZWIĄZYWANIE ZADAŃ ZA POMOCĄ UKŁADÓW RÓWNAŃ

1) Oznaczyć określone dwie niewiadome wielkości niewiadomymi (na przykład, x i y).
2) Według warunku zadania ułożyć układ równań.
3) Rozwiązać otrzymany układ.
4) Przeanalizować znalezione wartości niewiadomych zgodnie z warunkiem zadania, odpowiedzieć na pytanie w zadaniu.
5) Zapisać odpowiedź.

ZADANIA SRPAWDZAJĄCE WIEDZĘ WEDŁUG KURSU ALGEBRY DLA 7 KLASY

1 **1.** Sprawdź, czy liczba 7 jest pierwiastkiem równania:

1) $x - 2 = 5$; 2) $56 : x = 6$.

2. Wykonaj działania:

1) p^4p^3; 2) $t^9 : t^5$.

3. Czy przechodzie wykres równania $x - y = 5$ przez punkt:

1) $M(6; 2)$; 2) $N(4; -1)$?

2 **4.** Uprość wurażenie:

1) $(x - 3)(x + 3) - x(x - 5)$;

2) $(a + 2)^2 + (a - 7)(a + 3)$.

5. Rozłóż na czynniki:

1) $14p^3 - 21p^2m$;

2) $3a^2 - 12b^2$.

6. Rozwiąż równanie $5(x - 3) - 3(x + 2) = 3 - x$.

3 **7.** Narysuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji $y = 3x - 4$ i $y = 5$i znajdź współrzędne punktu ich przecięcia.

8. Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ -4x + 3y = 16. \end{cases}$

4 **9.** Z punktu A do punktu B wyruszył pieszy. Po 1 h jemu na spotkanie z punktu B wyjechała rowerzystka. Odległość między punktami A i B wynosi 58 km, a prędkość rowerzystki jest o 10 km/h większa niż prędkość pieszego. Znajdź prędkość rowerzystki i prędkość pieszego, jeżeli oni spotkają się po 4 h po wyruszeniu pieszego.

ZADANIA Z GWIAZDKĄ

Równania liniowe

1. Znajdź wszystkie wartości całkowite a, dla których pierwiastek równania $(a + 2)x = 8$ jest liczbą naturalną.

2. Pierwsza cyfra czterocyfrowej liczy wynosi 7. Jeżeli tą cyfrę przestawić na ostatnie miejsce, to otrzymamy liczbę mniejszą od początkowej o 1746. Znajdź liczbę początkową.

3. Nie rozwiązując równanie $5(2024x + 2025) = 13$, udowodnij, że pierwiastek nie jest liczbą całkowitą.

4. Rozwiąż równanie.
1) $|x| + |x - 2| = 0$;
2) $|x - 3| + |6 - 2x| = 0$.

5. Ile rozwiązań w zależności od liczby a (mówi się: *parametru* a) ma równanie:
1) $ax = 2$; 2) $ax = 0$?

6. Dla każdej wartośći parametru a rozwiąż równanie odnośnie niewiadomej x:
1) $2x - a = 15$;
2) $7x - a = 2x + 4a - 9$;
3) $(a - 3)x = 7$;
4) $ax = a$;
5) $ax + 1 = x + a$;
6) $a(x - 2) = x(a + 3)$.

Rozwiązanie. 4) Jeżeli $a = 0$, to otrzymujemy równanie $0 \cdot x = 0$, wtedy x będzie dowolną liczbą. Jeżeli $a \neq 0$, wtedy, dzieląc lewą i prawą stronę równania przez a, otrzymamy $x = 1$.
Odpowiedź: jeżeli $a = 0$, wtedy x będzie dowolną liczbą; jeżeli $a \neq 0$, wtedy $x = 1$.

7. Dla jakiej wartości parametru a jest równoważne równanie:
1) $7x + a = 5(x - a)$ i $7(x + a) = 4(10 - a)$;
2) $(a + 7)x = 18$ i $|x| = -1$?

8. Pociąg mija nieruchomą pasażerkę za 7 s, a wzdłuż peronu o długości 378 m przejeżdża za 25 s. Znajdź prędkość i długość pociągu.

9. Pociąg przejeżdża przez most o długości 171 m za 27 s, a pieszego poruszającego się z prędkością 1 m/s w jego stronę, za 9 s. Znajdź prędkość pociągu i jego długość.

10. Przez pierwszą rurę basen napełnia się wodą w czasie o połowę krótszym niż kiedy przez drugą rurę zapełni go na $\frac{2}{3}$ Osobno przez drugą rurę basen napełnia się 4 h dłużej niż przez pierwszą rurę. Za jaki czas każda rura osobno napełni basen?

11. Znajdź kąty trójkąta równoramiennego, jeżeli jeden z nich stanowi 25 % drugiego.

12. Kupiono tapety do remontu dwóch pokoi. Na remont pierwszego pokoju wykorzystano o 2 rolki więcej niż połowa kupionego, a na remont drugiego pokoju wykorzystano $\frac{2}{3}$ od ilości rolek, które wykorzystano na remont pierwszego pokoju. Ile rulonów tapety było kupiono, jeżeli po remoncie obu pokoi została 1 niewykorzystana rolka?

13. Stop miedzi i cynku zawiera o 320 g więcej miedzi niż cynku. Następnie po tym jak od stopu oddzielono $\frac{6}{7}$ tej masy miedzi i 60 % tej masy cynku, która była w stopie, jego masa zaczęła wynosić 100 g. Jaka była początkowa masa stopu?

Wyrażenia całkowite

14. Równość $(I + B + A + H)^4 = IBAH$ jest prawidłowa. Znajdź liczbę IBAH, jeśli różnym literom odpowiadają różne cyfry.

15. O ile procent można zwiększyć pole prostokąta, jeżeli jego długość zwiększyć o 15 %, a szerokość o 20 %.

16. Które jest większe: $\frac{10^{15}+1}{10^{16}+1}$ albo $\frac{10^{16}+1}{10^{17}+1}$?

17. Udowodnij, że liczba $2017 \cdot 2019 + 1$ jest kwadratem określonej liczby. Właściwie jakiej?

18. Udowodnij, że wartość wyrażenia $8n^3 - 8n$ dla dowolnej wartości naturalnej $n > 1$ jest wielokrotnością liczby 24.

19. Podaj wyrażenie $2m^2 + 2n^2$ w postaci sumy dwóch kwadratów.

20. Jaki wielomian należy napisać zamiast „gwiazdki”, żeby otrzymać tożsamość:
1) $(x + 1) \cdot * = x^2 - 4x - 5$;
2) $(x^2 - x + 1) \cdot * = x^3 + 2x^2 - 2x + 3$?

21. Rozłóż na czynniki:

1) $a^2b^2 - 2ab^2 + b^2 + a^4 - 2a^2 + 1$;
2) $1 - 3t + 3t^2 - t^3$;
3) $x^6 - 3x^4 + 6x^2 - 4$;
4) $2(m + 3n) + (m - n)(m + n) - 8$;
5) $a^3 + a^2 - b^3 - b^2$;
6) $8x^3 + 4x^2 - 2$.

22. Czy może suma kwadratów pięciu kolejnych liczb być kwadratem liczby naturalnej?

23. Uprość wurażenie:

$(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)(2^{64} + 1)$.

24. Liczba b jest średnią arytmetyczną liczb a i c. Udowodnij, że $a^2 + ac + c^2$ jest średnią arytmetyczną liczb $a^2 + ab + b^2$ i $b^2 + bc + c^2$.

25. *Zadanie Langrage'a.* Udowodnij tożsamość

$$(x^2 + y^2 + z^2)(m^2 + n^2 + p^2) - (xm + yn + zp)^2 =$$
$$= (xn - ym)^2 + (xp - zm)^2 + (yp - zn)^2.$$

26. Udowodnij, że liczba abcabc jest wielokrotnością liczb 7, 11 i 13.

27. Udowodnij, że wartość wyrażenia $555^{777} + 777^{555}$ jest wielokrotnością liczby 37.

28. Która trzycyfrowa liczba jest kwadratem dwucyfrowej liczby i szcześcianem jednocyfrowej liczby?

29. Udowodnij, że wartość wyrażenia $191^6 + 734^6 - 593^3$ dzieli się przez 10.

30. Udowodnij, że wartość wyrażenia $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ jest wielokrotnością 10.

31. Podaj wyrażenie $2x(x^2 + 3y^2)$ w postaci sumy sześcianów dwóch dwumianów.

32. Udowodnij tożsamość:

1) $(x - 2)(x - 1)x(x + 1) + 1 = (x^2 - x - 1)^2$;

2) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$.

33. Korzystając z wyników poprzedniego zadania, udowodnij, że liczba $2017 \cdot 2018 \cdot 2019 \cdot 2020 + 1$ jest kwadratem określonych liczb naturalnych y. Znajdź y.

34. Udowodnij, że różnica sześcianów dwóch kolejnych naturalnych liczb parnych przy dzieleniu przez 48, reszta wynosi 8.

35. Rozłóż na czynniki:
1) $y^5 + y + 1$;
2) $m^4 + m^2 + 1$;
3) $x^4 + 5x^2 + 9$;
4) $n^4 + 4$;
5) $x^4 + 2a^2x^2 - 4a^2b^2 - 4b^4$;
6) $m^3 - 2m - 1$;
7) $m^3 - 5m - 2$;
8) $x^4 - 2x^3y - 6x^2y^2 - 4xy^3 - y^4$.

36. Porównaj 5^{15} i 3^{23}.

Funkcje

37. Narysuj wykres funkcji:
1) $y = 2|x| + x$;
2) $y = |x| - 3x$;
3) $y = |2x| + 2x - 1$;
4) $y = 2x - |3x| + 3$.

38. Punkt A(a; b), gdzie $a \neq 0$, $b \neq 0$, należy do wykresu funkcji $y = x^2$. Czy należy do danego wykresu punkt:
1) $B(-a; b)$;
2) $C(a; -b)$;
3) $D(-a; -b)$?

39. Punkt $M(m; n)$, gdzie $m \neq 0$, $n \neq 0$, należy do wykresu funkcji $y = x^3$. Czy należy do danego wykresu punkt:
1) $N(-m; n)$;
2) $K(m; -n)$;
3) $P(-m; -n)$?

40. Znajdź punkty przecięcia wykresów funkcji $y = -4|x| + 3$

i $y = \begin{cases} 2x + 1, & \text{jeżeli } x \leqslant 0, \\ -3x + 1, & \text{jeżeli } x > 0. \end{cases}$

Układy równań liniowych

41. Ola może bez reszty kupić 7 rogalików i 3 zawijańce lub 3 rogaliki i 4 zawijańce. Jaki procent wynosi cena całego rogalika od ceny zawijańca?

42. Czy ma rozwiązanie równanie z dwiema niewiadomymi:
1) $x^2 + y^4 = -1$;
2) $|y| + x^2 = 0$;
3) $x^2 - |y| = 5$;
4) $5x^2 + y^8 + |x| = 0$?

43. W równaniui $ax + by = 43$ współczynniki a i b – są liczbami całkowitymi. Czy rozwiązaniem tego równania może być para liczb (5; 10)?

44. Ile rozwiązań ma równanie:
1) $(x + 1)^2 + y^2 = 0$;
2) $x^2 + y^2 + (y - 2)^2 = 0$;
3) $|x| + (y + 1)^2 = 0$;
4) $x((x - 3)^2 + (y + 4)^2) = 0$?

45. Sergiusz kupił kilka zeszytów po 10 UAH i kilka długopisów po 12 UAH 50 kop. Za całe zakupy zapłacił 150 UAH. Ile zeszytów kupił Sergiusz?

46. Narysuj wykres równania:

1) $(x + 1)(x - 2y) = 0$; 2) $x^2 - xy = 0$;
3) $(x^2 - 4)(y^2 + 4) = 0$; 4) $(|x| + 1)(|y| - 3) = 0$;
5) $|x| + x = y$; 6) $x = y|x|$.

47. Udowodnij, że równanie $x^2 - y^2 = 26$ nie ma rozwiązań w postaci liczb całkowitych (czyli rozwiązaniami nie mogą być całkowite liczby.).

48. Czy przecina wykres równanie $y + x^2 = 4$ oś x; oś y? Jeżeli tak, to podaj współrzędne punktu przecięcia.

49. Znajdź wszystkie pary liczb, które spełniają równanie $11x + 8y = 104$.

50. Znajdź współrzędne punktu przecięcia wykresu równania $(x - 3)(y + 5) = 0$ nie rysując wykresu funkcji:

1) z osią x; 2) z osią y.

51. Joanna zadała dwie dwucyfrowe liczby, jedna z których zaczyna się cyfrą 6, ponadto inne cyfry każdej z liczb różnią się od liczby 6. Jeżeli zamienić miejscami cyfry w każdej zadanej liczbie, to wartość ich iloczynu nie zmieni się. Jakie liczby zadała Joanna?

52. Ołeś urodził się w xX wieku. W 2009 roku on miał tyle lat, jaką jest suma cyfr jego roku urodzenia. W którym roku urodził się Ołeś.

53. Przy jakiej wartości a proste $3x + 4y = 5$ i $2x + 8y = a$ przecinają się w punkcie, który należy do osi y?

54. Dopasuj, jeżeli to możliwe, takie wartości m, dla której układ równań ma jedyne rozwiązanie; nie ma rozwiązań; ma nieskończenie wiele rozwiązań

1) $\begin{cases} 2x - y = 7, \\ mx - y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ 1,5x + y = m; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} mx - 2y = 1, \\ 4x - 8y = 4. \end{cases}$

55. Dla jakiej wartości równań a układ równań $\begin{cases} 4x - 3y = 10, \\ 2x + 5y = -8, \\ a(x + y) = 7 \end{cases}$ ma rozwiązanie?

56. Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} x - y = 2, \\ y - z = 3, \\ z + x = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 7, \\ y + z = 5, \\ z + x = -4. \end{cases}$

57. W wyniku mnożenia wielomianu $4x^3 - 2x^2 + 3x - 8$ przez wielomian $ax^2 + bx + 1$ otrzymaliśmy wielomian, który nie zawiera ani x^4, ani x^3. Znajdź współczynnik a i b i wielomian, który otrzymano w iloczynie.

58. Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases}(x-1)(y-4x)=0,\\ x+y=3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}(x-y)(x+1)=0,\\ (y-2)(x+y-6)=0;\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^2-y^2=0,\\ 3x-y=4;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x^2+2xy+y^2-1=0,\\ 3x-y=3.\end{cases}$

Rozwiązanie. 4) Pierwsze równanie układu przepiszemy następująco: $x^2 + 2xy + y^2 = 1$, czyli $(x + y)^2 = 1$. Stąd $x + y = 1$ lub $x + y = -1$. Dlatego rozwiązywanie początkowego układu równań sprowadzono do rozwiązania dwóch układów:

$$\begin{cases}x+y=1,\\ 3x-y=3\end{cases} \text{ i } \begin{cases}x+y=-1,\\ 3x-y=3.\end{cases}$$

Stąd $x = 1$; $y = 0$ i $x = 0{,}5$; $y = -1{,}5$.
Odpowiedź: (1; 0); (0,5; –1,5).

59. Rozwiąż układ równań z dwoma niewiadomymi:
1) $(x-2)^2 + (3x-y)^2 = 0$;
2) $(2x-y)^2 + x^2 + 8x + 16 = 0$;
3) $(7x + y - 3)^2 + x^2 + 2xy + y^2 = 0$;
4) $|x - y + 5| + x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$;
5) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$;
6) $x^2 - 2xy + 2y^2 + 6y + 9 = 0$.

60. Liczba b jest o 10 % większa niż liczba a i o 30 % większa niż liczba c. Znajdź liczby a, b i c, jeżeli a jest o 8 większe niż c.

61. Za 4 lata stosunek wieku brata do wieku siostry będzie wynosił 7 : 5. Ile lat obecnie mają każdy z nich, jeżeli 2 lata temu brat był dwa razy starszy niż siostra?

62. Zadano określoną liczbę dwucyfrową. Jeżeli tą liczbę podzielić przez sumę jej cyfr, to otrzymamy niepełny ułamek, który w reszcie jest równy 4 i 6. Jeżeli od danej liczby odjąć potrojoną sumę jej cyfr, to otrzymamy 16. Jaką liczbę zadano?

63. Ilość dziesiątków określonych trzycyfrowych liczb jest dwa razy większa niż ilość jednostek. Suma cyfr danej liczby wynosi 13. Jeżeli zamienić miejscami cyfry setek i jednostek, to otrzymamy liczbę o 495 mniejszą od danej. Znajdź tą liczbę.

64. Jeżeli pierwszą z dwóch danych liczb zwiększyć o 10 %, a drugą o 15%, to ich suma zwiększy się o 13 %. Jeżeli pierwszą z danych liczb zmniejszyć o 5 %, a drugą o 10 %, to suma liczb zmniejszy się o 48. Znajdź te liczby.

65. Do zrobienia remontu kupiono piasek i cement. W pierwszym dniu wykorzystano $\frac{1}{5}$ od całkowitej masy kupionego piasku i $\frac{1}{4}$ od całkowitej masy kupionego cementu, co łącznie stanowi 205 kg. Drugiego dnia wykorzystano ćwierć tej masy piasku, która została, co o 37 kg więcej niż masa piątej części cementu, która została po pierwszym dniu. Ile piasku i cementu kupiono do remontu?

66. Jeden bok trójkąta jest trzy razy większy niż drugo. Obwód trójkąta jest o 22 cm większy niż ich pół sumy i o 27 cm większy niż jego pół różnicy. Znajdź boki trójkąta.

67. Jeżeli długość prostokąta zwiększyć o 3 cm, a szerokość o 2 cm, to jego pole zwiększy się o 37 cm^2. Jeżeli każdy bok prostokąta zmniejszyć o 1 cm, to jego pole zmniejszy się o 12 cm^2. Znajdź obwód prostokąta.

68. Sztabka składa się z dwóch metali, masa których jest w stosunku 3 : 4. Inna sztabka mieści te same metale, ale masa których w stosunku 1 : 2. Po ile kilogramów od każdej sztabki złota trzeba wziąć, żeby otrzymywać sztabkę o masie 10 kg, w którym stosunek masy tych samych metali będzie 2 : 3?

69. Droga z wioski do miasta biegnie najpierw poziomo, a później pod górkę. Turysta przejechał na rowerze poziomą część drogi z prędkością 10 km/h, a w góre szedł pieszo z prędkością 3 km/h. i przybył do miasta za 1 h 40. W kierunku powrotnym trasę w dół turysta pokonał z prędkością 15 km/h, a poziomy odcinek z prędkością 12 km/7 i wrócił na wioskę za 58 min po wyjeździe z miasta. Znajdź odległość między miastem a wioską.

70. W jednym zbiorniku kest 490 l wody, w drugim – 560 l. Jeżeli pierwszy zbiornik napełnić wodą do pełna z drugiego zbiornika, to drugi zbiornik będzie napełniony do połowy. Jeżeli drugi zbiornik napełnić wodą do pełna z pierwszego zbiornika, to pierwszy będzie wypełniony tylko na trzecią część. Określ pojemność każdego ze zbiorników.

71. Autobusy komunikacji miejskiej, które według rozkładu jazdy ruszają sobie na spotkanie o 8 godzinie z punktów A i B, zwykle spotykają się o 8 h i 12 min. Ale pewnego razu autobus komunikacji miejskiej wyruszył w trasę o 8 h 8 min i spotkał się z innym autobusem o 8 h i 17 min. Znajdź prędkość jednego i drugiego autobusu, jeżeli odległość między A i B wynosi 24 km.

72. Z punktu M do punktu N o 7 h i o 7 h 30 min wyjechały 2 autobusy z jednakową prędkością. O 7 h 10 min z punktu N do punktu M wyjechała rowerzystka. Ona spotkała pierwszy autobus o 7 h 40 min, a drugi o 8 h 01 min. Znajdź prędkość rowerzystki i każdego z autobusów, jeżeli odległość między punktami M i N wynosi 37 km.

73. Turysta udał się z miasta do wioski, odległość między którymi wynosi 24 km. Po 1 h 20 min ruszył za nim rowerzysta, która za pół godziny dogonił turystę. Po przybyciu do wioski rowerzysta nie zatrzymując się, zawrócił z powrotem i spotkał turystę za półtora h po pierwszym spotkaniu. Znajdź prędkość turysty i prędkość rowerzysty.

74. Z miasta A do miasta B o 9 h wyjechało dwa autobusy. W ten sam czas z miasta B i do miasta A wyjechała rowerzystka. Jeden autobus zobaczyła po drodze o 10 h 20 min, a drugi o 11. Znajdź prędkości rowerzysty i każdego z autobusów, jeżeli prędkość jednego autobusu wynosi $\frac{7}{12}$ od prędkości drugiego, a odległość między miastami to 120 km.

75. Po okręgu, długość jakiego to 500 m, przemieszczają się dwa punkty, 2 obiekty poruszają się. Spotykają się obiekty każde 10 s, jeżeli poruszają się w przeciwnym kierunku, i każde 50 s, jeżeli w jednym pomieszczeniu. Znajdź prędkość każdego z obiektów.

ODPOWIEDZI I WSKAZÓWKI DO ĆWICZEŃ

Powtarzamy matematykę dla klas 5–6

11. 1834 r. **12.** 1816 r. **13.** 1) 9; 2) 2; 3) 6. **14.** 1) 9; 2) 2; 3) 2. **15.** 10 044; 99 944. **16.** 1014; 9984. **24.** 1) 29,384; 2) 4,855. **25.** 1) 3,026; 2) 0,6505. **41.** 250 UAH. **42.** 50 kg. **43.** Zwiększyła się o 2 %. **44.** Zmniejszyła się 8 %. **53.** 1) 4,75; 2) 0,1. **54.** 1) 0,25; 2) 0,8. **55.** 1) O 25 %; 2) o 20 %. **56.** 1) Zmniejszyła się 10 %; 2) Zwiększyła się o 5 %. **57.** 7,2 %. **58.** 62,5 %. **71.** 1) –0,5; 2) –2. **72.** 1) –23; 2) 1,35. **73.** VI w. **74.** 1108 r. **75.** $a + 22b$; –36. **76.** $30y - x$; –35. **77.** $-2\frac{14}{65}$. **78.** 28,09. **79.** –0,512. **80.** 20. **81.** 12.

Rozdział 1

§ 1

97. 1), 2), 4), 6), 7) Tak; 3), 5), 8) nie. **100.** Za 16 miesięcy. **103.** 999.

§ 2

122. 1) –5; 2) –2; 3) –4,75; 4) –10. **123.** 1) 1; 2) –3; 3) –2,5; 4) –5. **124.** 1875 r. **125.** 1804 r. **126.** 1) 0; 2) $\frac{c-b}{2}$; 3) $-2m$; 4) $b - 3a$. **127.** 1) 0; 2) $\frac{2m-a}{2}$; 3) $2b$; 4) $2a - p$. **128.** 1), 5), 6) Tak; 2), 3), 4) nie. **129.** 1) 4; 2) 1,6. **130.** 1) 1,2; 2) –1,8. **132.** 1) –4; 4; 2), 6) równanie nie ma rozwiązań; 3) –3; 3; 4) –5; 5) 6; 8; 7) 3; –4; 8) –6; 6; 9) –3; 5. **133.** 1) –9; 9; 2) równanie nie ma rozwiązań; 3) –8; 8; 4) 0,5; 5) 2; 5; 6) –4; 4. **134.** 1) 2; 2) $1\frac{5}{7}$; 3) –9. **135.** 1) 2; 2) 10. **136.** 1) Nie ma rozwiązań; 2) x – dowolna liczba. **137.** 1) x – dowolna liczba; 2) Nie ma rozwiązań. **138.** 1) 5; 2) 3; 3) –5; 4) –1; 5) Nie ma rozwiązań; 6) x – dowolna liczba. **139.** 1) 1; 2) 3; 3) 0,2; 4) x – dowolna liczba. **140.** 1) $b = 11$; 2) $b = 4{,}5$. **141.** 1) $a = 24$; 2) $a = 3{,}5$. **142.** –4; –2; –1; 1; 2; 4. **143.** –6, –3, –2, –1. **144.** 1) 1; 2) –3; 3) nie ma takich wartości a. **145.** 1) –1; 2) 3; 3) nie ma takich wartości b. **146.** 1) 1; 2) –2; 3) nie ma takich wartości m. **147.** 1) –2; 2) nie ma takich wartości a; 3) 4. **148.** 1) Jeżeli $b = -1$, to równanie nie ma rozwiązań; jeżeli $b \neq -1$, to $x = \frac{7}{b+1}$; 2) jeżeli $b = 5$, to x – dowolna liczba; jeżeli $b \neq 5$, to $x = -1$; 3) jeżeli $b = 2$, to równanie

nie ma rozwiązań; jeżeli $b = -2$, to x – dowolna liczba; jeżeli $b \neq 2$, $b \neq -2$, to $x = \frac{b+2}{|b|-2}$. **149.** 1) 3; 2) –3; 4. **154.** 1) 250 mg; 2) 5 racji dobowych. **158.** $x = 6$, $y = 7$ lub $x = 7$; $y = 6$.

§ 3

168. 48. **178.** 60 pierogów; 63 pierogi. **179.** 11 200 UAH. **180.** 45 km/h; 18 km/h. **181.** 15 kg; 12 kg. **182.** 12 km. **183.** 7 cm; 11 cm; 77 cm^2. **184.** 48 opowiadań, 24 opowiadania. **185.** 27 UAH; 9 UAH. **186.** 125, 137, 168 zestawów. **187.** 24 cm, 33 cm, 48 cm. **188.** Nie. **189.** Nie. **190.** Za 4 lata. **191.** 36 krzaków; 12 krzaków. **192.** Po 40 urlopowiczów. **193.** 24 kg. **194.** 15 zeszytów; 10 zeszytów. **195.** 7 opakowań, 5 opakowań. **196.** 28 uczniów. **197.** 50 kg. **198.** 48 i 18. **199.** 90 i 120. **200.** 18 km/h. **201.** 2 km/h. **202.** 6,5 h; 78 km. **203.** 2,5 h, 10 km. **204.** 5 kg; 10 kg; 15 kg. **205.** 7 zadań; 10 zadań; 14 zadań. **209.** 1) $a < 0$; 2) $a > 0$. **210.** Nie.

Ćwiczenia powtórzeniowe dla rozdziału 1

215. Nie. **218.** 1) x – dowolna liczba; 2) Nie ma rozwiązań; 3) 2; 4) 0,4. **219.** 1) 0; 2) –3. **220.** Jeżeli $a = 1$, to nie ma rozwiązań; jeżeli $a \neq 1$, to $x = \frac{8}{a-1}$. **223.** 3 UAH 60 kop. **224.** 6 kg; 24 kg. **225.** 2 km/h. **226.** 60 km/h. **227.** 24 pierogi; 48 pierogów. **228.** 8 pracowników; 90 000 UAH. **229.** 5 dni. **230.** 45 g; 135 g.

Rozdział 2

§ 4

251. $y - 6x$; 1996 r. **252.** $7a - b$; 1615 r. **254.** 1) 9; 2) –2,25; 3) $-\frac{4}{9}$; 4) $-\frac{3}{4}$. **255.** 1) 4; 2) $-\frac{4}{7}$; 3) $-1\frac{3}{4}$; 4) $-1\frac{1}{4}$. **256.** 1) $x^2 - y^2$; 2) $ab - mn$; 3) $d^2 - (d - a)(d - b)$, lub $ad + b(d - a)$, lub $bd + a(d - b)$. **259.** 84 km. **260.** 27 600 UAH. **263.** 1) Tak; 2) nie.

§ 5

283. 1) $2x - 3$; 2) $6m - 4n$; 3) $2p - 1$; 4) $2x - y$; 5) $3\frac{1}{4}a + 5\frac{3}{4}b$; 6) $2n - m$. **284.** 1) $3a - 1$; 2) $13m - 13a$; 3) $1 - 2y$; 4) $-0{,}6b$. **292.** 1) 5 %; 2) 0,25 %. **293.** 16 km/h. **294.** 120 km; 80 km.

§ 6

325. 1) 1; 2) 3; 3) –5. **326.** 1) 2; 2) 1; 3) 5. **328.** 1) $5\frac{2}{15}$; 2) $-2\frac{11}{25}$. **329.** Tak. **330.** 1) 36 g.

§ 7

367. 1) 1000; 2) 25; 3) 1; 4) 128; 5) 2; 6) $\frac{4}{9}$. **368.** 1) 1; 2) 32; 3) $\frac{8}{9}$; 4) $\frac{4}{9}$. **369.** 1) 27; 2) 32; 3) 243; 4) 25. **370.** 1) 7; 2) 12; 3) 324; 4) $\frac{3}{16}$. **371.** 1) 7; 2) 12; 3) 20; 4) $\frac{81}{256}$. **372.** 1) $6^{10} = 36^5$; 2) $10^{20} > 20^{10}$; 3) $5^{14} < 26^7$; 4) $2^{3000} < 3^{2000}$. **374.** 1) 68 UAH; 2) 74,8 UAH; 3) zmniejszyła o 5,2 UAH; 4) zmniejszyła o 6,5 %. **375.** 1) 7; 2) 9; 3) –1,5; 4) –26. **376.** $3{,}54a - 8{,}6b$; 103,7. **377.** 15 róż. **379.** Tylko jedną metodą.

§ 8

390. 1), 3), 4) Nie; 2) tak. **391.** $18x^3$ cm^3. **392.** $3b^2$ dm^2. **395.** Oksana otrzymała syk o 14,14 UAH więcej niż Leszek. **397.** 666 stron.

§ 9

410. 1) $2m^3$ lub $-2m^3$; 2) $0{,}6p^4q^5$ lub $-0{,}6p^4q^5$; 3) $-2c^3$; 4) $10c^2m^4$; 5) $2ab^2$ lub $-2ab^2$; 6) c^3p^9. **411.** 1) $3m^5n^{11}$; 2) $\frac{1}{5}ab^6$; 3) $-12mp$; 4) $-\frac{1}{9}a$; 5) –1; 6) $-\frac{1}{64}n^7$. **412.** 1) $5mn^5$; 2) $-3x^6$; 3) $-\frac{1}{3}a^3b$; 4) $-\frac{1}{24}$. **413.** 1) $240m^8$; 2) $-8m^{17}$; 3) $-a^{13}b^{19}$; 4) $-5\frac{1}{3}a^8c^{13}$. **414.** 1) $24a^{13}$; 2) $-100a^{25}$; 3) $-2a^{31}b^9$; 4) $-12\frac{4}{5}m^7n^{13}$. **416.** 1) $8a^{11}b^9$; 2) $6\frac{3}{4}m^{20}n^{24}$; 3) $-49m^{14}n^{14}$; 4) $-32x^{20}c^{50}$. **417.** 1) $2700m^7n^8$; 2) $-2a^{13}b^9$; 3) $-27a^{26}m^{10}$; 4) $x^{28}y^{28}$. **420.** 1) $-0{,}1a^{2n+3}b^{2n+5}$; 2) $72a^{6n+6}b^{15+6n}$; 3) $a^{8n+10}b^{18n+3}$; 4) $x^{13n-5}y^{12n+5}$. **421.** 1) $2\frac{1}{3}$; 2) $11\frac{2}{3}$; 3) –49; 4) 343. **422.** 1) $1\frac{4}{5}$; 2) $12\frac{3}{5}$; 3) –81; 4) 729. **424.** 1) b^4; 2) $-m^8$; 3) a^7; 4) $-n^8$. **425.** 98. **426.** 3500 kg.

§ 10

447. 1) $-5a^2b^4 - 12a^2b + 2a^2b^2$, szóstej potęgi; 2) $7x^4y^3 - 10x^4y^2 + 21x^2y^4$, siódmej potęgi. **448.** 1) $4a^2b^3 - a^4$, piątej potęgi; 2) $2xy^3 + 15x^3y - 7xy^2$, czwartej potęgi. **449.** $2xy^3 - 2x^3y + 748{,}75$; 748 km. **455.** 1), 6) Dodatnie; 3), 4) ujemne. **459.** 1) 1500 kW. **461.** 37; 38.

§ 11

474. 1) 3; 2) 3. **475.** 1) 0; 2) 3. **478.** 1) 1,2; 2) –7. **479.** 1) 6; 2) 2,25. **491.** 1) –9; 2) 101. **492.** 1) –11; 2) 4. **494.** 1) $2m^2 + 7mn$; 2) $12m^2 + 3mn - 2n^2$. **495.** *Wskazówka.* Po uproszczeniu różnicy wielomianów otrzymamy wyrażenie $0{,}2x^4 + 0{,}5x^2 + 4$. Najmniejsza wartość danego wyrażenia wynosi 4, jeżeli $x = 0$. **498.** 1) $100x + 10y + z$; 2) $100z + 10y + x$; 3) $100x + 11y + 11z$; 4) $90y + 9x + z$. **501.** 1) 4^{30}; 2) 8^{20}; 3) 16^{15}; 4) 32^{12}. **502.** 1) 0,3 l. **504.** *Wskazówka.* Liczba naturalna jest wielokrotnością liczby 36 wtedy i tylko wtedy, kiedy jest ona wielokrotnością liczby 4 i 9. Dalej wykorzystaj podzielność przez 4 (zadanie nr 331) i przez 9.

§ 12

528. 1) $2a$; –7; 2) $11 - 27x$; 12; 3) $3a^2 - 3b^2$; 0; 4) $2xy^3$; –2. **529.** 1) $13a^2$; $\frac{1}{13}$; 2) $8x^2 - 8y^2$; 0. **530.** 1) 2; 2) –27; 3) –1; 4) 0,25; 5) x – dowolna liczba; 6) Nie ma rozwiązań. **531.** 1) –0,75; 2) –32; 3) –0,25; 4) 0,75; 5) Nie ma rozwiązań; x – dowolna liczba. **532.** 1) $1\frac{2}{3}$; 2) –1,5. **533.** 16 g. **534.** 12 UAH 50 kop.; 30 UAH; 45 UAH. **535.** 18 cewek; 12 cewek. **536.** 18 km/h. **539.** 1) $-x^{n+4}$; 2) $-y^{2n}$; 3) $-3z^n$. **541.** 1) $\frac{1}{3}a^7b^{12}$; 2) $-10m^8n^{23}$. **542.** 1) 8; 2) 87,5. **543.** 1) $t_F = \frac{5}{9}(t_C - 32)$. **545.** *Wskazówka.* Rozpatrzymy sumę $(6a + b) + (6b + a)$ i udowodnij, że przy naturalnych a i b, ona jest wielokrotnością liczby 7.

§ 13

568. 1) 74 300; 2) 1 103 000. **569.** 1) –5,23; 2) 0; 3) 4; 4) –27. **570.** 1) 10,11; 2) $1\frac{1}{5}$. **574.** 1) 0; $\frac{1}{4}$; 2) 0; –4; 3) 0; –9; 4) 0; 1,5. **575.** 1) 0; $-\frac{1}{12}$; 2) 0; 10; 3) 0; 14; 4) 0; $-\frac{1}{2}$. **576.** 1) $-\frac{2}{3}$; 5; 2) –2,5; 2. **577.** 1) –1,25; 7; 2) 3; –3,5.

580. 1) $25(m-2)^2$; 2) $81(2a+3b)^2$. **581.** 1) 3; 7; 2) –2; 5. **582.** 1) 2; 4; 2) $-2\frac{1}{3}$; 4. **586.** 24 cm i 8 cm. **588.** Na przykład, $a=-2$; $b=0$; $c=1$.

§ 14

604. 1) –6; 2) 0. **605.** 1) 2; 2) 0. **608.** 1) $27m^3+8n^3$; 2) $8x^3-125y^3$; 3) $-x^3+x^2a+5xa^2-2a^3$; 4) $-3m^3+16m^2x-2mx^2-x^3$. **609.** 1) $27x^3-y^3$; 2) $27a^3+12a^2b-7ab^2-2b^3$. **610.** 1) $14-15m$; 2) $-18y^2-4$; 3) $4a+4$; 4) $b+15$. **611.** 1) $-x^2-15$; 2) $11a+10$; 3) $12-17x$; 4) 16. **620.** 1) x^2-5x^3; 44; 2) a^3; 27. **621.** 1) $-24x$; –27; 2) $27b^3$; 1. **622.** 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$. **623.** 1) –2; 2) –1. **626.** 14; 15; 16. **627.** 2. **628.** 3. **631.** 18; 19; 20; 21. **632.** 24; 25; 26; 27. **635.** 18 cm. 12 cm. **636.** 350 km. **637.** 1) 4; 2) $\frac{1}{5}$. **640.** 185 h. **641.** $27\frac{1}{125}$. *Wskazówka.* Oznacz $a=\frac{1}{125}$; $b=\frac{2}{129}$; Wtedy otrzymamy wyrażenie $(3-a)(4+b)+(3+a)(5+b)-6b$, które nadal trzeba będzie uprościć.

§ 15

655. 1) 0; 2) $-\frac{5}{9}$. **656.** 1) 0; 2) –0,1. **657.** 1) $3x^2y(3xy^2-1)\times$ $\times(5y-x^2)$; 2) $(0{,}7m-0{,}9n)(3n^2-4p^2)$. **658.** 1) $2(m^2-2x^3)(4c-3x)$; 2) $xy(3y+4x^2)(0{,}4y-0{,}5x^4)$. **659.** 1) 5; 8; 2) –0,4. **660.** 1) –7; 1; 2) $-\frac{1}{7}$. **661.** 1) $(t^2-p)(a+t-b)$; 2) $(a-m)(x^2+y^2-1)$; 3) $(m-7)\times$ $\times(b-1+m^2)$; 4) $(a-b)(6x+3y-z)$. **662.** 1) $(ab+1)(a+b+9)$; 2) $(4x+5m)(2a+b-1)$. **663.** 1) $(x+1)(x+4)$; 2) $(x-1)(x-4)$; 3) $(x-2)(x+3)$; 4) $(a+b)(a+3b)$. **664.** 1) $(x-1)(x-5)$; 2) $(x-3)\times$ $\times(x+2)$; 3) $(x-3)(x+5)$; 4) $(a+2b)(a+3b)$. **666.** 1) –2; 2) –10. **667.** 3 : 2. **669.** Na przykład, $x=66$; $y=33$. *Wskazówka.* Należy wziąć pod uwagę, że $33^6=33\cdot 33^5=32\cdot 33^5+1\cdot 33^5=2^5\cdot 33^5+33^5=$ $=66^5+33^5$.

§ 16

704. 1) 1; 2) 0. **705.** 1) –2; 2) –16. **707.** $a^{16}+b^{16}$. **709.** 1) a^3+6a^2+ $+12a+8$; 2) $8b^3-12b^2+6b-1$. **710.** 1) $x^3-6x^2+12x-8$; 2) $8m^3+12m^2$ $+6m+1$. **711.** 1011 r. **712.** 24; 26; 28. **714.** 130 UAH. **717.** *Wskazówka.* $(n^2+n)(n+2)=n(n+1)(n+2)$ – jest iloczynem trzech kolejnych dodatnich liczb całkowitych.

§ 17

731. 1) 5; 2) $-\frac{1}{8}$; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) 1,75. **732.** 1) –8; 2) $\frac{1}{6}$; 3) –1,5; 4) 0,2. **735.** 1) $(x-1)^2$; 2) $(a+4)^2$. **737.** 1) $x^2-4x+4=(x-2)^2 \geqslant 0$; 2) $-x^2+2x-1=-(x-1)^2 \leqslant 0$. **739.** *Wskazówka.* $x^2+4x+5=x^2+4x+4+1=(x+2)^2+1$. **740.** *Wskazówka.* $x^2+6x+11=x^2+6x+9+2=(x+3)^2+2$. **743.** 1) 23; 2) 0. **744.** 1) $m^3-4m^2-11m+30$; 2) $p^{10}+1$. **745.** 87 UAH.

§ 18

759. 1) –3; 2) 16. **760.** 1) –2; 2) 27. **770.** 1) 2; 2) 1; 3) $-\frac{8}{43}$. **771.** 1) –1,6; 2) –6; 3) $\frac{2}{3}$. **772.** 1) $6a+18$; 2) $55x^2+48xy-73y^2$; 3) b^4-18b^2+81; 4) $625-50a^2+a^4$. **773.** 1) $13-4c$; 2) $56x^2+20xy-8y^2$; 3) a^4-72a^2+1296; 4) $16-8m^2+m^4$. **775.** 1) $x^2+2xy+y^2-1$; 2) $a^2-b^2-2bc-c^2$; 3) $m^2+2mn+n^2-4p^2$; 4) x^2-y^2-4y-4. **776.** $9\frac{5}{6}$. **777.** 120 m²; 8 h.

§ 19

798. 1) –4; 6; 2) –6; 1; 3) –2,2; 1; 4) –1; 11. **799.** 1) –8; 4; 2) –1; 2,6; 3) –7; 0; 4) 1; 4. **801.** 1) $(6a^3-b)(b-4a^3)$; 2) $8p(2p-3m^2)$; 3) $(5x+9y)(9x-5y)$; 4) $4c(a+b)$; 5) $(a^2+a-c^4)(a^2+a+c^4)$; 6) $4b(1-5a)$. **802.** 1) $3(a^2-3b)(3a^2-b)$; 2) $3(m^4-c)(3c-m^4)$; 3) $4(4b-a)(3a-b)$; 4) $4t(x-y)$. **803.** 1) 2; 1,5; 2) –3; 3; 3) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 4) nie ma pierwiastków. **807.** Prędkość statku większa od prędkości rowerzysty. **810.** *Wskazówka.* Użyj zważonego zboża jako wagi.

§ 20

825. 1) $5a+8$; 2) $9b-27$; 3) 65; 4) $4b^6-4b^3-2$. **826.** 1) $4a-64$; 2) 35; 3) $125+b-2b^2$; 4) a^6-1. **827.** 1) –7; 2) –0,1. **828.** 1) 8; 2) –0,2; 3) 0,5; 4) –2. **829.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) 2. **830.** 1) $9(a^2+3a+3)$; 2) $(x-2)(x^2-10x+28)$; 3) $(2p-1)(13p^2+5p+1)$; 4) $(5x-1)\times(13x^2+2x+1)$. **831.** 1) $(2a+1)(a^2+a+1)$; 2) $(b-4)\times(b^2-2b+4)$; 3) $(4b+1)(31b^2-7b+1)$; 4) $(5a+2)(13a^2-4a+4)$. **833.** Tak. **836.** 50 zeszytów i 10 zeszytów. **837.** 132 UAH. **839.** 7 kurczaków.

§ 21

855. 1) $(a-3)(a+3)(a^2+9)$; 2) $(2-c)(2+c)(4+c^2)$; 3) $(x-1)\times\times(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$; 4) $(a-b^2)(a+b^2)(a^2+b^4)$. **857.** 1) 0; –1; 1; 2) 0; –4; 4; 3) 0; 4) 0; –2. **858.** 1) 0; –1; 1; 2) 0; –6; 6; 3) 0; 4) 0; 1. **859.** 1) $7(a-1)(b+3)$; 2) $6(m-2)(n-5)$; 3) $-a(b+3)(c+4)$; 4) $a(a+1)(a-b)$. **860.** 1) $3(15-b)(2-a)$; 2) $-3(n+3)(m+6)$; 3) $a^3(a+1)(x+1)$; 4) $ap(p^2+1)(a-3)$. **861.** 1) $(a+b-4)\times\times(a+b+4)$; 2) $(a-x-y)(a+x+y)$; 3) $(p+5-x)(p+5+x)$; 4) $(p-x+10)(p+x-10)$. **862.** 1) $(x+y-5)(x+y+5)$; 2) $(m-a+b)(m+a-b)$; 3) $(m-4-a)(m-4+a)$; 4) $(m-b-4)\times\times(m+b+4)$. **863.** 1) $(a-9)(a+10)$; 2) $(a+m)(m-a-1)$; 3) $(x-y)(x+y-1)$; 4) $(x-y)(x+y+1)$; 5) $(a-3b)(1+a+3b)$; 6) $(4m+5n)(4m-5n-1)$. **864.** 1) $(a-b)(a+b-1)$; 2) $(p+b)\times\times(p-b-1)$; 3) $(4x-5y)(4x+5y+1)$; 4) $(10m-9n)\times\times(10m+9n-1)$. **865.** 1) $(m-3)(p-1)^2$; 2) $(1-a)(1+a)(1-2b)^2$. **867.** 1) $(a-b)(b-1)(b+1)$; 2) $(x-a)(x+a)(a+7)$; 3) $(p+q)\times\times(p-2)(p+2)$; 4) $(a+5)(a-m)(a+m)$. **868.** 1) $(m+n)\times\times(m^2-mn+n^2+1)$; 2) $(a-b)(1-a^2-ab-b^2)$; 3) $(a+2)\times\times(a^2-3a+4)$; 4) $(2p-1)^3$. **869.** 1) $(m+n)(m-1)(m+1)$; 2) $(b-3)(a-2)(a+2)$; 3) $(a-b)(a^2+ab+b^2+1)$; 4) $(x+1)\times\times(x^2-x-4)$. **870.** 1) 5; 1; –1; 2) 2; –2. **871.** 1) 1; –1; 2) 1; 3; –3. **872.** 1) $4(2a+b)(a+2b)$; 2) $-(3y+22m)(33y+2m)$. **873.** 1) $(a^2-2ab+4b^2)(a+2b+1)$; 2) $(m-2n)(m^2+2mn++4n^2+m-2n)$. **874.** 1) $(a-b)(a^2+ab+b^2+a-b)$; 2) $(c+d-x-y)(c+d+x+y)$. **875.** 1) $(x+1)(x-3)$; 2) $(x-1)\times\times(x+9)$; 3) $(x+1)(x-4)$. **878.** –16. **879.** 8 h. **880.** Zysk 2100 UAH. **881.** Za 6 min.

Ćwiczenia powtórzeniowe dla rozdziału 2

885. 1) 5; 2) 17; 3) –6; 4) –1,2; 5) 11; 6) 2,4. **890.** 1), 4) Nie; 2), 3) tak. **894.** 1) 5; 2) 1; 3) 6; 4) 2. **895.** 1) Tak; 2) nie. **899.** 1) a^{25-3n}; 2) a^{5n+3}. **900.** 1) 6; 2) 7. **906.** 1) $3m^2n$; 2) $-7p$. **908.** 1), 3), 4) Tak; 2) nie. **909.** 3. **912.** a^3b; –5. **913.** Nie. **918.** $2xy+7xy^2$; –69. **922.** $x=2$. **923.** $x^3-\frac{5}{8}x^2$. **924.** 24 ц; 21 ц; 20 ц. **925.** 2. **929.** 1) 5; 3; 2) 2; 7; –7. **930.** 1) –2; 2) –12; 3) 28; 4) 8. **934.** 1) –1; 2) 8. **937.** 50 cm. 40 cm. **940.** 1) $(3c-2y)(4x^2-3y^3)$; 2) $(0{,}8m-0{,}5n)\times\times(2n^2-3p^2)$. **941.** 1; –6. **945.** 25. **946.** Tak. **947.** 1) $x^2+2xy++y^2+2xa+2ya+a^2$; 2) $b^2-2bc+c^2-2bd+2cd+d^2$;

3) $m^2 + 2mn + n^2 + 4m + 4n + 4$; 4) $a^2 + 6a + 9 - 2ac - 6c + c^2$.
951. 1) $\frac{1}{3}$. *Wskazówka*. Pomnożyć obie strony równania przez 3; 2) $-\frac{1}{5}$.
953. 2) *Wskazówka*. Wyrażenie tożsamościowo równa się wyrażeniu $(a-2+m)^2$. 3) *Wskazówka*. Wyrażenie tożsamościowo równa się wyrażeniu $(a + b + 4)^2$. **958.** 1. **961.** 1) $-\frac{b}{a}$; $\frac{b}{a}$; 2) $0{,}3a$; $-0{,}3a$; **962.** 1) Tak; 2) tak. **963.** 1) $(5 - 4x)(5 + 4x)$; 2) $(3x - 5)(3x + 5)$. *Wskazówka*. Najpierw uprość wyrażenie. **970.** 1) $9(a - b)(a^2 + ab + b^2)$; 2) $2(n + 3)(m - b)$; 3) $\left(\frac{1}{3}p-1\right)\left(\frac{1}{3}p+1\right)\left(\frac{1}{9}p^2+1\right)$; 4) $(m - 2n - 5) \times$ $\times (m - 2n + 5)$; 5) $(b - 6)(b + 7)$; 6) $(m - n)(m - 2)(m + 2)$. **971.** 1) $m^2(a - 1)(m - 1)(m + 1)$; 2) $a(b - 1)(a - 1)(a + 1)$; 3) $(b + 1) \times$ $\times (b - 1)^2$; 4) $(x - 3)(x^3 + 4x^2 + 3x + 9)$.

Rozdział 3

§ 22

1003. 1) 0,6; 2) 2. **1004.** 1) Jeżeli $x = -5$, to $y = -23$; jeżeli $x = 0$, to $y = 0$; jeżeli $x = 3$, to $y = -6$; 2) jeżeli $x = -5$ lub $x = 0$, to $y = 7$; jeżeli $x = 3$, to $y = 9$. **1005.** 1) Jeżeli $x = -2$, to $y = -16$; jeżeli $x = 0$, to $y = -2$; jeżeli $x = 4$, to $y = -12$; 2) jeżeli $x = -2$ lub $x = 0$, to $y = 3$; jeżeli $x = 4$, to $y = -16$. **1006.** 4. **1007.** 0. **1009.** 10 cm.

§ 23

1016. 1) 0; 2) 2; 3) 0; 4) 5. **1017.** 1) 0; 2) 3; 3) 0; 4) –2. **1022.** 1), 4) Tak; 2), 3) nie. **1023.** 1), 3) Tak; 2), 4) nie. **1026.** 1) 0; 4; 2) –4; 4; 3) –5; 0. **1027.** 1) 0; –2; 2) –5; 5; 3) 0; 4. **1030.** Nie. **1031.** 1) 2 kg; 2) 6 kg; 3) 1 kg; 4) 6 l. **1034.** 1) 450 l.

§ 24

1065. $k = -1{,}5$. **1066.** $l = -3$. **1067.** 1) $(0; -20)$; $\left(13\frac{1}{3};\ 0\right)$; 2) $(0; 5)$; $(20; 0)$. **1068.** 1) $(0; -40)$; $(200; 0)$; 2) $(0; 18)$; $(54; 0)$. **1069.** $y = 100x$. **1070.** $y = -9x$. **1074.** $k = 0$; $l = 5$. **1075.** $k = 0$; $l = -5$. **1076.** *I*: $y = -3x$; *II*: $y = x + 3$; *III*: $y = 3x$. **1077.** $-5 \leqslant y \leqslant 9$. **1078.** 1) $(2; 2)$; 2) $(1{,}2; -1{,}2)$; 3) $(3; 6)$. **1083.** 1) 0; 2) –1. **1084.** 1) $16m^2 - 3\frac{3}{4}$; 2) $25y^2 + 4ay$. **1085.** 13 zeszytów. **1087.** 1) 16 %; 2) 18 %.

Ćwiczenia powtórzeniowe dla rozdziału 3

1099. $k = -3$; $l = 10$.

Rozdział 4

§ 25

1120. $p = 3$. **1121.** $n = 3$. **1122.** 1) $m = -35$; 2) $m = 15$. **1123.** 1) $d = 19$; 2) $d = -2$. **1125.** (5; 5). **1126.** 1) $p = 2$; 2) $p = 21$. **1127.** 1) Takich par liczb naturalnych nie ma; 2) (1; 1); 3) (8; 1), (1; 2); 4) (1; 7), (7; 1). **1130.** 1) 6; 2) 13. *Wskazówka.* $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$; 3) 25; 4) –19. **1131.** 8400 UAH.

§ 26

1149. 1) $m = 0$; 2) $m = 10$; 3) $m = -25$. **1150.** 1) (0; –3), (–21; 0); 2) (0; –5), (3; 0). **1151.** 1) (0; 18), (6; 0); 2) (0; –14), (–4; 0). **1155.** Wykresy nie przecinają się. **1159.** 80 km/h; 60 km/h. **1160.** 1) ≈ 4 %; 2) ≈ 9 %. **1162.** *Wskazówka*. Rozpatrzy trzy przypadki: 1) $x \leqslant 0$; 2) $0 < x < 1$; 3) $x \geqslant 1$.

§ 27

1173. $a = -8{,}5$; $b = -0{,}2$. **1174.** $a = 0{,}7$; $b = 10{,}5$. **1175.** 1) (2; 3); 2) (–1; 2); **1176.** 1) (1; 4); 2) (3; –2). **1184.** (x; $1{,}5x - 2{,}5$), де x – dowolna liczba; 2) Nie ma rozwiązań. **1189.** *Wskazówka*. Wydzielić pełny kwadrat. **1190.** $P = 30 + 6s$. **1192.** 1.

§ 28

1200. (3; 1). **1201.** (4; 1). **1202.** 1) (4; –3); 2) (2; –5); 3) $a = -5$; $b = -2$; 4) $m = 4$; $n = 0{,}5$. **1203.** 1) (–3; 4); 2) (2; –7); 3) $p = 7$; $q = 3$; 4) $a = 1{,}5$; $b = -6$. **1204.** 1) (8,5; 2,5); 2) $\left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right)$. **1205.** 1) (1,5; 2,5); 2) $\left(\frac{1}{6};\ -1\frac{1}{6}\right)$. **1206.** 1) (46,5; –25,5); 2) (6,5; 2). **1207.** 1) (22,5; 7,5); 2) (45; 1). **1208.** (4; 1). **1209.** (2; –3). **1211.** $k = \frac{1}{3}$; $l = -2$. **1212.** $y = 2{,}5x + 1$. **1213.** 1) $m = 2$; 2) $m = 4$.

§ 29

1231. 1) (–1; 1); 2) $a = 2$; $b = -1$; 3) $m = 3$; $n = 2$; 4) $\left(-\frac{1}{7};\ \frac{1}{2}\right)$. **1232.** 1) (2; 1); 2) (0,4; 7). **1233.** 1) (1; –2); 2) $a = 0{,}4$; $b = 0{,}1$. **1234.** 1) (–2; 2); 2) $m = 0{,}8$; $n = -1{,}5$. **1235.** 1) $y = \frac{3}{8}x - 5{,}5$;

2) $y = -\frac{2}{3}x + 4$. **1236.** $y = -0{,}25x + 4$. **1237.** 1) (–1; 3); 2) (3; –2). **1238.** 1) (1; –2); 2) (–2; –8). **1239.** 1) Nie ma rozwiązań; 2) nieskończenie wiele rozwiązań. **1244.** Nie, ponieważ przy całkowitych liczbach x i y wartość wyrażenia $y^2 - x^2$ jest nieparzysta lub wielokrotnością liczby 4.

§ 30

1250. 10 zeszytów; 6 zeszytów. **1251.** 224 UAH, 208 UAH. **1252.** 84 UAH, 28 UAH. **1253.** 10 cm, 8 cm, 8 cm. **1254.** 18 m; 10 m. **1255.** 18 km/h; 2 km/h. **1256.** 17 km/h; 3 km/h. **1257.** 42 km/h; 14 km/h. **1258.** 24 i 38. **1259.** 32 i 40. **1260.** 32 lata; 10 lat. **1263.** 80 jabłek; 15 jabłek. **1264.** 25; 20. **1265.** 90; 110. **1266.** 12 kg; 8 kg. **1267.** 10 kg; 15 kg. **1268.** 30 l; 45 l. **1269.** 24 książki; 33 książki. **1270.** 96 UAH, 104 UAH. **1271.** 180 tortów; 120 tortów. **1272.** $\frac{5}{18}$. **1273.** $\frac{7}{10}$. **1274.** 50 g; 150 g. **1275.** 156 g; 104 g. **1276.** 36 lat; 8 lat. **1277.** 45. **1282.** 20 krów.

Ćwiczenia powtórzeniowe dla rozdziału 4

1288. (–2; 0); (–1; 1); (–1; –1); (0; 2); (0; –2); (1; 1); (1; –1); (2; 0). **1297.** 1) $a = 3$; 2) $a \neq -14$. **1299.** 1) (–3; 2); 2) (5; –2). **1300.** 1) $\left(7\frac{1}{3};\ 2\frac{3}{5}\right)$; 2) (4; 3). **1301.** (–28; 41). **1302.** 1) $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$; 2) (4; 2). **1305.** Jeżeli $a = 2$, to nieskończenie wiele rozwiązań; jeżeli $a \neq 2$, wtedy jedyne rozwiązanie. **1307.** 1) (1; 2); 2) (–6; –2). **1308.** 1) (1; –2); 2) (0,5; –1,5). **1309.** 1) (2; 7); 2) $\left(3\frac{7}{37};\ -3\frac{5}{37}\right)$. **1310.** 1) ($x$; $-2 - 2x$), gdzie x – dowolna liczba; 2) układ nie ma rozwiązań. **1311.** 1) Nie; 2) tak; (2; –1) – rozwiązanie układu. **1312.** 1) $y = 1{,}25x - 5$. **1313.** 1) (4; 5); 2) (–2,5; 0). **1314.** 1) $a = 4$; 2) $a \neq 4$; 3) nie istnieje. **1315.** 1) $b = -3$; 2) jeżeli $b \neq -3$, to $x = 1{,}25$; $y = 0$. **1316.** 50 km/h; 60 km/h. **1317.** Porcja naleśników – 54 UAH, sałatka – 45 UAH. **1318.** 28 km/h; 2 km/h. **1319.** 18 części w ciągu h produkuje mistrz i 12 uczeń. **1320.** 80 gruszek; 100 gruszek. **1321.** 70 i 36. **1322.** 10; 50 i 80. **1323.** 2352 cm^2. **1324.** 35. **1325.** 15 l i 10 l. *Wskazówka.* Oznaczyć x l – w pierwszej kanistrze, y l – w drugiej.

Wtedy otrzymujemy układ: $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 20, \\ y + \frac{1}{3}x = 15. \end{cases}$

Zadania z gwiazdką

1. –1; 0; 2; 6. **2.** 7583. *Wskazówka.* Oznaczyć szukaną liczbę 7abc, zatem $\overline{abc} = x$. **4.** 1) Równanie nie ma rozwiązań; 2) $x = 3$. **5.** 1) Jeżeli $a = 0$, to równanie nie ma rozwiązań; jeżeli $a \neq 0$, to równanie ma jedyne rozwiązanie; 2) jeżeli $a = 0$, to równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań; jeżeli $a \neq 0$, to równanie ma jedyne rozwiązanie.. **6.** 1) Dla wszystkich a: $x = \frac{15+a}{2}$; 2) dla wszystkich a: $x = \frac{5a-9}{5}$; 3) jeżeli $a = 3$, to równanie nie ma rozwiązań; jeżeli $a \neq 3$, to $x = \frac{7}{a-3}$; 5) jeżeli $a = 1$, to x – dowolna liczba; jeżeli $a \neq 1$, to $x = 1$; 6) dla wszystkich wartości a: $x = -\frac{2a}{3}$. **7.** 1) $a = -4$; 2) $a = -7$. **8.** 21 m/s; 147 m. *Wskazówka.* Oznaczając x m/s jako prędkość pociągu, otrzymamy równanie $25x = 378 + 7x$. **9.** 10 m/s; 99 m. *Wskazówka.* Niech x m/s jako prędkość pociągu, wtedy jego długość $27x = (9x + 9) + 171$. **10.** 2 h, 6 h. **11.** 30°, 30° i 120° lub 20°, 80° i 80°. **12.** 26 zwojów. **13.** 520 D. **14.** 2401. **15.** O 38 %. **16.** $\frac{10^{15}+1}{10^{16}+1}$. **17.** 2018^2. **19.** $(m + n)^2 + (m - n)^2$. **20.** 1) $x - 5$; 2) $x + 3$. **21.** 1) $(a - 1)^2(b^2 + a^2 + 2a + 1)$; 2) $(1 - t)^3$; 3) $(x - 1) \times (x + 1)(x^4 - 2x^2 + 4)$. *Wskazówka.* $x^6 - 3x^4 + 6x^2 - 4 = (x^6 + 8) - 3(x^4 - 2x^2 + 4)$; 4) $(m - n + 4)(m + n - 2)$. *Wskazówka.* $2(m + 3n) + (m - n)(m + n) - 8 = (m^2 + 2m + 1) - (n^2 - 6n + 9)$; 5) $(a - b) \times (a^2 + ab + b^2 + a + b)$; 6) $2(2x - 1)(2x^2 + 2x + 1)$. *Wskazówka.* $8x^3 + 4x^2 - 2 = (8x^3 - 1) + (4x^2 - 1)$. **22.** Nie. **23.** $2^{128} - 1$. **24.** *Wskazówka.* Rozpatrz wyrażenie $\frac{(a^2+ab+b^2)+(b^2+bc+c^2)}{2}$ i wykorzystaj, że $b = \frac{a+c}{2}$. **26.** *Wskazówka.* $\overline{abcabc} = 100\,000a + 10\,000b + 1000c + 100a + 10b + c = 100\,100a + 10\,010b + 1001c = 1001 \times (100a + 10b + c) = 1001\overline{abc}$. **28.** 729. **30.** *Wskazówka.* Udowodnij, że $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 10(3^n - 2^{n-1})$. **31.** $(x + y)^3 + (x - y)^3$. **33.** $y = 4\,074\,341$. **34.** *Wskazówka.* $(2n + 2)^3 - (2n)^3 = 24n(n + 1) + 8$. **35.** 1) $(y^2 + y + 1)(y^3 - y^2 + 1)$. *Wskazówka.* $y^5 + y + 1 = y^5 - y^2 + y^2 + y + 1 = y^2(y^3 - 1) + y^2 + y + 1$; 2) $(m^2 + m + 1)(m^2 - m + 1)$. *Wskazówka.* $m^4 + m^2 + 1 = m^4 - m + m^2 + m + 1$; 3) $(x^2 - x + 3)(x^2 + x + 3)$. *Wskazówka.* $x^4 + 5x^2 + 9 = (x^4 + 6x^2 + 9) - x^2$; 4) $(n^2 - 2n + 2) \times$

$\times (n^2 + 2n + 2)$. *Wskazówka.* $n^4 + 4 = (n^4 + 4n^2 + 4) - 4n^2$; 5) $(x^2 - 2b^2) \times$ $\times (x^2 + 2a^2 + 2b^2)$. *Wskazówka.* $x^4 + 2a^2x^2 - 4a^2b^2 - 4b^4 =$ $= (x^4 + 2a^2x^2 + a^4) - (a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4)$; 6) $(m + 1)(m^2 - m - 1)$. *Wskazówka.* $m^3 - 2m - 1 = (m^3 + m^2) - (m^2 + 2m + 1)$; 7) $(m + 2) \times$ $\times (m^2 - 2m - 1)$. *Wskazówka.* $m^3 - 5m - 2 = (m^3 + 8) - (5m + 10)$ lub $m^3 - 5m - 2 = (m^3 - 4m) - (m + 2)$; 8) $(x + y)(x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3)$. *Wskazówka.* $x^4 - 2x^3y - 6x^2y^2 - 4xy^3 - y^4 = (x^4 - y^4) - (2x^3y + 2x^2y^2) -$ $- (4x^2y^2 + 4xy^3)$. **36.** $5^{15} < 3^{23}$. *Wskazówka.* $5^{15} = 5 \cdot (5^2)^7$, $3^{23} = 9 \cdot (3^3)^7$. **38.** 1) Tak; 2), 3) nie. **39.** 1), 2) Nie; 3) tak. **40.** (–1; –1) i (2; –5). **41.** 25 %. **42.** 1) Nie; 2), 3), 4) tak. **43.** Nie. **44.** 1) Jeden; 2) żadne; 3) jedno; 4) nieskończenie wiele. **45.** 5 lub 10. **46.** 1) Proste $x = -1$ i $x - 2y = 0$; 2) proste $x = 0$ i $y = x$; 3) proste $x = 2$ i $x = -2$; 4) proste $y = 3$ i $y = -3$; 5) $y = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } x < 0, \\ 2x, & \text{jeżeli } x \geqslant 0; \end{cases}$ 6) prosta $x = 0$ i promienie $y = 1$ dla $x \geqslant 0$ i $y = -1$ dla $x \leqslant 0$. **48.** 1) Tak; (2; 0), (–2; 0); 2) tak; (0; 4). **49.** (8; 2). **50.** 1) (3; 0); 2) (0; –5). **51.** 69 i 64. *Wskazówka.* $\overline{6x} \cdot \overline{6y} = \overline{x6} \cdot \overline{y6}$, skąd $xy = 36$. **52.** W 1990 r. *Wskazówka.* Niech Ołeś urodził się w 19xy roku. Wtedy w 2009 r. będzie miał 2009 – 19xy, co według warunku zadania równa się $(1 + 9 + x + y)$. **53.** $a = 10$. **54.** 1) $m = 2$ – Nie ma rozwiązań; $m \neq 2$ – jedyne rozwiązanie; 2) $m = 3$ – nieskończenie wiele rozwiązań; $m \neq 3$ – Nie ma rozwiązań; 3) $m = 1$ – nieskończenie wiele rozwiązań; $m \neq 1$ – jedyne rozwiązanie. **55.** $a = -7$. **56.** 1) $x = 5$, $y = 3$, $z = 0$. *Wskazówka.* Dodać według wyrazów wszystkie równania układu; 2) $x = -1$, $y = 8$, $z = -3$. **57.** $a = -2$; $b = -1$; $-8x^5 + 11x^2 + 11x - 8$. **58.** 1) (1; 2), (0,6; 2,4); 2) (2; 2), (3; 3), (–1; 2), (–1; 7); 3) (2; 2), (1; –1). **59.** 1) (2; 6); 2) (–4; –8); 3) $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$; 4) (–10; –5); 5) (2; –1); 6) (–3; –3). **60.** $a = 52$; $b = 57{,}2$; $c = 44$. **61.** Brat ma obecnie 10 lat, siostra 6 lat. **62.** 46. **63.** 742. **64.** 240 i 360. **65.** 500 kg piasku; 420 kg cementu. **66.** 5 cm. 15 cm. 12 cm. **67.** 26 cm. **68.** 7 kg pierwszej sztabki, 3 kg drugiej sztabki. **69.** 12 km. **70.** 630 l; 840 l. **71.** Prędkość autobusu 45 km/h, taksówki – 75 km/h. **72.** Prędkość każdego z autobusów 42 km/h, rowerzystki – 18 km/h. **73.** 4,5 km/h; 16,5 km/h. *Wskazówka.* Jeżeli x km/h jest prędkością turysty, a y km/h – prędkość rowerzysta, to otrzymamy układ: $\begin{cases} 1\frac{5}{6}x = \frac{1}{2}y, \\ 3\frac{1}{3}x + 2y = 48. \end{cases}$ **74.** 18 km/h;

42 km/h; 72 km/h. *Wskazówka.* Jeżeli oznaczyć prędkość rowerzystki x km/h, prędkość pierwszego autobusu – y km/h, wtedy prękdkość drugiego – $\frac{7}{12}y$ km/h. Otrzymamy układ

$$\begin{cases} 1\frac{1}{3}(x+y)=120, \\ 2\left(x+\frac{7}{12}y\right)=120. \end{cases}$$

75. 30 m/s i 20 m/s.

Odpowiedzi do zadań „Samodzielna praca domowa”

Zadania / Praca	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	**C**	**D**	**B**	**A**	**C**	**D**	**C**	**B**	**D**	**C**	**B**	**D**	**1–D; 2–B; 3–A**
2	**C**	**D**	**A**	**B**	**C**	**B**	**C**	**D**	**C**	**A**	**B**	**C**	**1–C; 2–D; 3–A**
3	**A**	**D**	**B**	**B**	**C**	**A**	**C**	**B**	**B**	**A**	**C**	**D**	**1–B; 2–A; 3–C**
4	**D**	**B**	**D**	**C**	**C**	**A**	**D**	**B**	**D**	**C**	**A**	**C**	**1–B; 2–A; 3–D**
5	**B**	**A**	**C**	**D**	**C**	**A**	**D**	**B**	**C**	**A**	**D**	**B**	**1–C; 2–A; 3–D**
6	**C**	**B**	**D**	**B**	**A**	**D**	**B**	**A**	**B**	**B**	**C**	**A**	**1–C; 2–D; 3–A**

INDEKS TEMATYCZNY

TREŚĆ

Pewny wybór ćwiczeń, które można rozwiązać online, znajdują się pod linkiem *https://cutt.ly/ZwKcTdz6* lub kodem QR.

Pewny wybór interaktywnych testowych zadań „Samodzielnych prac domowych” można znaleźć pod linkiem *https://cutt.ly/VwKcYplW* lub kodem QR.

Informacje na temat korzystania z podręcznika

№	Nazwisko i imię ucznia	Klasa	Rok akademicki	Ocena	
				na początku roku	na koniec roku
1					
2					
3					
4					
5					

Навчальне видання

Істер Олександр Семенович

АЛГЕБРА

Підручник для 7 класу з навчанням польською мовою
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Переклад з української мови

Перекладач Магдалена Рішардівна Сосульська

Польською мовою

Видано за рахунок державних коштів.

Продаж заборонено

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

У підручнику використано ілюстративний матеріал з відкритих джерел інтернету, зокрема сайтів *vecteezy.com, depositphotos.com*. Усі матеріали в підручнику використано з навчальною метою відповідно до законодавства України про авторське право і суміжні права.

Редактор ***О. Литвин***
Обкладинка ***Олександра Павленка***
Макет, художнє оформлення ***Олександра Павленка***
Комп'ютерна верстка ***М. Карпенко***
Коректор ***М. Сосульська***

Формат 70×100/16.
Ум. друк. арк. 23,4. Обл.-вид. арк. 19,15.
Тираж 132 пр.
Зам. № 24-07-1901

ТОВ «ВИДАВНИЦТВО АТЛАНТ»
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 7928 ВІД 08.09.2023
Адреса редакції: 02095, м.Київ, вул. Княжий затон, 9а, офс369
E-mail: atlant_publishing@ukr.net

Віддруковано у ТОВ «ПЕТ», вул. Максиміліанівська,17, м Харків, 61024
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6847 від 19.07.2019р.